Н. М. Остиану

О ГЕОМЕТРИИ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

ОГЛАВЛЕНИЕ

---

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ПОВЕРХНОСТИ

Будем изучать n-мерную поверхность, погруженную в N-мерное проективное пространство.

На протяжении всего изложения индексы будут пробегать следующие значения

$$I, J, K, \ldots = 0, 1, \ldots, N; \quad i, j, k, \ldots, p, q, \ldots = 1, \ldots, n;$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = n+1, \ldots, N.$$

Присоединим к поверхности подвижной репер, состоящий из $N+1$ аналитических точек $M_0, M_1, \ldots, M_N$, совместив вершину M_0 репера с текущей точкой поверхности и расположив вершины $M_0, M_1, \ldots, M_n$ в касательной плоскости.

Относительно такого репера дифференциальные уравнения, определяющие поверхность, принимают вид:

$$\omega^\alpha = 0, \tag{1.1}$$

а уравнения инфинитезимального перемещения репера запишутся так

$$\begin{aligned} dM_0 &= \omega_0^0 M_0 + \omega_0^i M_i, \\ dM_i &= \omega_i^0 M_0 + \omega_i^k M_k + \omega_i^\alpha M_\alpha, \\ dM_\alpha &= \omega_\alpha^0 M_0 + \omega_\alpha^k M_k + \omega_\alpha^\beta M_\beta. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Последовательные продолжения системы (1.1) приведут к системе дифференциальных уравнений последовательности фундаментальных объектов поверхности [1]:

$$\Lambda^\alpha_{i_1 i_2}, \Lambda^\alpha_{i_1 i_2 i_3}, \ldots, \Lambda^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots$$

Рекуррентная формула имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{u=1}^{r-2} \Big[& \frac{1}{(u+1)!\,(r-u-1)!} \Lambda^\beta_{(i_1 \ldots i_{u+1}} \Lambda^\alpha_{i_{u+2} \ldots i_r) l}\, \omega^l_\beta - \\ & - \frac{r-u-1}{u!\,(r-u)!} \Lambda^\beta_{(i_1 \ldots i_u} \Lambda^\alpha_{i_{u+1} \ldots i_r)} \omega^0_\beta \Big] + \Lambda^\alpha_{i_1 \ldots i_r l}\, \omega^l_0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_r} = d\Lambda^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_r} - \frac{1}{(r-1)!} \Lambda^\alpha_{l (i_1 \ldots i_{r-1}} \omega^l_{i_r)} + \\ + \Lambda^\beta_{i_1 \ldots i_r} \omega^\alpha_\beta + (r-1) \Lambda^\alpha_{i_1 \ldots i_r} \omega^0_0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

а по индексам, заключенным в скобки, производится симметрирование [3].

Заметим, что поскольку подвижной репер, присоединенный к поверхности (1.1), частично канонизирован (репер первого порядка), компоненты фундаментального объекта первого порядка $\Lambda^\alpha_{i_1}$ в формуле (1.3) имеют нулевые значения.

§ 2. ОБРАТНЫЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ

1. П. И. Швейкин показал, что если порядок соприкасающейся плоскости наинизшей размерности, заполняющей пространство, равен p, то в аффинном пространстве компонентами фундаментального объекта порядка p можно охватить относительный инвариант поверхности [4]. Он построил такой относительный инвариант I и для достаточно широкого класса поверхностей доказал, что этот относительный инвариант отличный от нуля.

Оказывается, что величина, имеющая ту же конструкцию, что и инвариант I П. И. Швейкина, является относительным инвариантом и в проективном пространстве [3].

В настоящей работе мы будем предполагать, что соприкасающаяся плоскость второго порядка заполняет пространство, т. е. что $p=2$. Воспользуемся инвариантом I, построенным П. И. Швейкиным [4], [5]. В случае $p=2$ этот инвариант совпадает с инвариантом Вейзе [6]:

$$I = L_{i_1^1 j_1^1 k_1^1 l_1^1,\, i_2^1 j_2^1 k_2^1 l_2^1, \ldots,\, i_m^1 j_m^1 k_m^1 l_m^1} \cdots$$

$$\ldots L_{i_1^n j_1^n k_1^n l_1^n, \ldots,\, i_m^n j_m^n k_m^n l_m^n}\, \varepsilon^{i_1^1 i_1^2 \ldots i_1^n} \ldots \varepsilon^{l_m^1 l_m^2 \ldots l_m^n}; \tag{2.1}$$

$$L_{i_1 j_1 k_1 l_1, \ldots,\, i_m j_m k_m l_m} =$$

$$= \frac{1}{(4!)^m}\, \delta^{p_1}_{i_1} \delta^{q_1}_{j_1} \delta^{r_1}_{k_1} \delta^{s_1}_{l_1} \ldots \delta^{p_m}_{i_m} \delta^{q_m}_{j_m} \delta^{r_m}_{k_m} \delta^{s_m}_{l_m} \times \tag{2.2}$$

$$\times K_{p_1 q_1,\, p_2 q_2, \ldots,\, p_m q_m} \times K_{r_1 s_1,\, r_2 s_2, \ldots,\, r_m s_m};$$

$$K_{i_1 j_1,\, i_2 j_2, \ldots,\, i_m j_m} = \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \Lambda^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \ldots \Lambda^{\alpha_m}_{i_m j_m}$$

$\varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, $\varepsilon^{i_1 \ldots i_n}$ — кососимметричные тензоры с единичными компонентами, а $m = N - n$.

Очевидно, инвариант I представляет собой однородный относительно Λ^{α}_{ij} многочлен степени $2mn$. После приведения подобных членов многочлен будет состоять из слагаемых такого вида

$$\sigma \Lambda^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \Lambda^{\alpha_2}_{i_2 j_2} \ldots \Lambda^{\alpha_{2mn}}_{i_{2mn} j_{2mn}}, \tag{2.3}$$

где σ — постоянный множитель, а наборы индексов $i_1, \ldots, i_{2mn}$, $j_1, \ldots, j_{2mn}$ в каждом слагаемом таковы, что каждое из значений, пробегаемых этими индексами: $1, 2, \ldots, n$, встречается $4m$ раза.

Отсюда следует, что если хотя бы в одном из множителей произвольного слагаемого (2.3) индексы i и j различны, то найдется среди этих сомножителей еще по крайней мере один сомножитель Λ^α_{kl}, у которого индексы будут тоже различные.

2. Исключим из рассмотрения поверхности, для которых инвариант I равен нулю.

В этом случае к поверхности присоединяется объект второго порядка V^{ij}_α, компоненты которого являются частными производными логарифма инварианта по компонентам фундаментального объекта второго порядка Λ^α_{ij}

$$V^{ij}_\alpha = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda^\alpha_{ij}}. \qquad (2.4)$$

В дальнейшем мы будем под I понимать инвариант (2.1), возведенный в надлежаще выбранную степень.

Из формулы (1.3) следует, что компоненты фундаментального объекта второго порядка Λ^α_{ij} удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$d\Lambda^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{lj}\omega^l_i + \Lambda^\alpha_{il}\omega^l_j - \Lambda^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^0_0 + \Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k_0.$$

Пользуясь этой формулой и формулой, выведенной Г. Ф. Лаптевым [2]:

$$dY^\rho_{\mathfrak{B}} = \frac{\partial dY^\rho}{\partial Y^\sigma} Y^\sigma_{\mathfrak{B}} - \frac{\partial dX^{\mathfrak{W}}}{\partial X^{\mathfrak{B}}} Y^\rho_{\mathfrak{W}},$$

где $X^{\mathfrak{B}}$ — компоненты охватывающего объекта, Y^ρ — компоненты охваченного объекта, а $Y^\rho_{\mathfrak{B}} = \frac{\partial Y^\rho}{\partial X^{\mathfrak{B}}}$, а также дифференциальным уравнением, справедливым для любого относительного инварианта [2]:

$$dK = K\left(\lambda\omega^i_i + \mu\omega^\alpha_\alpha + \nu\omega^0_0\right) + K_k\omega^k_0,$$

находим, что компоненты объекта V^{ij}_α удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$dV^{ij}_\alpha = -V^{lj}_\alpha\omega^i_l - V^{il}_\alpha\omega^j_l + V^{ij}_\beta\omega^\beta_\alpha + V^{ij}_\alpha\omega^0_0 + V^{ij}_{\alpha k}\omega^k_0, \qquad (2.5)$$

т. е. V^{ij}_α — тензор [1]. Будем называть этот тензор V^{ij}_α обратным фундаментальным объектом второго порядка.

По формуле, указанной выше, дифференциальное уравнение относительного инварианта I имеет вид

$$d\ln I = \lambda\omega^i_i + \mu\omega^\alpha_\alpha + \nu\omega^0_0 + I_k\omega^k_0;$$

с другой стороны, из (2.4), имеем

$$d \ln I = V_{\alpha}^{ij} d\Lambda_{ij}^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\lambda\omega_i^i + \mu\omega_\alpha^\alpha + \nu\omega_0^0 + I_k\omega_0^k = V_\alpha^{ij}\left(\Lambda_{kj}^\alpha\omega_i^k + \Lambda_{ik}^\alpha\omega_j^k - \right.$$
$$\left. - \Lambda_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha\omega_0^0 + \Lambda_{ijk}^\alpha\omega_0^k\right),$$

или

$$\lambda\delta_k^i\omega_i^k + \mu\delta_\alpha^\beta\omega_\beta^\alpha + \nu\omega_0^0 + I_k\omega_0^k = 2V_\alpha^{ij}\Lambda_{kj}^\alpha\omega_i^k -$$
$$- V_\alpha^{ij}\Lambda_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha - V_\alpha^{ij}\Lambda_{ij}^\alpha\omega_0^0 + V_\alpha^{ij}\Lambda_{ijk}^\alpha\omega_0^k.$$

Откуда, сравнивая коэффициенты при одинаковых формах, получаем

$$I_k = V_\alpha^{ij}\Lambda_{ijk}^\alpha \tag{2.6}$$

и

$$\lambda\delta_k^i = 2V_\alpha^{ij}\Lambda_{kj}^\alpha$$
$$\mu\delta_\alpha^\beta = - V_\alpha^{ij}\Lambda_{ij}^\beta$$
$$\nu = - V_\alpha^{ij}\Lambda_{ij}^\alpha.$$

Свертывая первое равенство по индексам k и i и второе по индексам α и β, находим, что

$$\nu = -\frac{n}{2}\lambda = (N-n)\mu..$$

Положив $\nu = -n(N-n)$, получим $\lambda = 2(N-n)$, $\mu = -n$ И, следовательно,

$$V_\alpha^{ij}\Lambda_{kj}^\alpha = (N-n)\,\delta_k^i,$$
$$V_\alpha^{ij}\Lambda_{ij}^\beta = n\delta_\alpha^\beta. \tag{2.7}$$

Продолжая систему (2.5), получаем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет система величин третьего порядка (2.8):

$$V_{\alpha k}^{ij} \tag{2.8}$$

$$\nabla V_{\alpha k}^{ij} = V_\alpha^{ij}\omega_k^0 + V_\alpha^{il}\delta_k^j\omega_l^0 +$$
$$+ V_\alpha^{lj}\delta_k^i\omega_l^0 - V_\alpha^{ij}\Lambda_{kl}^\beta\omega_\alpha^l - \tag{2.9}$$
$$- V_\alpha^{il}\Lambda_{lk}^\gamma\omega_\gamma^j - V_\alpha^{jl}\Lambda_{lk}^\gamma\omega_\gamma^i + V_{\alpha kl}^{ij}\omega_0^l.$$

Следовательно, величины $\left(V_{\alpha k}^{ij}, V_\alpha^{ij}, \Lambda_{ij}^\alpha\right)$ образуют геометрический объект.

§ 3. ОСНАЩЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Основной задачей неметрической дифференциальной геометрии поверхности является построение инвариантного оснащения.

Оснащающей плоскостью или оснащением n-мерной поверхности N-мерного проективного пространства мы будем называть $(N-n-1)$-мерную плоскость, инвариантно присоединенную к поверхности и не имеющую с касательной плоскостью ни одной общей точки. Такая плоскость может быть задана $(N-n)$ линейно независимыми точками

$$\widetilde{M}_\alpha = X^\beta_\alpha M_\beta + X^i_\alpha M_i + X^0_\alpha M_0. \tag{3.1}$$

Так как точки

$$\widetilde{M}_{n+1}, \ldots, \widetilde{M}_N; M_1, M_2, \ldots, M_n; M_0$$

линейно независимые, то $\det|X^\beta_\alpha| \neq 0$ и, следовательно, за точки, определяющие оснащающую плоскость, можно принять точки

$$\widetilde{\widetilde{M}}_\alpha = \overset{*}{X}{}^\beta_\alpha \widetilde{M}_\beta = M_\alpha + \nu^i_\alpha M_i + \nu^0_\alpha M_0, \tag{3.2}$$

где $\overset{*}{X}{}^\beta_\alpha X^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\alpha$ и $\overset{*}{X}{}^\alpha_\beta X^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma$. Таким образом, оснащающая плоскость определяется системой величин $(\nu^i_\alpha, \nu^0_\alpha)$, которая и будет называться системой относительных компонент объекта оснащения.

При преобразованиях репера, связанного с текущей точкой M поверхности, компоненты ν^i_α, ν^0_α объекта оснащения будут изменяться. Однако их изменения должны подчиняться условию неподвижности плоскости, определяемой точками $\widetilde{\widetilde{M}}_\alpha$. Эти условия выражаются уравнениями

$$d\widetilde{\widetilde{M}}_\alpha = \theta^\beta_\alpha \widetilde{\widetilde{M}}_\beta, \tag{3.3}$$

где θ^β_α — пфаффовы формы.

Подставляя в (3.3) дифференциал $d\widetilde{\widetilde{M}}_\alpha$, вычисленный дифференцированием (3.2) с учетом (1.2), получим

$$d\widetilde{\widetilde{M}}_\alpha = (\omega^\beta_\alpha + \nu^i_\alpha \omega^\beta_i) M_\beta + (d\nu^i_\alpha + \nu^l_\alpha \omega^i_l + \omega^i_\alpha + \nu^0_\alpha \omega^i_0) M_i +$$
$$+ (d\nu^0_\alpha + \nu^i_\alpha \omega^0_i + \nu^0_\alpha \omega^0_0 + \omega^0_\alpha) M_0 =$$
$$= \theta^\beta_\alpha (M_\beta + \nu^0_\beta M_0 + \nu^i_\beta M_i).$$

Полагая $\omega_0^i = 0$ и сравнивая коэффициенты при M_β, M_0, M_i, находим

$$\tilde{d}\nu_\alpha^0 + \tilde{\omega}_\alpha^0 + \nu_\alpha^0\tilde{\omega}_0^0 + \nu_\alpha^i\tilde{\omega}_i^0 = \tilde{\theta}_\alpha^\beta\nu_\beta^0,$$
$$\tilde{d}\nu_\alpha^i + \tilde{\omega}_\alpha^i + \nu_\alpha^l\tilde{\omega}_l^i = \tilde{\theta}_\alpha^\beta\nu_\beta^i,$$
$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \tilde{\theta}_\alpha^\beta.$$

Теперь подставляя $\tilde{\theta}_\alpha^\beta$ из третьей группы уравнений в предыдущие и полагая $\omega_0^i \neq 0$, получаем дифференциальные уравнения поля оснащающего объекта $(\nu_\alpha^i, \nu_\alpha^0)$:

$$\nabla\nu_\alpha^i = -\omega_\alpha^i + \nu_{\alpha k}^i\omega_0^k, \tag{3.4}$$
$$\nabla\nu_\alpha^0 = -\nu_\alpha^i\omega_i^0 - \omega_\alpha^0 + \nu_{\alpha k}^0\omega_0^k, \tag{3.5}$$

где

$$\nabla\nu_\alpha^i = d\nu_\alpha^i - \nu_\beta^i\omega_\alpha^\beta + \nu_\alpha^l\omega_l^i,$$
$$\nabla\nu_\alpha^0 = d\nu_\alpha^0 - \nu_\beta^0\omega_\alpha^\beta. \tag{3.6}$$

Заметим, что компоненты ν_α^i объекта оснащения образуют самостоятельный подобъект. Этот подобъект ν_α^i определяет поле инвариантно присоединенных к поверхности $(N-n)$-мерных плоскостей таких, что плоскость, соответствующая текущей точке M поверхности, имеет с касательной плоскостью в этой точке M только одну общую точку $M \equiv M_0$.

Объект $(\nu_\alpha^i, \nu_\alpha^0)$ определяет инвариантное оснащение.

Задача построения инвариантного оснащения поверхности, внутренне определенного этой поверхностью, состоит в том, чтобы построить объект оснащения, охваченный фундаментальным объектом поверхности.

С алгебраической точки зрения в проективном пространстве эта задача слагается из двух задач.

Во-первых, надо построить охват подобъекта оснащения ν_α^i, система дифференциальных уравнений которого разрешена относительно форм ω_α^i.

Во-вторых, надо построить охват остальных компонент ν_α^0, система дифференциальных уравнений которых разрешена относительно форм $\nu_\alpha^i\omega_i^0 + \omega_\alpha^0$.

Естественно, представляет интерес построение этих охватов фундаментальным объектом наинизшего возможного порядка.

В системе дифференциальных уравнений фундаментальных объектов (1.3) формы ω_α^i появляются впервые, одновременно с формами ω_k^0, в дифференциальных уравнениях фундаментального объекта третьего порядка, а формы ω_α^0 — в системе дифференциальных уравнений фундаментального объекта четвертого порядка. Поэтому объект оснащения $(\nu^i_\alpha, \nu^0_\alpha)$ можно охватить фундаментальным объектом не ниже четвертого порядка. Однако можно попытаться построить охват подобъекта оснащения ν^i_α фундаментальным объектом третьего порядка. Для этого систему дифференциальных уравнений фундаментального объекта третьего порядка нужно разрешить относительно форм ω^i_α и исключить из полученных уравнений формы ω^0_k.

Можно предложить несколько вспомогательных приемов. Во-первых [3], из системы дифференциальных уравнений фундаментального объекта третьего порядка можно, при некоторых дополнительных условиях, определить формы

$$\omega^k_{ij} \equiv \Lambda^\alpha_{ij}\omega^k_\alpha - \frac{1}{2}(\delta^k_i\omega^0_j + \delta^k_j\omega^0_i). \tag{3.7}$$

Во-вторых, можно также при выполнении некоторых дополнительных условий определить из той же системы формы

$$\theta^\alpha_{k\beta} \equiv \Lambda^\alpha_{kl}\omega^l_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega^0_k. \tag{3.8}$$

Наконец, следуя методу, предложенному Г. Ф. Лаптевым [2] для построения оснащения аффинной поверхности, можно построить объект третьего порядка $(h^i_\alpha, \Lambda^\alpha_{ij})$, дифференциальные уравнения которого в проективном пространстве оказываются разрешенными относительно форм

$$\vartheta^i_\alpha \equiv -(2N-n)\,\omega^i_\alpha + (n+2)\,V^{ik}_\alpha\omega^0_k. \tag{3.9}$$

Далее, при помощи любых двух из форм ω^i_{jk}, $\theta^\alpha_{k\beta}$ и ϑ^i_α мы можем определить формы ω^i_α.

В настоящей работе (§§ 4, 5) для построения оснащения мы используем формы $\theta^\alpha_{k\beta}$ и ϑ^i_α

§ 4. ОБЪЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА $W^{\beta i}_{\gamma k}$, $\overset{*}{W}{}^{\alpha i}_{\beta j}$

1. Выпишем из системы (1.3) систему дифференциальных уравнений фундаментального объекта третьего порядка

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ijk}\,\omega^k_0,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ijk} = \Lambda^\alpha_{l(i}\Lambda^\beta_{jk)}\omega^l_\beta - \Lambda^\alpha_{(ij}\omega^0_{k)} + \Lambda^\alpha_{ijkl}\,\omega^l_0.$$

Перепишем вторую группу уравнений следующим образом

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ijk} = \Lambda^\beta_{ij}\left(\Lambda^\alpha_{lk}\,\omega^l_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega^0_k\right) +$$

$$+ \Lambda^\beta_{jk}\left(\Lambda^\alpha_{li}\omega^l_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega^0_i\right) + \Lambda^\beta_{ki}\left(\Lambda^\alpha_{lj}\omega^l_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega^0_j\right) + \Lambda^\alpha_{ijkl}\,\omega^l_0.$$

Или, используя обозначения (3.8),

$$\nabla \Lambda^{\alpha}_{ijk} = \Lambda^{\beta}_{(ij}\theta^{\alpha}_{k)\beta} + \Lambda^{\alpha}_{ijkl}\,\omega^{l}_{0}. \tag{4.1}$$

Свернем компоненты Λ^{α}_{ijk} с обратным фундаментальным объектом V^{ij}_{γ}. Система дифференциальных уравнений полученных величин будет иметь вид

$$\nabla \Lambda^{\alpha}_{ijk} V^{jk}_{\gamma} = V^{jk}_{\gamma}\Lambda^{\beta}_{(ij}\theta^{\alpha}_{k)\beta} + \left(V^{jk}_{\gamma}\Lambda^{\alpha}_{ijkl} + V^{ij}_{\gamma l}\Lambda^{\alpha}_{ijk}\right)\omega^{l}_{0}. \tag{4.2}$$

Или, с учетом соотношений (2.7),

$$\nabla \Lambda^{\alpha}_{ijk} V^{jk}_{\gamma} = \left(n\delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{l}_{i} + 2V^{il}_{\gamma}\Lambda^{\beta}_{ij}\right)\theta^{\alpha}_{l\beta} + \left(V^{jk}_{\gamma}\Lambda^{\alpha}_{ijkl} + \right.$$
$$\left. + V^{ij}_{\gamma l}\Lambda^{\alpha}_{ijk}\right)\omega^{l}_{0}. \tag{4.3}$$

Введем объект (4.4):

$$W^{\beta l}_{\gamma i} = n\delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{l}_{i} + 2V^{jl}_{\gamma}\Lambda^{\beta}_{ij}. \tag{4.4}$$

Из строения величин (4.4) $W^{\beta l}_{\gamma i}$ следует, что они образуют тензор, охваченный фундаментальным объектом второго порядка. Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что компоненты тензора $W^{\beta l}_{\gamma i}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$dW^{\beta l}_{\gamma i} = W^{\beta l}_{\gamma k}\omega^{k}_{i} + W^{\beta l}_{\alpha i}\omega^{\alpha}_{\gamma} - W^{\alpha l}_{\gamma i}\omega^{\beta}_{\alpha} -$$
$$- W^{\beta k}_{\gamma i}\omega^{l}_{k} + \binom{\beta l}{\gamma i}_{k}\omega^{k}_{0} \tag{4.5}$$

Здесь и в дальнейшем под символом $\binom{i\,\ldots\,j}{k\,\ldots\,l}_{m}$ мы будем понимать величины, полученные при продолжении величин, снабженных набором индексов, указанным в скобках. В случаях, когда они используются в работе, мы будем их выписывать в явном виде.

2. При обозначениях (4.4) систему (4.3) можно переписать следующим образом

$$\nabla \Lambda^{\alpha}_{ijk} V^{jk}_{\gamma} = W^{\beta l}_{\gamma i}\theta^{\alpha}_{l\beta} + \left(V^{jk}_{\gamma}\Lambda^{\alpha}_{ijkl} + V^{jk}_{\gamma l}\Lambda^{\alpha}_{ijk}\right)\omega^{l}_{0}. \tag{4.6}$$

В системе (4.6) примем за неизвестные формы (3.8) $\theta^{\alpha}_{l\beta}$. Число их совпадает с числом уравнений системы (4.6).

Поскольку уравнения системы (4.6) являются линейными комбинациями уравнений системы (4.1), то для их линейной независимости необходимо, чтобы число их не превышало числа уравнений системы (4.1), т. е. должны выполняться условия

$$(N-n)^2\, n \leqslant (N-n)\,\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6},$$

или

$$N-n \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением поверхностей, для которых выполняется строгое неравенство в этих соотношениях, т. е. будем полагать, что

$$N-n < \frac{(n+1)(n+2)}{6}. \tag{4.7}$$

Соотношения (4.7) выражают одновременно необходимое условие отличия от нуля определителя, составленного из компонент тензора $W_{\gamma i}^{\beta l}$, где за номер столбца мы принимаем сочетание βl, а за номер строки — сочетание γi, т. е. необходимое условие невырожденности тензора $W_{\gamma i}^{\beta l}$.

Позже мы увидим (см. § 6), что оно является существенным для нетривиальности и других геометрических объектов поверхности.

Замечание. Если выполняется равенство

$$N-n = \frac{(n+1)(n+2)}{6},$$

то, вообще говоря, тензоры D_{ijk}^{α}, D_{ijk}, построенные в § 6, имеют нулевые компоненты. Эти поверхности будут исследованы особо.

3. Мы покажем теперь, что, например, для поверхностей, размерность которых кратна размерности нормального пространства, т. е. $n = k(N-n)$, где k — любое целое положительное число, определитель W, составленный из компонент тензора $W_{\gamma i}^{\beta l}$, не равен нулю тождественно.

Примем за номер столбца определителя сочетание верхних индексов βl и за номер строки — сочетание нижних индексов γi. Тогда определителю W можно придать клеточный вид

$$W = \left|\begin{array}{c:c:c:c} W_1^1 & W_1^2 & \ldots & W_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_2^1 & W_2^2 & \ldots & W_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_n^1 & W_n^2 & \ldots & W_n^n \end{array}\right|,$$

где каждая клетка W_j^i построена следующим образом

$$W_j^i = \begin{vmatrix} W_{n+1\,j}^{n+1\,i} & W_{n+1\,j}^{n+2\,i} & \ldots & W_{n+1\,j}^{n+m\,i} \\ W_{n+2\,j}^{n+1\,i} & W_{n+2\,j}^{n+2\,i} & \ldots & W_{n+2\,j}^{n+m\,i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{n+m\,j}^{n+1\,i} & W_{n+m\,j}^{n+2\,i} & \ldots & W_{n+m\,j}^{n+m\,i} \end{vmatrix}.$$

Зададим компонентам фундаментального объекта второго порядка следующие начальные значения

$$\Lambda^{\alpha}_{ij} = 0,\ i \neq j,$$
$$\Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} = 1,\ \left(\text{здесь } q = 1, \ldots, m;\ m = N - n; \atop s = 0, \ldots, (k-1)\right), \tag{4.8}$$
$$\Lambda^{\alpha}_{ii} = 0 \text{ при остальных сочетаниях индексов.}$$

При таких значениях компонент Λ^{α}_{ij} инвариант I (2.1) отличен от нуля [5].

Вычисляя по формуле (2.4) компоненты V^{ij}_{α} $(i \neq j)$ и подставляя значения (4.8) в полученные выражения, мы убедимся, что

$$V^{ij}_{\alpha} = 0\ (i \neq j). \tag{4.9}$$

Действительно, любая частная производная

$$V^{ij}_{\alpha} = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda^{\alpha}_{ij}}$$

представляет собой однородный многочлен степени $2mn - 1$, каждое слагаемое которого получено из (2.3) последовательной заменой одного (каждого) из сомножителей $\Lambda^{\alpha}_{i_k j_k}$ константой $A^{ij}_{i_k j_k}$:

$$A^{ij}_{i_k j_k} \left| \begin{array}{l} = 0, \text{ если сочетание } (i_k j_k) \text{ отлично от} \\ \quad\ \text{сочетания } (ij), \\ = 1, \text{ если сочетание } (i_k j_k) \text{ совпадает с} \\ \quad\ \text{сочетанием } (ij). \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Таким образом слагаемые этого многочлена будут иметь вид

$$\sigma \Lambda^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \Lambda^{\alpha_2}_{i_2 j_2} \ldots A^{ij}_{i_k j_k} \ldots \Lambda^{\alpha_{2mn}}_{i_{2mn} j_{2mn}}. \tag{4.11}$$

Пусть $i \neq j$. Тогда либо сочетание $(i_k j_k)$ не совпадает с сочетанием (ij) и такое слагаемое (4.11), в силу (4.10), равно нулю, либо сочетание $(i_k j_k)$ совпадает с сочетанием (ij), т. е. $i_k \neq j_k$. В таком случае (в силу рассуждений, приведенных в § 2, п. 1) в слагаемом (4.10) найдется по крайней мере еще один сомножитель $\Lambda^{\alpha}_{i_l j_l}$ такой, что $i_l \neq j_l$. Но такое слагаемое (4.11) при значении (4.8) также равно нулю.

Итак, мы показали, что при значениях (4.8) все компоненты V^{ij}_{α}, у которых $i \neq j$, равны нулю.

Подставляя значения (4.8) в часть первой группы уравнений (2.7), а именно в уравнения

$$V^{ik}_{\tilde{\alpha}}\Lambda^{\alpha}_{ik} = N - n \quad (\underline{k} \text{ — фиксированное}),$$

находим $V^{sm+q\ sm+q}_{n+q}\Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} = N - n$ (по q суммирования нет) (здесь $q = 1, \ldots, m$; $m = N - n$; $s = 0, 1, \ldots, (k-1)$), или

$$V^{sm+q\ sm+q}_{n+q} = N - n. \tag{4.12}$$

Остальные компоненты V^{ij}_{α} могут быть вычислены из уравнений (2.4), но они не потребуются при доказательстве, и мы не будем их здесь определять.

При заданных значениях (4.8) и найденных значениях (4.9) и (4.12) определитель W принимает клеточно-диагональный вид, причем клетки, расположенные по главной диагонали, имеют следующее строение

$$W^{sm+q}_{sm+q} = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 \ldots 2V^{sm+q\ sm+q}_{n+1} & \Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} \ldots 0 \\ 0 & n & 0 \ldots 2V^{sm+q\ sm+q}_{n+2} & \Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} \ldots 0 \\ 0 & 0 & n \ldots 2V^{sm+q\ sm+q}_{n+3} & \Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots n + 2V^{sm+q\ sm+q}_{n+q} & \Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 2V^{sm+q\ sm+q}_{n+m} & \Lambda^{n+q}_{sm+q\ sm+q} \ldots n \end{vmatrix}$$

($q = 1, \ldots, m$; $m = N - n$; $s = 0, \ldots, (k-1)$; k — коэффициент кратности) или, с учетом (4.8) и (4.12),

$$W^{sm+q}_{sm+q} = \begin{vmatrix} n & 0 \ldots 2m & \ldots 0 \\ 0 & n \ldots 2m & \ldots 0 \\ & \ddots & \\ \ldots & n + 2m & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 2m & \ldots n \end{vmatrix} = n^{n-1}(2N - n) \neq 0.$$

Таким образом, мы показали, что в пространстве переменных Λ^{α}_{ij} в точке с координатами (4.8), определитель $W \neq 0$, следовательно, он отличен от нуля и в окрестности точки с координатами (4.8).

Есть основания полагать, что для неспециальных поверхностей определитель W не равен нулю тождественно. Однако мы не будем проводить здесь доказательства этого утверждения.

4. Исключим из рассмотрения поверхности, для которых тензор $W^{\alpha l}_{\beta j}$ — вырожденный.

Тогда можно ввести обращенный тензор $\overset{*}{W}{}^{\gamma l}_{\beta j}$, компоненты которого связаны с компонентами тензора $W^{\beta j}_{\alpha l}$ соотношениями (4.13):

$$W^{\beta j}_{\alpha l}\overset{*}{W}{}^{\gamma l}_{\beta j} = \delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{l}_{j}; \quad W^{\beta j}_{\alpha l}\overset{*}{W}{}^{\alpha l}_{\gamma t} = \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{j}_{t}. \tag{4.13}$$

Компоненты $\overset{*}{W}{}^{\gamma l}_{\beta j}$ будут удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\overset{*}{W}{}^{\beta j}_{\alpha l} = \overset{*}{W}{}^{\beta j}_{\gamma l}\omega^{\gamma}_{\alpha} + \overset{*}{W}{}^{\beta j}_{\alpha t}\omega^{t}_{l} - \overset{*}{W}{}^{\gamma j}_{\alpha l}\omega^{\beta}_{\gamma} -$$
$$- \overset{*}{W}{}^{\beta t}_{\alpha l}\omega^{j}_{t} + \binom{\beta j}{\alpha l}_{t}\omega^{t}_{0}. \tag{4.14}$$

§ 5. ОБЪЕКТЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА $(A^{\alpha}_{k\beta}, \Lambda^{\alpha}_{ij})$, $(h^{i}_{\alpha}, V^{ik}_{\alpha})$, $(l^{i}_{\alpha}, V^{ik}_{\alpha})$ И ПОДОБЪЕКТ ОСНАЩЕНИЯ ν^{l}_{α}

1. Возвратимся к системе (4.6)

$$\nabla\Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\gamma} = W^{\delta l}_{\gamma i}\theta^{\alpha}_{l\delta} + \binom{\alpha}{i\gamma}_{l}\omega^{l}_{0}. \tag{4.6}$$

Свертывая $\left(\Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\gamma}\right)$ с тензором $\overset{*}{W}{}^{\gamma i}_{\delta h}$ и дифференцируя эти величины, мы получим систему разрешенную относительно форм $\theta^{\alpha}_{l\beta}$ (3.8)

$$\nabla\Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\gamma}\overset{*}{W}{}^{\gamma i}_{\beta l} = \theta^{\alpha}_{l\beta} + \binom{\alpha}{l\beta}_{k}\omega^{k}_{0}. \tag{5.1}$$

Введем обозначения:

$$A^{\alpha}_{l\beta} = -\Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\gamma}\overset{*}{W}{}^{\gamma i}_{\beta l} \tag{5.2}$$

и перепишем уравнения (5.1):

$$\nabla A^{\alpha}_{l\beta} = -\theta^{\alpha}_{l\beta} + \binom{\alpha}{l\beta}_{k}\omega^{k}_{0}. \tag{5.1'}$$

Или, с учетом (3.8),

$$\nabla A^{\alpha}_{l\beta} = -\Lambda^{\alpha}_{lk}\omega^{k}_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta}\overset{0}{\omega}{}^{0}_{l} + A^{\alpha}_{l\beta k}\omega^{k}_{0}, \tag{5.3}$$

где

$$A^{\alpha}_{l\beta k} = -\left(\overset{*}{W}{}^{\gamma i}_{\beta l}V^{jh}_{\gamma}\Lambda^{\alpha}_{ijhk} + \overset{*}{W}{}^{\gamma i}_{\beta l k}V^{jh}_{\gamma}\Lambda^{\alpha}_{ijh} + \overset{*}{W}{}^{\gamma i}_{\beta l}V^{jh}_{\gamma k}\Lambda^{\alpha}_{ijh}\right). \tag{5.4}$$

Из уравнений (5.3) и (5.2) следует, что величины $\left(A^{\alpha}_{l\beta}, \Lambda^{\alpha}_{kl}\right)$ образуют объект, охваченный фундаментальным объектом третьего порядка. Мы используем этот объект для построения подобъекта оснащения. В дальнейшем (§ 9) мы дадим этому объекту геометрическую интерпретацию.

2. Свернув систему величин (5.2) с обратным фундаментальным объектом V^{ki}_{γ}, мы получим:

$$l^i_{\gamma} = A^{\alpha}_{k\beta} V^{ki}_{\alpha}. \tag{5.5}$$

Дифференцируя (5.5) с учетом (5.3) и (5.2), находим

$$\nabla l^i_{\gamma} = -(N-n)\,\omega^i_{\gamma} + V^{ik}_{\gamma}\overset{0}{\omega}_k + \binom{i}{\gamma}_k \omega^k_0. \tag{5.6}$$

Из (5.6) и (5.5) следует, что величины $\left(l^i_{\gamma}, V^{ik}_{\gamma}\right)$ образуют геометрический объект третьего порядка.

3. По аналогии с аффинным пространством [2] строим объект h^i_{α}:

$$h^i_{\alpha} = \frac{1}{N}\left[(2N-n)\,V^{il}_{\alpha l} + V^{ik}_{\alpha}\Delta^{\beta}_{kjh}V^{jh}_{\beta}\right], \tag{5.7}$$

где $V^{il}_{\alpha l}$ — свернутый по индексам l и j продолженный обратный фундаментальный объект $V^{il}_{\alpha j}$ (2.8). Непосредственным дифференцированием находим систему уравнений, которой удовлетворяют компоненты h^i_{α}

$$\nabla h^i_{\alpha} = -(2N-n)\,\omega^i_{\alpha} + (n+2)\,V^{ik}_{\alpha}\overset{0}{\omega}_k + \binom{i}{\alpha}_k \omega^k_0. \tag{5.8}$$

4. Теперь из дифференциальных уравнений (5.6) и (5.8) мы можем исключить формы $\overset{0}{\omega}_k$

$$\nabla\left[(n+2)\,l^i_{\alpha} - h^i_{\alpha}\right] = -n\,(N-n-1)\,\omega^i_{\alpha} + \binom{i}{\alpha}_k \omega^k_0. \tag{5.9}$$

Вводя обозначения

$$\rho^i_{\alpha} = (n+2)\,l^i_{\alpha} - h^i_{\alpha}, \tag{5.10}$$

мы перепишем систему (5.9) так

$$\nabla\rho^i_{\alpha} = -n\,(N-n-1)\,\omega^i_{\alpha} + \binom{i}{\alpha}_k \omega^k_0. \tag{5.11}$$

Из системы (5.10), (5.11) следует, что величины ρ^i_{α} образуют геометрический объект, охваченный фундаментальным объектом третьего порядка.

Сравнивая систему (5.11) с системой (3.4), приходим к заключению, что ρ^i_{α} с точностью до постоянного множителя совпадает с искомым подобъектом оснащения.

З а м е ч а н и е. При $N = n+1$ все компоненты подобъекта оснащения (5.10) равны нулю тождественно.

Действительно, в этом случае

$$W^{\alpha i}_{\beta k} \equiv W^{Ni}_{Nk} = (n+2)\,\delta^i_k.$$

Следовательно,

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha l}_{\beta k} \equiv \overset{*}{W}{}^{Nl}_{Nk} = \frac{1}{n+2}\delta^l_k.$$

Далее из соотношений (2.7) как следствие получаем

$$V^{lk}_{\alpha h} \equiv V^{lk}_{Nh} = -\Lambda^N_{ijh} V^{ik}_N V^{jl}_N,$$

откуда, свертывая по k и h, находим

$$V^{lk}_{\alpha k} = -\Lambda^N_{ijh} V^{ih}_N V^{jl}_N.$$

Следовательно,

$$l^l_\alpha \equiv l^l_N = -\frac{1}{n+2} V^{il}_N V^{jk}_N \Lambda^N_{ijk}$$

и

$$h^l_\alpha \equiv h^l_N = -V^{il}_N V^{jk}_N \Lambda^N_{ijk}.$$

Откуда

$$\rho^l_\alpha \equiv \rho^l_N \equiv 0. \qquad (5.12)$$

Заметим также, что при $N = n+1$ в уравнениях (5.9) коэффициент при формах ω^l_α равен нулю.

Исключая из рассмотрения гиперповерхность, т. е. полагая $N - n - 1 \neq 0$, мы можем ввести объект

$$\nu^l_\alpha = \frac{1}{n(N-n-1)}\rho^l_\alpha, \qquad (5.13)$$

Очевидно

$$\nabla \nu^l_\alpha = -\omega^l_\alpha + \nu^l_{\alpha k}\omega^k_0. \qquad (5.14)$$

Таким образом, нам удалось охватить фундаментальным объектом третьего порядка объект ν^l_α, который и является искомым подобъектом оснащения.

§ 6. ТЕНЗОРЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА D^α_{ijk}, B_{ij}, B^{ij}, b_α, b^α, D_{ijk}

1. Рассмотрим систему величин D^α_{ijk}, охваченную фундаментальным объектом третьего порядка:

$$D^\alpha_{ijk} = \Lambda^\alpha_{ijk} + \Lambda^\beta_{(ij} A^\alpha_{k)\beta}, \qquad (6.1)$$

где скобки ( ) означают циклирование по индексам, заключенным в них. Очевидно, D^α_{ijk} симметричны по нижним индексам.

Дифференцируя (6.1), находим:

$$\begin{aligned} dD^\alpha_{ijk} &= D^\alpha_{ljk}\omega^l_i + D^\alpha_{ilk}\omega^l_j + D^\alpha_{ijl}\omega^l_k - \\ &- D^\beta_{ijk}\omega^\alpha_\beta - 2D^\alpha_{ijk}\omega^0_0 + \binom{\alpha}{ijk}_l\omega^l_0. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Следовательно, объект D^{α}_{ijk} — тензор.

2. Свернем тензор D^{α}_{ijk} с обратным фундаментальным объектом второго порядка V^{ij}_{β}. С учетом соотношений (2.7), (4.4), (5.2) и (4.13) находим:

$$D^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} + \Lambda^{\gamma}_{(ij}A^{\alpha}_{k)\gamma}V^{jk}_{\beta} =$$
$$= \Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} + (n\delta^{\gamma}_{\beta} + 2V^{jk}_{\beta}\Lambda^{\gamma}_{ij})\,A^{\alpha}_{k\gamma} =$$
$$= \Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} + W^{\gamma k}_{\beta i}\,A^{\alpha}_{k\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} -$$
$$- \Lambda^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} \equiv 0,$$

то есть

$$D^{\alpha}_{ijk}V^{jk}_{\beta} = 0. \tag{6.3}$$

3. Введем систему величин B_{ij} при помощи следующих уравнений

$$B_{ij} = D^{\alpha}_{pqi}D^{\beta}_{rsj}V^{pr}_{\alpha}V^{qs}_{\beta}. \tag{6.4}$$

Величины B_{ij}, очевидно, образуют симметричный тензор. Дифференцирование (6.4) дает

$$dB_{ij} = B_{lj}\omega^{l}_{i} + B_{il}\omega^{l}_{j} - 2B_{ij}\omega^{0}_{0} + (_{ij})_{k}\omega^{k}_{0}. \tag{6.5}$$

4. Из компонент тензора B_{ij} составим определитель B

$$B = \det|B_{ij}|. \tag{6.6}$$

Дифференциал этого определителя имеет вид

$$dB = B\,(2\omega^{i}_{i} - 2n\omega^{0}_{0}) + (\ )_{k}\,\omega^{k}_{0}. \tag{6.7}$$

Следовательно, B образует относительный инвариант третьего порядка.

Покажем теперь, что, например, для класса поверхностей, размерность которых кратна размерности нормального пространства, т. е. $n = k(N-n)$, где k—любое целое положительное число, определитель B не равен нулю тождественно.

Зададим компонентам фундаментального объекта третьего порядка следующие начальные значения

$$\Lambda^{\alpha}_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$
$$\Lambda^{n+p}_{sm+p\; sm+p} = 1, \ p = 1, \ldots, m; \ s = 0, \ldots, (k-1), \tag{4.8}$$
$$m = N - n; \ k \text{ — коэффициент кратности},$$
$$\Lambda^{\alpha}_{ii} = 0 \text{ при всех остальных системах индексов } \alpha \text{ и } i,$$

$$\Lambda^{\alpha}_{ijk} = 0, \text{ если } i, j, k \text{ все разные},$$
$$\Lambda^{\alpha}_{iik} = 0, \text{ если } i \neq k,$$
$$\Lambda^{n+p}_{sm+p\, sm+p\, sm+p} = 1, \tag{6.8}$$
$$\Lambda^{\alpha}_{iii} = 0 \text{ при остальных сочетаниях индексов } \alpha \text{ и } i.$$

Как мы уже нашли (§ 4, п. 3), при значениях (4.8) компоненты обратного фундаментального объекта V^{ij}_{α} имеют такие начальные значения

$$V^{ij}_{\alpha} = 0, \text{ если } i \neq j, \tag{4.9}$$
$$V^{sm+p\, sm+p}_{n+p} = m. \tag{4.12}$$

Остальные компоненты V^{ij}_{α} не нужны для доказательства, поэтому мы их здесь вычислять не будем.

Соответствующие начальные значения для других величин будут следующие:

$$\overset{*}{W}{}^{n+p\, sm+q}_{n+p\, sm+q} = \frac{1}{n + 2m\delta^p_q}, \quad p, q = 1, \ldots, m; \; m = N - n; \; s = 0, \ldots, (k-1);$$
$$\overset{*}{W}{}^{\alpha i}_{\beta j} = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta \text{ и } i \neq j,$$
$$A^{n+p}_{sm+q\,\beta} = 0, \text{ если } p \neq q,$$
$$A^{n+p}_{sm+p\,\beta} = -\sum_{s=0}^{k-1} \Lambda^{n+p}_{sm+p\, sm+p\, sm+p} V^{sm+p\, sm+p}_{\beta} \overset{*}{W}{}^{\beta\, sm+p}_{\beta\, sm+p},$$
$$D^{\alpha}_{ijk} = 0, \text{ если все индексы } i, j, k \text{ разные},$$
$$D^{\alpha}_{iik} = 0, \text{ если } i \neq k,$$
$$D^{n+p}_{sm+q\, sm+q\, sm+q} = 0, \; p \neq q,$$
$$D^{n+p}_{sm+p\, sm+p\, sm+p} = -\frac{N-2n}{2N-n},$$
$$B_{ij} = 0, \; i \neq j,$$
$$B_{ii} = \frac{(N-2n)^2 (N-n)^2}{(2N-n)^2}.$$

Очевидно, определитель (6.6) отличен от нуля в точке пространства переменных Λ^{α}_{ij}, Λ^{α}_{ijk} с координатами (4.8), (6.8), и, следовательно, он отличен от нуля и в некоторой окрестности этой точки. Мы будем рассматривать только те поверхности, для которых

$$B \neq 0.$$

5. Вследствие отличия от нуля определителя B мы можем ввести обратный тензор B^{ij}, компоненты которого заданы уравнениями

$$B^{ij}B_{jk} = \delta^i_k. \qquad (6.9)$$

Дифференцирование этих уравнений дает

$$dB^{ij} = -B^{lj}\omega^i_l - B^{il}\omega^j_l + 2B^{ij}\omega^0_0 + (^{ij})_k\omega^k_0. \qquad (6.10)$$

Тензор B^{ij} симметричный.

6. Свернув тензор B_{ij} с обратным фундаментальным объектом второго порядка V^{ij}_α, получим тензор b_α

$$b_\alpha = B_{ij}V^{ij}_\alpha. \qquad (6.11)$$

Дифференцирование (6.11) дает

$$db_\alpha = b_\beta\omega^\beta_\alpha - b_\alpha\omega^0_0 + (_\alpha)_k\omega^k_0. \qquad (6.12)$$

7. Свертывая контравариантный тензор B^{ij} (6.9) с фундаментальным объектом второго порядка Λ^α_{ij}, получим тензор b^α

$$b^\alpha = B^{ij}\Lambda^\alpha_{ij}, \qquad (6.13)$$

компоненты которого удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$db^\alpha = -b^\beta\omega^\alpha_\beta + b^\alpha\omega^0_0 + (^\alpha)_k\omega^k_0. \qquad (6.14)$$

8. Свернув тензор D^α_{ijk} с тензором b_α, мы получим трехвалентный симметричный тензор третьего порядка:

$$D_{ijk} = b_\alpha D^\alpha_{ijk}. \qquad (6.15)$$

Очевидно компоненты тензора D_{ijk} удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$dD_{ijk} = D_{ljk}\omega^l_i + D_{ilk}\omega^l_j + D_{ijl}\omega^l_k - 3D_{ijk}\omega^0_0 + (_{ijk})_l\,\omega^l_0. \qquad (6.16)$$

Из уравнений (6.3) находим, что компоненты тензора D_{ijk} удовлетворяют соотношениям

$$D_{ijk}V^{jk}_\alpha = 0. \qquad (6.17)$$

Замечание. Из соотношений (6.3), так же как и из соотношений (6.17), следует, что n и N должны удовлетворять условиям (4.7)

$$N - n < \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

Далее (см. § 10) мы выясним геометрический смысл построенных тензоров D^α_{ijk}, b_α, D_{ijk} и их связь с аналогичными объектами гиперповерхности [1].

§ 7. ОБЪЕКТ ОСНАЩЕНИЯ $(\nu^l_\alpha, \nu^0_\alpha)$

1. Г. Ф. Лаптевым [1] было построено инвариантное оснащение гиперповерхности, охваченное фундаментальным объектом четвертого порядка.

В настоящем параграфе мы исключим из рассмотрения гиперповерхность и будем строить оснащение n-мерной поверхности $1 < N - n < \frac{(n+1)(n+2)}{6}$ при помощи построенного нами (§ 5) подобъекта оснащения ν^l_α (5.13), охваченного фундаментальным объектом третьего порядка, и некоторых объектов четвертого порядка.

2. Продолжив систему (5.14) мы найдем систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют величины четвертого порядка

$$\nu^l_{\alpha k}, \tag{7.1}$$

возникшие в дифференциальных уравнениях (5.14)

$$\nabla\nu^i_{\alpha k} = \nu^i_\beta\Lambda^\beta_{lk}\omega^l_\alpha + \nu^l_\alpha\Lambda^\beta_{lk}\omega^i_\beta - \nu^l_\alpha\delta^i_k\omega^0_l - \delta^i_k\omega^0_\alpha + \left(^{\,i}_{\alpha k}\right)_l\omega^l_0. \tag{7.2}$$

3. Составим теперь следующую систему величины четвертого порядка

$$\nu^0_\alpha = -\frac{1}{n}\left(\nu^k_{\alpha k} + \nu^k_\beta\nu^l_\alpha\Lambda^\beta_{kl}\right), \tag{7.3}$$

где $\nu^k_{\alpha k}$ — свернутые по индексам i и k величины (7.1), а ν^k_β — подобъект оснащения (5.13).

Дифференцируя, с учетом (7.2), (5.14) и (1.3), находим

$$\nabla\nu^0_\alpha = \nu^k_\alpha\omega^0_k + \omega^0_\alpha + (\alpha)_k\,\omega^k_0. \tag{7.4}$$

Следовательно, величины $\left(\nu^l_\alpha, \nu^0_\alpha\right)$ образуют объект, охваченный фундаментальным объектом четвертого порядка.

Сравнивая уравнения (7.4) с уравнениями (3.4) и (3.5), убеждаемся, что объект $\left(\nu^l_\alpha, \nu^0_\alpha\right)$ является объектом оснащения.

§ 8. ОБЪЕКТ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА $(A^\alpha_{\beta\gamma}, A^\alpha_{k\beta}, \Lambda^\alpha_{ij})$

1. Свернув объект $A^\alpha_{k\beta}$ по индексам α и β, получим систему величин

$$A_k = A^\alpha_{k\alpha}, \tag{8.1}$$

удовлетворяющих следующим дифференциальным уравнениям:

$$dA_k = A_l\omega_k^l - A_k\omega_0^0 - \Lambda_{kl}^{\alpha}\omega_{\alpha}^l + (N-n)\,\omega_k^0 + \overline{A}_{kl}\omega_0^l, \tag{8.2}$$

где $\overline{A}_{kl}$ — свернутые по индексам α и β величины (5.4).

Величины A_k вместе с Λ_{ij}^{α} образуют объект, охваченный фундаментальным объектом третьего порядка.

Заметим, что в случае гиперповерхности величины A_k с точностью до числового множителя совпадают с величинами I_k (2.6).

Действительно,

$$A_{k\alpha}^{\alpha} \equiv A_{kN}^{N} = -\Lambda_{ijl}^{N}V_N^{ij}\overset{*}{W}{}_{Nk}^{Nl} = -\frac{1}{n+2}I_k. \tag{8.3}$$

2. Определим систему величин A_{kl}, симметричных по индексам kl, следующими уравнениями

$$A_{kl} = \frac{1}{2}\left(\overline{A}_{kl} + \overline{A}_{lk}\right). \tag{8.4}$$

Продолжая систему (8.2) и подставляя полученное выражение для $d\overline{A}_{kl}$ в дифференциал (8.4), мы получим систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют величины (8.4)

$$dA_{kl} = A_{kj}\omega_l^j + A_{jl}\omega_k^j - 2A_{kl}\omega_0^0 - A_k\omega_l^0 - A_l\omega_k^0 +$$
$$+ A_j\Lambda_{kl}^{\beta}\omega_{\beta}^j - \Lambda_{klj}^{\alpha}\omega_{\alpha}^j + (N-n+1)\,\Lambda_{kl}^{\beta}\omega_{\beta}^0 + (_{kl})_j\omega_0^j. \tag{8.5}$$

3. При помощи величин A_{kl} (8.4) строим систему величин, охваченную фундаментальным объектом четвертого порядка

$$l_{\beta} = \frac{1}{n}\left(A_{kl} + A_{k\gamma}^{\alpha}A_{l\alpha}^{\gamma}\right)V_{\beta}^{kl}. \tag{8.6}$$

Дифференцируя (8.6) с учетом уравнений (8.5), (5.3) и (2.5) и упрощая полученные уравнения при помощи соотношений (5.2), (4.13) и (4.4), находим систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют величины (8.6):

$$dl_{\beta} = l_{\gamma}\omega_{\alpha}^{\gamma} - l_{\beta}\omega_0^0 + \left(A_k\delta_{\beta}^{\gamma} + A_{k\beta}^{\gamma}\right)\omega_{\gamma}^k +$$
$$+ (N-n+1)\,\omega_{\beta}^0 + (^{\beta})_k\,\omega_0^k. \tag{8.7}$$

4. При помощи величин l_{α}, $A_{k\beta}^{\alpha}$, ρ_{α}^k, A_k и компонент Λ_{ij}^{α} и V_{α}^{ij} строим величины $A_{\beta\gamma}^{\alpha}$, охваченные фундаментальным объектом четвертого порядка:

$$A_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{N-n+1}\left\{l_{(\beta}\delta_{\gamma)}^{\alpha} + \sigma\left[\rho_{(\beta}^{k}\delta_{\gamma)}^{\alpha}A_k + A_{k(\beta}^{\varepsilon}\delta_{\gamma)}^{\alpha}\rho_{\varepsilon}^{k} -\right.\right.$$

$$- \sigma\Delta^{\varepsilon}_{kl}\,\rho^{l}_{\varepsilon}\,\rho^{k}_{(\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma)}\Big]\Big\} + \sigma\Big[\frac{\sigma}{2}\,\Lambda^{\alpha}_{kl}\,\rho^{k}_{(\beta}\,\rho^{l}_{\gamma)} - A^{\alpha}_{k(\beta}\,\rho^{k}_{\gamma)}\Big], \tag{8.8}$$

где

$$\sigma \left| \begin{array}{l} = \dfrac{1}{n(N-n-1)} \text{ при } N \neq n+1, \\ = 0 \text{ при } N = n+1, \end{array} \right. \tag{8.9}$$

а по индексам, заключенным в скобки, производится симметрирование,

Дифференцируя (8.8), находим

$$dA^{\alpha}_{\beta\gamma} = A^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon}_{\beta} + A^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}_{\gamma} - A^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\varepsilon} -$$

$$- A^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{0}_{0} + A^{\alpha}_{k(\beta}\,\omega^{k}_{\gamma)} + \delta^{\alpha}_{(\beta}\omega^{0}_{\gamma)} + \binom{\alpha}{\beta\gamma}_{k}\omega^{k}_{0}. \tag{8.10}$$

Заметим, что в случае гиперповерхности, в силу условий (8.9) $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ совпадают с l_{β} (8.6), а система дифференциальных уравнений (8.10) сводится к системе (8.7).

Таким образом, мы построили геометрический объект $(A^{\alpha}_{\beta\gamma}, A^{\alpha}_{k\beta}, \Lambda^{\alpha}_{ij})$, охваченный фундаментальным объектом четвертого порядка.

§ 9. ПУЧОК СОПРИКАСАЮЩИХСЯ МНОГООБРАЗИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Рассмотрим присоединенное к поверхности

$$\omega^{\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

поле многообразий, каждое из которых задано относительно соответствующего репера системой $N-n$ уравнений

$$C^{\alpha}_{IK}x^{I}x^{K} = 0, \tag{9.1}$$

где $C^{\alpha}_{IK} = C^{\alpha}_{KI}$.

При фиксации первичных параметров $\omega^{k}(\delta) = 0$ коэффициенты C^{α}_{IK} удовлетворяют вполне интегрируемой системе уравнений

$$\delta C^{\alpha}_{IK} = C^{\alpha}_{IL}\omega^{L}_{K}(\delta) + C^{\alpha}_{LK}\omega^{L}_{I}(\delta) + \theta^{\alpha}_{\beta}(\delta)\,C^{\beta}_{IK}. \tag{9.2}$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений поля многообразий, каждое из которых определено системой (9.1), имеет вид:

$$dC^{\alpha}_{IK} = C^{\alpha}_{IL}\omega^{L}_{K} + C^{\alpha}_{LK}\omega^{L}_{I} + \theta^{\alpha}_{\beta}C^{\beta}_{IK} + C^{\beta}_{IKl}\omega^{l}_{0}. \tag{9.3}$$

2. Потребуем, чтобы многообразие (9.1), соответствующее точке M поверхности (1.1), имело с поверхностью в этой точке касание второго порядка. Это требование приводит немедленно к следующим соотношениям

$$C^{\alpha}_{00}=0;\quad C^{\alpha}_{0i}=0;\quad C^{\alpha}_{ij}=-\Lambda^{\alpha}_{ij}. \tag{9.4}$$

Кроме того, пронормируем коэффициенты C^{α}_{IK} так, чтобы

$$C^{\alpha}_{0\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{9.5}$$

Тогда, из системы (9.1) с учетом (9.4), получим

$$\theta^{\alpha}_{\beta}(\delta)=-\omega^{\alpha}_{\beta}(\delta)-\omega^{0}_{0}(\delta). \tag{9.6}$$

В силу соотношений (9.4), (9.5) и (9.6) система (9.3) примет вид

$$\begin{aligned}
&(\text{а})\quad dC^{\alpha}_{ij}=C^{\alpha}_{il}\omega^{l}_{j}+C^{\alpha}_{lj}\omega^{l}_{i}-C^{\beta}_{ij}\omega^{\alpha}_{\beta}-C^{\alpha}_{ij}\omega^{0}_{0}+\widetilde{C}^{\alpha}_{ijk}\omega^{k}_{0},\\
&(\text{б})\quad dC^{\alpha}_{i\beta}=C^{\alpha}_{l\beta}\omega^{l}_{i}+C^{\alpha}_{i\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}-C^{\gamma}_{i\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma}-C^{\alpha}_{i\beta}\omega^{0}_{0}+\\
&\qquad +\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{i}-\Lambda^{\alpha}_{il}\omega^{l}_{\beta}+\widetilde{C}^{\alpha}_{i\beta l}\omega^{l}_{0},\\
&(\text{в})\quad dC^{\alpha}_{\beta\gamma}=C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon}_{\beta}+C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\omega^{\varepsilon}_{\gamma}-C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\varepsilon}-\\
&\qquad -C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{0}_{0}+C^{\alpha}_{k\gamma}\omega^{k}_{\beta}+C^{\alpha}_{\beta k}\omega^{k}_{\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{0}_{\beta}+\\
&\qquad +\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{\gamma}+\widetilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma k}\omega^{k}_{0},
\end{aligned} \tag{9.7}$$

Уравнения (9.1) можно теперь переписать следующим образом

$$-\Lambda^{\alpha}_{ij}x^{i}x^{j}+2C^{\alpha}_{k\beta}x^{k}x^{\beta}+2x^{0}x^{\beta}+C^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}x^{\gamma}=0. \tag{9.1'}$$

Для поля таких многообразий (9.1′) уравнения (9.7а) удовлетворяются в силу соотношений $C^{\alpha}_{ij}=-\Lambda^{\alpha}_{ij}$.

Если теперь положить

$$C^{\alpha}_{k\beta}=A^{\alpha}_{k\beta}, \tag{9.8}$$

где $A^{\alpha}_{k\beta}$ введены в (5.2), и

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}=A^{\alpha}_{\beta\gamma}+\nu b^{\alpha}b_{\beta}b_{\gamma}, \tag{9.10}$$

где ν — любой абсолютный инвариант поверхности (1.1), а $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ b_{β} и b^{α} введены соответственно в (8.8), (6.11) и (6.13), то будут удовлетворяться и остальные уравнения системы (9.7). Таким образом, мы получили пучок полей инвариантно присоединенных к поверхности (1.1) соприкасающихся алгебраических многообразий (9.11)

$$\Lambda^{\alpha}_{ij}x^{i}x^{j}-2x^{0}x^{\alpha}-2A^{\alpha}_{k\beta}x^{k}x^{\beta}-(A^{\alpha}_{\beta\gamma}+\nu b^{\alpha}b_{\beta}b_{\gamma})\,x^{\beta}x^{\gamma}=0. \tag{9.11}$$

Позже мы увидим (§ 10), что пучок (9.11) является одним из возможных обобщений пучка поверхностей Дарбу на случай n-мерной поверхности.

§ 10. ПУЧОК ГИПЕРКВАДРИК ДАРБУ

1. Потребуем, чтобы пучок многообразий (9.11), соответствующий точке M поверхности (1.1), имел с поверхностью касанье третьего порядка, т. е чтобы многообразию (9.11) принадлежали с точностью до величины третьего порядка малости точки

$$M + dM + \frac{1}{2} d^2M + \frac{1}{3!} d^3M.$$

Это требование немедленно приводит к необходимости выполнения системы уравнений (10.1)

$$[\Lambda^{\alpha}_{ijk} + A^{\alpha}_{(i\,|\,\beta\,|}\Lambda^{\beta}_{jk)}]\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0 \tag{10.1}$$

или, учитывая (6.1), системы

$$D^{\alpha}_{ijk}\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0. \tag{10.1'}$$

Отсюда следует, что пучок полей многообразий (9.11) может иметь с поверхностью (1.1) касание третьего порядка только в случае, если тензор $D^{\alpha}_{ijk} \equiv 0$. Если же это тождество не имеет места, то при $N - n \leqslant n - 1$ система (10.1′) выделит на поверхности (1.1) подмногообразия, вдоль которых пучок (9.11) имеет с поверхностью касание третьего порядка.

Это дает основание назвать тензор D^{α}_{ijk} — по аналогии с классической проективной дифференциальной геометрией — тензором Дарбу, а пучок многообразий (9.11) — пучком многообразий Дарбу.

2. Свернув систему (9.11) с тензором b_α (6.10), получим пучок полей инвариантно присоединенных к поверхности (1.1) гиперквадрик, имеющих с поверхностью касание второго порядка

$$b_\alpha C^{\alpha}_{IK} x^I x^K = 0, \tag{10.2}$$

где

$$\begin{gathered} b_\alpha C^{\alpha}_{00} = 0; \; b_\alpha C^{\alpha}_{0i} = 0; \\ b_\alpha C^{\alpha}_{0\beta} = b_\beta; \\ b_\alpha C^{\alpha}_{ij} = -\,b_\alpha \Lambda^{\alpha}_{ij}. \end{gathered} \tag{10.3}$$

Требуя, чтобы пучок полей (10.2) имел с поверхностью (1.1) касание третьего порядка, приходим к условию

$$D_{ijk}\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0, \tag{10.4}$$

где

$$D_{ijk} = b_\alpha D^{\alpha}_{ijk}. \tag{6.14}$$

Итак, компоненты тензора D_{ijk} являются коэффициентами уравнения конуса третьего порядка, вдоль образующих которого пучок полей соприкасающихся гиперквадрик (10.2), соответствующий текущей точке M, имеет с поверхностью (1.1) касание третьего порядка. Будем называть тензор D_{ijk} — обобщенным тензором Дарбу, а пучок гиперквадрик (10.2), где коэффициенты подчинены условиям (10.3) — пучком гиперквадрик Дарбу.

3. Выясним теперь связь между построенными геометрическими объектами и некоторыми геометрическими объектами гиперповерхности (см. [1], стр. 354—382).

При $N = n + 1$ компоненты тензора $\overset{*}{W}{}^{\alpha i}_{\beta j}$ — константы

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha i}_{\beta j} = \frac{1}{n+2}\delta^i_j.$$

Тогда из (5.2) следует, что объект третьего порядка $(A^\alpha_{k\beta}, \Lambda^\alpha_{ij})$ является обобщением квазитензора (b_k, a_{ij}), введенного в работе Г. Ф. Лаптева [1].

Тензор (6.1) D^α_{ijk} сводится к обобщенному тензору Дарбу b_{ijk}, а соотношение (6.3) обобщает свойство аполярности тензора D^α_{ijk} обратному фундаментальному объекту второго порядка a^{ij}. Тензоры B_{ij} и B^{ij}, введенные в (6.4) и (6.9), сводятся к двухвалентным тензорам b_{ij} и b^{ij}, а тензор b_α (6.11) является обобщением относительного инварианта b_0 — основного дискриминанта третьего порядка гиперповерхности.

Объект четвертого порядка (8.8) $(A^\alpha_{\beta\gamma}, A^\alpha_{k\beta}, \Lambda^\alpha_{ij})$ является обобщением квазитензора четвертого порядка (l, a_{ij}, b_k). Тензор (6.15) D_{ijk} сводится вместе с тензором D^α_{ijk} к тензору Дарбу b_{ijk}. Пучок (9.11) инвариантно присоединенных к поверхности полей соприкасающихся многообразий совпадает с пучком (10.2) и становится каноническим пучком соприкасающихся гиперквадрик.

Система (10.1′) сводится к уравнению (10.4), которое при $n = 2$, $N = 3$ является уравнением линий Дарбу.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. о-ва, 1953, т. 2, стр. 275—382
2. —, Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 490—493
3. Остиану Н. М., Об инвариантном оснащении многомерной поверхности проективного пространства. Всес. ин-т научн. и техн. информ. АН СССР, М., 1966, 28 стр.

4. Швейкин П. И., Инвариантные построения на m-мерной поверхности в n-мерном аффинном пространстве. Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 5, 811—814
5. —, О нормальных геометрических объектах и их применении к построению геометрии поверхности в аффинном пространстве. Настоящий сборник, стр. 331
6. Weise K., Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affin-geometrie der F_p im A_n. I, II. Math. Z., 1938, **43**, 469—480; **44**, 161—184