Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Максимов, О связности множества решений функционально-дифференциального уравнения,
Дифференц. уравнения, 1978, том 14, номер 7, 1179–1185

https://www.mathnet.ru/de3432

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
16 декабря 2025 г., 14:21:58

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮЛЬ 1978 г., ТОМ XIV, № 7

УДК 517.948.34

В. П. МАКСИМОВ

О СВЯЗНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Множество решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}=f(t, x)$ при естественных предположениях относительно функции f оказывается связным множеством (см., например, [1] и библиографию в [2]). Для уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f(t, x[h(t)]), \quad t\in[a, b],\\ x(\xi)=\varphi(\xi), \text{ если } \xi\notin[a, b],\end{gathered} \tag{1}$$

при тех же предположениях относительно f связность множества решений задачи Коши может нарушаться. Например, скалярное уравнение $\dot{x}=\sqrt{x(1)}$, $t\in[0, 1]$, имеет только два решения, удовлетворяющих начальному условию $x(0)=0$: $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv t$. В настоящей статье для уравнения (1) и некоторых его обобщений предлагаются условия связности множества решений задачи Коши в пространстве абсолютно непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций.

Пусть R^n — линейное пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $\|\cdot\|_n$; L^n — пространство суммируемых функций $y : [a, b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_{L^n}=\int\limits_a^b \|y(t)\|_n dt$; D^n — пространство абсолютно непрерывных функций $y : [a, b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_{D^n}=\max\limits_{t\in[a, b]}\|y(t)\|_n+\|\dot{y}\|_{L^n}$.

Функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=\Theta NTx \tag{2}$$

будем рассматривать в следующих предположениях. $\Theta : L^n\to L^n$ — линейный ограниченный оператор, $T : D^n\to L^\nu$ — линейный вполне непрерывный оператор. $N : L^\nu\to L^n$ — оператор Немыцкого: $(Nz)(t)=f(t, z(t))$. Функция $f : [a, b]\times R^\nu\to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. $f(t, z)$ непрерывна по z при почти всех $t\in[a, b]$ и измерима по t при каждом $z\in R^\nu$. Напомним, что необходимым и достаточным условием непрерывного действия оператора N из L^ν в L^n является выполнение неравенства

$$\|f(t, z)\|_n\leqslant q(t)+r\|z\|_\nu, \tag{3}$$

где $q(t)$ — суммируемая на $[a, b]$ функция, $r=\text{const}$ (см. [3, 4]).

Под решением уравнения (2) понимается такой $x\in D^n$, для которого равенство $\dot{x}(t)=(\Theta NTx)(t)$ выполняется почти всюду на $[a, b]$.

Отметим, что к виду (2) приводятся дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и многие другие функционально-дифференциальные уравнения (см., например, [5]).

п. 1. Приведем здесь некоторые вспомогательные сведения. Пусть X и Y — линейные пространства функций, определенных на $[a, b]$. Оператор $A : X \to Y$ называется вольтерровым [6], если для любого $\tau \in (a, b]$ из равенства $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [a, \tau]$, следует равенство $(Ax_1)(t) = (Ax_2)(t)$, $t \in [a, \tau]$.

Неравенства между векторами понимаются покомпонентно; если $x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$, то $|x| \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{col}\,(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Оператор $A : X \to L^n$ называется *u-ограниченным* [7], если существует такой $u \in L^n$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|Ax| \leqslant u \|x\|_X.$$

Оператор $A : X \to X$ называется *сглаживаемым* [8] на множестве $F \subset X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно построить такой оператор A_ε, что $\|Ax - A_\varepsilon x\|_X \leqslant \varepsilon$ при $x \in F$ и уравнение $x = A_\varepsilon x + g$ при $\|g\|_X \leqslant \varepsilon$ имеет на F не более одного решения. Оператор A_ε называют *сглаживанием* оператора A.

Для удобства чтения приведем еще формулировку следующего принципа связности [8].

Пусть F — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество, A — вполне непрерывный оператор, который отображает F в себя. Пусть A имеет на F сглаживание, которое также является вполне непрерывным оператором. Тогда множество решений уравнения $x = Ax$, содержащихся в F, связно.

п. 2. Рассмотрим сначала интегральное уравнение Гаммерштейна

$$z = KNz + g, \quad g \in L^\nu. \tag{4}$$

Здесь $K : L^n \to L^\nu$ — вполне непрерывный интегральный оператор Вольтерра:

$$(Ky)(t) = \int_a^t K(t, s) y(s) ds$$

с ядром $K(t, s)$, элементы $k_{ij}(t, s)$ которого удовлетворяют неравенству

$$|k_{ij}(t, s)| \leqslant k(t), \quad i = \overline{1, \nu}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

с суммируемой на $[a, b]$ функцией $k(t)$.

Из неравенства (5) следует, что $\|K(t, s)\| \leqslant ck(t)$. Здесь норма $\nu \times n$-матрицы согласована с нормами $\|\cdot\|_n$ и $\|\cdot\|_\nu$, и постоянная c зависит только от выбора этих норм.

Пусть $g \in L^\nu$, $\eta_g(t)$ — решение скалярного уравнения

$$\eta(t) = rck(t) \int_a^t \eta(s) ds + \gamma_g(t), \quad t \in [a, b], \tag{6}$$

где $\gamma_g(t) = \|g(t)\|_\nu + ck(t) \int_a^t q(s) ds$, а $q(t)$ и r определяются неравенством (3).

Лемма. *Для любого $g \in L^\nu$ множество решений уравнения (4) непусто, компактно и связно в пространстве L^ν.*

Доказательство. Оператор $Az = KNz + g$ отображает множество $Z = \{z \in L^\nu : \|z(t)\|_\nu \leqslant \eta_g(t)\}$ в себя, так как

$$\left\| \int_a^t K(t, s) f(s, z(s)) ds \right\|_\nu + \|g(t)\|_\nu \leqslant \int_a^t \|K(t, s)\| \cdot \|f(s, z(s))\|_n ds +$$

$$+\|g(t)\|_\nu \leqslant ck(t)\int_a^t \{q(s)+r\|z(s)\|_\nu\}ds+\|g(t)\|_\nu \leqslant \eta_g(t).$$

Ссылка на принцип Шаудера завершает доказательство существования решения уравнения (4).

Далее, любое решение уравнения (4) удовлетворяет неравенству

$$\|z(t)\|_\nu \leqslant rck(t)\int_a^t \|z(s)\|_\nu ds+\gamma_g(t).$$

Отсюда следует, что все решения уравнения (4) ограничены одной суммируемой функцией: $\|z(t)\|_\nu \leqslant \eta_g(t)$, где $\eta_g(t)$ — решение уравнения (6). В силу полной непрерывности оператора KN это означает, что множество решений уравнения (4) компактно.

Для доказательства связности достаточно показать, что оператор KN имеет на множестве Z вполне непрерывное сглаживание.

Обозначим через f_m, $m=1, 2, \ldots$, функцию, определенную равенством

$$f_m(t, z)=\begin{cases} f(t, z) & \text{при} \quad \|z\|_\nu \leqslant m, \\ (m+1-\|z\|_\nu)\, f(t, z) & \text{при} \quad m<\|z\|_\nu<m+1, \\ 0 & \text{при} \quad m+1 \leqslant \|z\|_\nu. \end{cases}$$

Пусть $N_m : L^\nu \to L^n$ — оператор Немыцкого, порожденный функцией f_m. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое m, что

$$\|Nz-N_m z\|_{L^n} \leqslant \varepsilon \quad \forall z \in Z. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$\sigma_m(z)=\{t\in[a, b] : \|z(t)\|_\nu>m\},$$

$$\sigma_m=\{t\in[a, b] : \eta_g(t)>m\}.$$

Очевидно, $\sigma_m(z)\subset\sigma_m$ $\forall z\in Z$; кроме того, $\operatorname{mes}\sigma_m\to 0$ при $m\to\infty$ (см. [9], стр. 130). Выполнение (7) теперь следует из соотношений

$$\|Nz-N_m z\|_{L^n}=\int_a^b \|f(t, z(t))-f_m(t, z(t))\|_n dt=$$

$$=\int_{\sigma_m(z)} \|f(t, z(t))-f_m(t, z(t))\|_n dt \leqslant \int_{\sigma_m} \|f(t, z(t))-f_m(t, z(t))\|_n dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{\sigma_m} \{q(t)+r\eta_g(t)\}dt.$$

Обозначим через f^M, $M=1, 2, \ldots$, функцию, определенную равенством $f^M(t, z)=\operatorname{col}\{\varphi_1(t, z), \ldots, \varphi_n(t, z)\}$, где

$$\varphi_i(t, z)=\begin{cases} f_i(t, z), & \text{если} \quad |f_i(t, z)|\leqslant M, \\ M \operatorname{sign} f_i(t, z), & \text{если} \quad |f_i(t, z)|>M, \end{cases}$$

$f_i(t, z)$ — i-я компонента функции $f(t, z)$. Пусть $N^M : L^\nu \to L^n$ — оператор Немыцкого, порожденный функцией f^M. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое M, что

$$\|Nz-N^M z\|_{L^n} \leqslant \varepsilon \quad \forall z\in Z. \tag{8}$$

Действительно, пусть для определенности норма в R^n определяется

равенством: для $x=\mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$ $\|x\|_n=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. Введем обозначения

$$\sigma_i^M(z)=\{t\in[a, b] : |f_i(t, z(t))|>M\},$$
$$\sigma^M(z)=\{t\in[a, b] : \|f(t, z(t))\|_n>M\},$$
$$\sigma^M=\{t\in[a, b] : q(t)+r\eta_g(t)>M\}.$$

Для любого $z\in Z$ имеем $\sigma_i^M(z)\subset\sigma^M(z)\subset\sigma^M$; кроме того, $\mathrm{mes}\,\sigma^M\to 0$ при $M\to\infty$. Выполнение (8) следует теперь из соотношений

$$\|Nz-N^Mz\|_{L^n}=\int_a^b\sum_{i=1}^{n}|f_i(t, z(t))-\varphi_i(t, z(t))|dt=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma_i^M(z)}|f_i(t, z(t))-\varphi_i(t, z(t))|dt\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma^M(z)}|f_i(t, z(t))-$$
$$-\varphi_i(t, z(t))|dt=\int_{\sigma^M(z)}\|f(t, z(t))-f^M(t, z(t))\|_n dt\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{\sigma^M}\{q(t)+r\eta_g(t)\}dt.$$

Пусть $\{\psi_k\}$ — такая последовательность функций $\psi_k : [a, b]\times\{z\in R^\nu : \|z\|_\nu\leqslant m+1\}\to R^n$, что 1) $\psi_k(t, z)$, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям Каратеодори; 2) $\psi_k(t, z)$, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию Липшица по z:

$$\|\psi_k(t, z_1)-\psi_k(t, z_2)\|_n\leqslant l\|z_1-z_2\|_\nu$$

для любых z_1, z_2 и $t\in[a, b]$; 3) почти при всех $t\in[a, b]$ $\|\psi_k(t, z)-f_m^M(t, z)\|_n\to 0$ при $k\to\infty$.

Обозначим через $\psi_{k,m}$ функцию, определенную равенством

$$\psi_{k,m}(t, z)=\begin{cases}\psi_k(t, z) & \text{при } \|z\|_\nu\leqslant m,\\ (m+1-\|z\|_\nu)\,\psi_k(t, z) & \text{при } m<\|z\|_\nu<m+1,\\ 0 & \text{при } m+1\leqslant\|z\|_\nu.\end{cases}$$

Пусть $N_{k,m} : L^\nu\to L^n$ — оператор Немыцкого, порожденный функцией $\psi_{k,m}$. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k, что

$$\|N_m^Mz-N_{k,m}z\|_{L^n}\leqslant\varepsilon\quad\forall z\in Z. \tag{9}$$

Действительно, правая часть равенства

$$\|N_m^Mz-N_{k,m}z\|_{L^n}=\int_a^b\|f_m^M(t, z(t))-\psi_{k,m}(t, z(t))\|_n dt$$

стремится к нулю при $k\to\infty$ для каждой пары m и M в силу теоремы Лебега.

Из соотношений (7)—(9) и неравенства

$$\|Nz-N_{k,m}z\|_{L^n}\leqslant\|Nz-N_mz\|_{L^n}+$$
$$+\|N_mz-N_m^Mz\|_{L^n}+\|N_m^Mz-N_{k,m}z\|_{L^n}$$

следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такой оператор $N_{k,m}$, что

$$\|Nz-N_{k,m}z\|\leqslant\varepsilon \quad \forall z\in Z.$$

Оператор $N_{k,m}$ удовлетворяет условию Липшица, поэтому уравнение $z=KN_{k,m}z+g$ при любом $g\in L^\nu$ не может иметь более одного решения. Далее, оператор $KN_{k,m}$ вполне непрерывен в силу полной непрерывности оператора K.

Таким образом, произведение $KN_{k,m}$ является вполне непрерывным сглаживанием оператора KN. Лемма доказана.

п. 3. Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (2):

$$\dot{x}=\Theta NTx, \quad x(a)=\alpha. \tag{10}$$

Вопрос о связности множества решений этой задачи сводится к вопросу о связности множества решений уравнения (4) следующим образом.

Уравнение

$$x=V\Theta NTx+\alpha, \tag{11}$$

где оператор $V: L^n\to D^n$ определен равенством $(Vy)(t)=\int\limits_a^t y(s)\,ds$, эквивалентно задаче (10). Как известно (см., например, [10, 11]), между множеством решений уравнения (11) и множеством решений уравнения

$$z=TV\Theta Nz+g, \tag{12}$$

где $g=T\alpha$, существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенствами

$$x=V\Theta Nz+\alpha \quad \text{и} \quad z=Tx. \tag{13}$$

Пусть оператор $\Theta: L^n\to L^n$ вольтерров, а оператор $T: D^n\to L^\nu$ вольтерров и u-ограничен. Покажем, что в этом случае уравнение (12) есть уравнение вида (4). Оператор $TV\Theta: L^n\to L^\nu$ u-ограничен:

$$|TV\Theta y|\leqslant u\|V\Theta y\|_{D^n}=u\|\Theta y\|_{L^n}+u\max_{t\in[a,b]}\Big\|\int\limits_a^t(\Theta y)(s)\,ds\Big\|_n\leqslant$$

$$\leqslant 2u\|\Theta y\|_{L^n}\leqslant 2u\|\Theta\|\cdot\|y\|_{L^n}$$

и, кроме того, вольтерров как произведение вольтерровых операторов. Отсюда следует [12], что оператор $TV\Theta$ представим в виде

$$(TV\Theta y)(t)=\int\limits_a^t K(t,s)\,y(s)\,ds,$$

где ядро $K(t, s)$ удовлетворяет неравенству (5). Таким образом, к уравнению (12) применима лемма. Отсюда на основании соотношений (13), учитывая, что свойство связности инвариантно относительно непрерывного отображения, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть оператор $\Theta: L^n\to L^n$ вольтерров, а оператор $T: D^n\to L^\nu$ вольтерров и u-ограничен. Тогда множество решений задачи (10) непусто, компактно и связно.*

Многие авторы, следуя традиции [13], рассматривают решение дифференциального уравнения не как элемент пространства D^n, а как элемент пространства C^n непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций с чебышевской метрикой. В связи с этим отметим, что из непрерывности оператора вложения пространства D^n в C^n следует связность множества решений задачи (10) и в пространстве C^n.

п. 4. Остановимся теперь на приведении некоторых уравнений к виду (2).

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f_1(t,\ x[h(t)],\ \dot{x}[g(t)]),\quad t\in[a,\ b],\\ x(\xi)=\varphi(\xi),\quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi)\ \text{при}\ \xi\notin[a,\ b],\quad h(t)\leqslant t,\quad g(t)\leqslant t.\end{gathered}\tag{14}$$

Как известно (см., например, [5, 14]), уравнение (14) можно записать в виде

$$\dot{x}(t)=f_2(t,\ T_h x,\ S_g\dot{x}),\tag{15}$$

где линейные операторы T_h и S_g определяются равенствами

$$(T_h x)(t)=\begin{cases}x[h(t)] & \text{при}\ h(t)\in[a,\ b],\\ 0 & \text{при}\ h(t)\notin[a,\ b],\end{cases}\quad (S_g y)(t)=\begin{cases}y[g(t)] & \text{при}\ g(t)\in[a,\ b],\\ 0 & \text{при}\ g(t)\notin[a,\ b].\end{cases}$$

Оператор $T_h : D^n\to L^n$ вполне непрерывен, если функция $h(t)$ измерима [15]; условия, гарантирующие непрерывное действие оператора S_g в пространстве L^n, приведены в [14].

Пусть оператор S_g нильпотентен, т. е. существует такая степень S_g^k, которая переводит в нуль любой элемент из L^n. Это свойство гарантируется, например, неравенством $t-g(t)\geqslant\text{const}>0$. В [5] показано, что в этом случае уравнение (15) эквивалентно уравнению

$$\dot{x}(t)=f^k(t,\ T_h x,\ S_g T_h x,\ \ldots,\ S_g^{k-1}T_h x),\tag{16}$$

где функция $f^k : [a,\ b]\times R^n\times\ldots\times R^n\to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Уравнение (16) запишем в виде (2), полагая для каждого $z\in R^{kn}$ $(z=\text{col}\ (z_1,\ \ldots,\ z_k),\ z_i\in R^n,\ i=\overline{1,\ k})$

$$f(t,\ z)=f^k(t,\ z_1,\ \ldots,\ z_k);$$

определив оператор $T : D^n\to L^{kn}$ равенством

$$Tx=\text{col}\ (T_h x,\ S_g T_h x,\ \ldots,\ S_g^{k-1}T_h x);$$

и, наконец, полагая $\Theta=I$, где I — тождественный оператор.

Отметим, что в уравнении (15) оператор T_h можно заменить более общим оператором T_R:

$$(T_R x)(t)=\int_a^t d_s R(t,\ s)x(s),$$

где $n\times n$-матрица $R(t,\ s)$ такова, что для каждого ее элемента $r(t,\ s)$ функция $\rho(t)=\bigvee\limits_{s=a}^{t} r(t,\ s)$ суммируема на $[a,\ b]$ (см. [15]).

Уравнение $(I-\lambda S)\dot{x}=f(t,\ Tx)$ очевидным образом приводится к виду (2), если существует ограниченный обратный оператор $(I-\lambda S)^{-1}$: $: L^n\to L^n$.

В работе [5] показано, что и более общее квазилинейное уравнение

$$\mathfrak{L}x=f(t,\ Tx)\tag{17}$$

приводится к виду (2) в предположении фредгольмовости главной части линейного оператора $\mathfrak{L} : D^n\to L^n$. В частности, к уравнениям (17) относятся уравнения вида

$$\dot{x}(t)-\int_a^t d_s R(t,\ s)x(s)=f_1\left(t,\ \int_a^t d_s R_1(t,\ s)x(s),\ \int_a^t K(t,\ s)\dot{x}(s)\,ds\right).$$

В заключение рассмотрим в качестве примера скалярное уравнение

$$\dot{x}(t)=f_1\left[t, \int_{-\infty}^{t} x(s)d_s r(t, s), \ \dot{x}(t-\Delta)\right], \quad t\in[a, b],$$
$$x(\xi)=\varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi), \text{ если } \xi\notin[a, b], \tag{18}$$

в следующих предположениях.

Функция $f_1: [a, b]\times R^1\times R^1\to R^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори и

$$|f_1(t, u, v)|\leqslant q(t)+\beta|u|+\gamma|v|,$$

где функция $q(t)$ суммируема на $[a, b]$; $\beta, \gamma=\text{const}$.

Функция $r(t, s)$ определена на множестве $\{(t, s) : -\infty<s\leqslant t\leqslant b\}$, при почти всех t непрерывна по s в точке $s=a$, функции $R(t)=\bigvee_{s=a}^{t} r(t, s)$ и $\Phi(t)=\int_{-\infty}^{a}\varphi(s)d_s r(t, s)$ суммируемы на $[a, b]$. $\Delta=\text{const}>0$, функция $\psi(t)$ суммируема на $[a-\Delta, a]$.

Приводя уравнение (18) к виду (2), как описано выше, получаем следующее утверждение.

Множество решений уравнения (18), удовлетворяющих условию $x(a)=\alpha$, непусто, компактно и связно.

Литература

1. Лепин А. Я., Пономарев В. Д. Латвийский математический ежегодник, **17**, 1976, стр. 187—192.
2. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., «Наука», 1975.
3. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Физматгиз, 1956.
4. Шрагин И. В. Успехи матем. наук, **27**(165) : 3, 1972.
5. Азбелев Н. В. Дифференц. уравнения, **12**, № 11, 1976.
6. Тихонов А. Н. Бюллетень МГУ, секция А, т. I, 1938, стр. 1—25.
7. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1966.
8. Функциональный анализ, под общей ред. С. Г. Крейна. М., «Наука», 1972.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
10. Азбелев Н. В., Бердникова М. П., Рахматуллина Л. Ф. ДАН СССР, **192**, № 3, 1970.
11. Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Дифференц. уравнения, **9**, № 6, 1973.
12. Красносельский М. А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966.
13. Фукухара М. Proc. Imperial Acad. Japan, **4**, 1928.
14. Драхлин М. Е., Плышевская Т. К. Дифференц. уравнения, **11**, № 6, 1975.
15. Максимов В. П. Дифференц. уравнения, **10**, № 12. 1974.

Поступила в редакцию
28 июня 1977 г.

Пермский политехнический институт