Ф. Ф. Воронов, О классе интегральных преобразований, индуцированных морфизмами векторных расслоений, *Матем. заметки*, 1988, том 44, выпуск 6, 735–749

https://www.mathnet.ru/mzm4197

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

О КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ МОРФИЗМАМИ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Ф. Ф. Воронов

Вводится естественный класс интегральных преобразований, содержащий, в частности, s-мерное преобразование Радона и его обобщения на векторные расслоения. Предлагается общий метод обращения всех этих преобразований, основанный на «выходе в суперобласть».

Необходимые конструкции — категория векторных расслоений с четным или нечетным слоем и послойное преобразование Фурье дифференциальных форм — были введены в [1]. Здесь мы кратко повторим их описание.

1. Векторные расслоения и преобразование Фурье. Рассмотрим гладкое векторное расслоение $N \to M$ над базой $M = M^n$ со слоем $\mathbf{R}^m$. Оно задается функциями перехода $v^\mu = v^{\mu'} T^\mu_{\mu'}(x)$ $(\mu = 1, \ldots, m,\ x \in M)$. Вводя в качестве координат в слое антикоммутирующие грассмановы переменные ξ^μ вместо v^μ так, чтобы $\xi^\mu = \xi^{\mu'} T^\mu_{\mu'}(x)$ по-прежнему, получим новое векторное расслоение $N\Pi \to M$ над M с нечетным слоем $\mathbf{R}^{0|m}$, которое задается теми же функциями перехода, что и N. Расслоения N и $N\Pi$ полезно рассматривать параллельно.

Введем следующую категорию. Объекты — гладкие векторные расслоения с четным или нечетным слоем и четной базой, морфизмы — послойно линейные и послойно инъективные отображения. Последнее условие весьма существенно (см. [1]). Ниже мы покажем, что с каждым таким морфизмом естественно связано интегральное преобразование. Заметим, что Π — ковариантный функтор в нашей категории, причем $\Pi^2 = \mathrm{id}$.

Мы хотим обобщить определение интеграла Фурье так, чтобы

а) преобразование Фурье действовало не на функции, а на дифференциальные формы;

б) оно определялось не в $\mathbf{R}^m$, а послойно на пространстве векторного расслоения. Желаемое *преобразование Фурье дифференциальных форм* выглядит так [1]: форме $\omega = \omega(x, v, \mathrm{d}x, \mathrm{d}v)$ на N сопоставляется псевдодифференциальная форма $F\omega = \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(x, \pi, \mathrm{d}x, \mathrm{d}\pi)$ на $N'\Pi$ по формуле

$$\tilde{\omega}(x, \pi, \mathrm{d}x, \mathrm{d}\pi) = \int_{\mathbf{R}^{n|m}} D(v, \mathrm{d}v)\, \mathrm{e}^{-i\mathrm{d}(v^\mu \pi_\mu)} \omega(x, v, \mathrm{d}x, \mathrm{d}v), \tag{1.1}$$

где $D(v, \mathrm{d}v)$ — «элемент интегрирования» Березина по переменным v^μ и dv^μ, а π_μ — координаты в слое $N'\Pi$ (штрих обозначает сопряженное расслоение).

(Здесь мы рассматриваем неоднородные дифференциальные формы как функции от координат x, v и дифференциалов $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}v$, причем переменные $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}v$ нечетны. Аналогично, *псевдодифференциальные формы* на супермногообразии, введенные Бернштейном и Лейтесом,— это произвольные гладкие функции координат (например, x и ξ) и дифференциалов (соответственно $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}\xi$). Важно, что дифференциал $\mathrm{d}\xi$ нечетной переменной ξ четен и зависимость от него не обязана быть полиномиальной. Во всей статье мы предполагаем (псевдо)дифференциальные формы такими, чтобы интегралы сходились,— например, быстроубывающими по v^μ ($\mathrm{d}\xi^\mu$).)

Итак преобразование Фурье превращает дифференциальные формы на тотальном пространстве векторного расслоения в псевдодифференциальные формы на пространстве сопряженного расслоения с противоположной четностью в слое, с необходимостью выводя нас в суперобласть. Аналогично определяется преобразование Фурье псевдодифференциальных форм на тотальном пространстве векторного расслоения с нечетным слоем. Обратное преобразование Фурье отличается от прямого знаком в экспоненте и множителем перед интегралом.

Преобразование Фурье дифференциальных форм обладает различными замечательными свойствами (см. [1]); оно функториально, перестановочно с дифференциалом и интегралом и др. Остановимся на понятии функториальности.

Морфизм расслоений $f\colon N_1 \to N_2$ (или $f\Pi\colon N_1\Pi \to N_2\Pi$) позволяет сносить назад (псевдо)дифференциальные формы. В координатах обратный образ f^* выглядит как подстановка в переменные и их дифференциалы. Послойная инъективность морфизма дает нам возможность определить *обратный образ форм на сопряженном расслоении* [1]. Именно, f разлагается в композицию $N_1 \to f^*N_2 \to N_2$, где первая стрелка есть мономорфизм расслоений над одной базой, а вторая — канонический морфизм (тождественный на слоях). Переход к сопряженным расслоениям переворачивает первую стрелку: $N_1' \leftarrow f^*N_2' \to N_2'$, превращая ее в эпиморфизм (при фиксированной базе). Поэтому форму с N_2' можно поднять на f^*N_2' и затем проинтегрировать по слоям, получая форму на N_1'. Аналогично для $N_1\Pi$ и $N_2\Pi$.

2. Класс интегральных преобразований. Способ обращения. Мы вводим следующий класс интегральных преобразований. Рассмотрим диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ B & & C \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

где A, B, C — тотальные пространства векторных расслоений, p_1, p_2 — послойно линейные отображения, p_1 накрывает некоторое отображение баз и на слоях является изоморфизмом, а p_2, напротив, при фиксированной базе послойный эпиморфизм. Интегральное преобразование

$$I\colon \Omega(B) \to \Omega(C) \tag{2.2}$$

задается композицией поднятия дифференциальных форм вдоль p_1 и послойного интеграла [1]) вдоль p_2.

Пусть x^a $(a = 1, \ldots, n)$ — координаты в базе X расслоения B, y^k $(k = 1, \ldots, N)$ — координаты в базе Y расслоений A и C, v^μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ — координаты в слое расслоений A и B и u^σ $(\sigma = 1, \ldots, m - s)$ — координаты в слое расслоения C. Тогда задаваемое диаграммой (2.1) интегральное преобразование

$$I\colon \omega = \omega(x, v, \mathrm{d}x, \mathrm{d}v) \mapsto \hat{\omega} = \hat{\omega}(y, u, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u)$$

---

1) Полная строгость требует использования форм с некоторыми локальными коэффициентами.

выражается формулой

$$\hat{\omega}(y, u, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u) = \int_{\mathbf{R}^{m|m}} D(v, \mathrm{d}v)\,\delta(u - vQ(y))\,\delta(\mathrm{d}(u - vQ(y)))\,\omega\left(f(y), v, \mathrm{d}y\,\frac{\partial f}{\partial y}, \mathrm{d}v\right). \quad (2.3)$$

Здесь p_1: $(y, v) \mapsto (x = f(y), v)$, p_2: $(y, v) \mapsto (y, vQ(y))$, матрица $Q = (Q_\mu^\sigma(y))$ имеет ранг $m - s$.

Введенные интегральные преобразования в точности совпадают с описанными выше обратными образами дифференциальных форм относительно морфизмов сопряженных расслоений.

В диаграмме (2.1) перейдем к сопряженным расслоениям и обратим четность в слоях. Получим

$$\begin{tikzcd} & A'\Pi \arrow[dl, "p_1"'] \\ B'\Pi & & C'\Pi \arrow[ul, "p_2'"'] \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd} \quad (2.4)$$

Пусть θ_σ $(\sigma = 1, \ldots, m - s)$ — координаты в слое расслоения $C'\Pi$, π_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ — координаты в слое расслоения $B'\Pi$. (Переменные θ и π нечетны.) Морфизм q: $C'\Pi \to B'\Pi$, замыкающий треугольник (2.4), в координатах есть $(y, \theta) \mapsto (x = f(y), \pi = Q(y)\theta)$. На псевдодифференциальных формах он индуцирует обратный образ q^*: $\omega(x, \pi, \mathrm{d}x, \mathrm{d}\pi) \mapsto q^*\omega = (q^*\omega)(y, \theta, \mathrm{d}y, \mathrm{d}\theta)$,

$$(q^*\omega)(y, \theta, \mathrm{d}y, \mathrm{d}\theta) = \omega\left(f(y), Q(y)\theta, \mathrm{d}y\,\frac{\partial F}{\partial y}, \mathrm{d}(Q(y)\theta)\right). \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \Omega(B) \arrow[r, "I"] \arrow[d, leftrightarrow, "F"'] & \Omega(C) \arrow[d, leftrightarrow, "F"] \\ \Omega(B'\Pi) \arrow[r, "q^*"'] & \Omega(C'\Pi) \end{tikzcd}$$

где F — преобразование Фурье, I — интегральное преобразование (2.3), *q^* — подстановка* (2.5), *коммутативна* (*с точностью до знака*).

Доказательство состоит в прямом вычислении:

$$FI\omega = \int_{\mathbf{R}^{m-s|m-s}} D(u, \mathrm{d}u)\,\mathrm{e}^{-i\mathrm{d}(u^\sigma\theta_\sigma)}\hat{\omega}(y, u, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{m-s|m-s}} D(u, \mathrm{d}u) \int_{\mathbf{R}^{m|m}} D(v, \mathrm{d}v)\, \mathrm{e}^{-i\mathrm{d}(u^{\sigma}\theta_{\sigma})} \delta(u - vQ) \cdot$$

$$\cdot \delta(\mathrm{d}(u - vQ))\, \omega\left(f(y), v, \mathrm{d}y \frac{\partial f}{\partial y}, \mathrm{d}v\right) =$$

$$= (-1)^{m(m-s)} \int_{\mathbf{R}^{m|m}} D(v, \mathrm{d}v) \int_{\mathbf{R}^{m-s|m-s}} D(u, \mathrm{d}u)\, \delta(u - vQ) \cdot$$

$$\cdot \delta(\mathrm{d}(u - vQ))\, \mathrm{e}^{-i\mathrm{d}(u^{\sigma}\theta_{\sigma})} \omega\left(f(y), v, \mathrm{d}y \frac{\partial f}{\partial y}, \mathrm{d}v\right) =$$

$$= (-1)^{m(m-s)} \int_{\mathbf{R}^{m|m}} D(v, \mathrm{d}v)\, \mathrm{e}^{-i\mathrm{d}(vQ\theta)} \omega\left(f(y), v, \mathrm{d}y \frac{\partial f}{\partial y}, \mathrm{d}v\right) =$$

$$= (-1)^{m(m-s)} (F\omega)\left(f(y), Q\theta, \mathrm{d}y \frac{\partial f}{\partial y}, \mathrm{d}(Q\theta)\right) =$$

$$= (-1)^{m(m-s)} q^* F\omega. \quad \square$$

Этим доказывается функториальность преобразования Фурье дифференциальных форм [1]). Немедленно получаем

Следствие 2.1. *Задача обращения интегральных преобразований нашего класса равносильна задаче обращения подстановок вида* (2.5).

Рецепт обращения, таким образом, состоит в следующем: берется преобразование Фурье от образа дифференциальной формы при интегральном преобразовании (2.3), находится псевдодифференциальная форма, дающая нужный результат при подстановке (2.5), и от нее берется обратное преобразование Фурье. Этим задача обращения интегрального преобразования сведена к существенно более простой задаче обращения аналитической подстановки.

Заметим, что сама подстановка (2.5) разлагается в композицию подстановки

$$x = f(y), \quad Q = Q(y),$$

зависящей от конкретного морфизма расслоений, и универсальной подстановки

$$\pi_{\mu} = Q_{\mu}{}^{\sigma}\theta_{\sigma},$$

где Q рассматривается как независимая переменная.

3. Примеры.

(а) *Преобразование Радона* в аффинном пространстве $\mathbf{R}^m$. Это интеграл k-формы по всем аффинным s-мерным

[1]) Отметим, что оба обратных образа q^* и I, так же как и преобразование Фурье F, перестановочны с умножением на гладкие функции на базах векторных расслоений, и все используемые объекты можно при необходимости считать локальными по базе.

плоскостям, приводящий к $(k - s)$-форме на пространстве таких плоскостей. Мы рассмотрим этот важнейший пример и его обобщение на векторные расслоения подробно в следующем разделе.

(b) Пусть s-мерная сфера вложена в $\mathbf{R}^m$: $S^s \hookrightarrow \mathbf{R}^{s+1} \hookrightarrow \mathbf{R}^m$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^m \times S^s \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbf{R}^m & & N \end{tikzcd}$$

где p_1 — очевидная проекция, а p_2 — отображение факторизации тривиального расслоения $\mathbf{R}^m \times S^s$ по касательному расслоению TS^s, задает интегральное преоразование нашего класса. Этот пример тесно связан с преобразованием Радона.

(c) Вместо сферы можно рассмотреть произвольное замкнутое подмногообразие $P^s \hookrightarrow \mathbf{R}^m$. Интегральное преобразование, индуцированное диаграммой

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^m \times P^s \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbf{R}^m & & N \end{tikzcd}$$

превращает формы в $\mathbf{R}^m$ в формы на пространстве N нормального расслоения к P^s. Кстати, здесь и в примере (b) $\dim N = m = \dim \mathbf{R}^m$.

(d) Наконец, можно рассмотреть произвольное s-мерное векторное расслоение E над многообразием F^r и мономорфное отображение слоев этого расслоения в $\mathbf{R}^m$. Полагая $H := (\mathbf{R}^m \times F)/E$, получаем обобщение примеров (b), (c):

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^m \times F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbf{R}^m & & H \end{tikzcd}$$

(e) Пусть M — *комплекс* аффинных s-плоскостей в $\mathbf{R}^m$ (см. [2, с. 54]), т. е. m-мерное многообразие плоскостей. Пусть плоскости комплекса задаются уравнениями $v^\mu Q_\mu^\sigma = b^\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, m - s)$, $Q_\mu^\sigma = Q_\mu^\sigma(y)$, где y — параметр на M, $(b^\sigma) \in \mathbf{R}^{m-s}$ — произвольное. Соответствующее интегральное преобразование принадлежит нашему классу, и обращение этого преобразования равносильно обращению подстановки $\pi_\mu = Q_\mu^\sigma(y)\,\theta_\sigma$ в псевдоформу $\omega(\pi, d\pi)$.

(f) Пусть $F(s_1, \ldots, s_k)$ — пространство флагов $\mathbf{R}^{s_1} \subset \subset \ldots \subset \mathbf{R}^{s_k}$ в слоях m-мерного расслоения Λ, $E_{s_j}(s_1, \ldots \ldots, s_j, \ldots, s_k)$ — s_j-мерное каноническое расслоение над $F(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_k)$, $E_{s_{j_1} \setminus s_{j_2}}(s_1, \ldots, s_{j_1}, \ldots, s_{j_2}, \ldots, s_k) = E_{s_{j_2}}(s_1, \ldots, s_k)/E_{s_{j_1}}(s_1, \ldots, s_k)$ — соответствующее факторрасслоение. Естественное двойное расслоение

$$\begin{array}{ccc} & E_{s_j}(s_1, \ldots, s_k) & \\ \swarrow & & \searrow \\ E_{s_j}(s_1, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_k) & & E_{s_i \setminus s_j}(s_1, \ldots, s_k) \end{array}$$

задает интегральное преобразование нашего класса.

Замечание 3.1. Примеры (b), (f) указаны автору А. В. Зоричем.

4. Преобразование Радона. Пусть $G_s(\mathbf{R}^m)$ — многообразие Грассмана s-мерных подпространств векторного пространства $\mathbf{R}^m$, $E_s(\mathbf{R}^m) \to G_s(\mathbf{R}^m)$ — s-мерное каноническое расслоение, являющееся подрасслоением в тривиальном расслоении $\mathbf{R}^m \times G_s(\mathbf{R}^m)$. Обозначим через $H_s(\mathbf{R}^m)$ факторрасслоение по $E_s(\mathbf{R}^m)$.

ЛЕММА 4.1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R}^m \times G_s(\mathbf{R}^m) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbf{R}^m & & H_s(\mathbf{R}^m) \end{array} \qquad (4.1)$$

задает интегральное преобразование, являющееся s-мерным преобразованием Радона.

Доказательство. Действительно, многообразие аффинных s-плоскостей в $\mathbf{R}^m$, рассматриваемом как аффинное пространство, естественно отождествляется с многообразием $H_s(\mathbf{R}^m)$ классов смежности по линейным s-плоскостям в $\mathbf{R}^m$. Каноническое аффинное расслоение над $H_s(\mathbf{R}^m)$, состоящее из пар (точка $\mathbf{R}^m$, содержащая ее аффинная плоскость), естественно отождествляется с $\mathbf{R}^m \times G_s(\mathbf{R}^m)$ сдвигом плоскости в нуль вдоль радиуса-вектора точки. Таким образом, наша диаграмма отождествляется с каноническим двойным расслоением для преобразования Радона. $\square$

Замечание 4.1. До сих пор мы умышленно не пользовались термином «двойное расслоение», имеющим точный смысл (см. [3]), потому что для нас не было существенно, являются ли диаграммы типа (2.1) настоящими двойными расслоениями или нет (см. ниже).

Для векторного расслоения $N \to M$ со слоем $\mathbf{R}^m$ обозначим через $G_s = G_s(N \to M)$ многообразие Грассмана s-плоскостей в слоях расслоения $N \to M$. Каноническое расслоение $E_s = E_s(N \to M)$ является подрасслоением в $N \underset{M}{\times} G_s = p^*N$, где p: $G_s \to M$ — проекция. Пусть $H_s := H_s(N \to M) = p^*N/E_s$. Аналогично лемме получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & N \underset{M}{\times} G_s \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ N & & H_s \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

задает послойное s-мерное преобразование Радона. □

Описание преобразования Радона (и его обобщения на векторные расслоения) посредством диаграмм (4.1), (4.2) возникло в результате обсуждений с А. В. Зоричем.

Применим наш метод к обращению преобразования Радона.

ТЕОРЕМА 4.1. *Следующие две задачи равносильны*:

(a) *нахождение дифференциальной k-формы в $\mathbf{R}^m$ по ее s-мерному преобразованию Радона*;

(b) *нахождение дифференциальной $(m-k)$-формы в $\mathbf{R}^m$ по ее ограничениям на все $(m-s)$-мерные плоскости, проходящие через нуль* [1]).

Доказательство. По теореме 2.1 и лемме 4.1 обращение преобразования Радона равносильно нахождению псевдодифференциальной формы в $\mathbf{R}^{0|m}$ $\tilde{\omega}(\pi, d\pi)$ по результату «универсальной подстановки» $\tilde{\omega}(Q\theta, dQ\cdot\theta + Q\cdot d\theta) = \tilde{\omega}(Q\theta, Q\cdot d\theta) + O(dQ\cdot\theta)$. Преобразование Фурье сохраняет градуировку, поэтому если исходно имелась k-форма $\omega(v, dv)$, то $\tilde{\omega}(\pi, d\pi)$ будет степени $m-k$ по π (см. [1]). Пренебрегая $dQ\cdot\theta$, получаем, что для решения задачи (a) достаточно уметь находить $\tilde{\omega}(\pi, d\pi) = \pi_{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\pi_{\mu_{m-k}}\tilde{\omega}^{\mu_1\ldots\mu_{m-k}}(d\pi)$ по совокупности $\sigma_Q(\theta, d\theta) = (Q\theta)_{\mu_1}\cdot\ldots\cdot(Q\theta)_{\mu_{m-k}}\tilde{\omega}^{\mu_1,\ldots,\mu_{m-k}}(Q\cdot d\theta)$. Интерпретируя θ_σ как «дифференциалы» переменных $d\theta_\sigma$, а π_μ как «дифференциалы» $d\pi_\mu$, приходим к задаче (b). Можно показать, что (b) однозначно разрешима при $m-k+1 \leqslant m-s$, т. е. при $k \geqslant s+1$ (см. ниже). Следовательно,

1) В связи с этим любопытно рассмотреть когомологии симплициальных схем следующего вида: вершины суть плоскости в $\mathbf{R}^m$, проходящие через нуль, а симплексы суть наборы плоскостей, пересекающихся не по нулю. Различные пучки в $\mathbf{R}^m$ (констант функций...) задают системы коэффициентов на таких схемах.

при $k \geqslant s+1$ однозначно разрешима и задача (a), и обе задачи эквивалентны. При $k < s$ преобразование Радона любой k-формы обращается в нуль, так же как и ограничение $(m-k)$-формы на любую $(m-s)$-плоскость. При $k = s$ в ядро преобразования Радона заведомо попадают замкнутые k-формы (по теореме Стокса и обращению в нуль подходящих s-мерных когомологий $\mathbf{R}^m$), поэтому решение задачи (a) возможно лишь с точностью, не большей, чем до замкнутых s-форм. Так как интегральные преобразования перестановочны с дифференциалом и для $(s+1)$-форм задача (a) решается однозначно, для s-форм действительно можно обратить преобразование Радона по модулю замкнутых s-форм. Этим доказаны теорема и

Следствие 4.1. *Ядро s-мерного преобразования Радона равно нулю для k-форм при $k \geqslant s+1$, состоит из всех замкнутых k-форм при $k = s$ и содержит все k-формы при $k < s$.*

Задача (b) при $k \geqslant s+1$ имеет наглядное решение: чтобы найти значение $(m-k)$-формы в точке $P \in \mathbf{R}^m$ на $m-k$ векторах $w_1, \ldots, w_{m-k}$, нужно натянуть $(m-s)$-плоскость на векторы $\overrightarrow{OP}$, $w_1, \ldots, w_{m-k}$ (и, возможно, дополнительные произвольные векторы) и рассмотреть ограничение формы на эту плоскость.

Пример. Рассмотрим простейший случай классического преобразования Радона коразмерности 1 в $\mathbf{R}^m$. Условие инъективности $k \geqslant s+1$ выполнено только для m-форм. Пусть гиперплоскости задаются уравнениями $v^\mu p_\mu = b$. Тогда преобразование Радона формы $\omega = f(v)\, dv^1 \cdot \ldots \cdot dv^m$ будет 1-формой

$$\hat{\omega}(p, b, dp, db) = g(p, b)\, db + g^\mu(p, b)\, dp_\mu.$$

Воспользовавшись теоремой и выполнив прямое и обратное преобразования Фурье (вычислять удобно в сферических координатах), получим формулу обращения в явном виде

$$\omega(v, dv) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}} \cdot dv^1 \cdot \ldots \cdot dv^m \cdot \int_{S^{m-1}} d^{m-1}e \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial b} \right|^{m-1} g(p, b) \right\}_{p:=e,\ b:=vp}, \quad (4.3)$$

где $e \in S^{m-1} \subset (\mathbf{R}^m)'$, а оператор $|\partial/\partial b|^{m-1}$ совпадает с $\partial^{m-1}/\partial b^{m-1}$ при четном $m-1$ и является композицией $\partial^{m-1}/\partial b^{m-1}$ и преобразования Гильберта (интегрального оператора с ядром $(i/\pi)\,\mathscr{P}\,1/(b-b'))$ при нечетном $m-1$. Заметим, что коэффициенты формы $\hat{\omega}$ — g и g^{μ} — не независимы и в формулу обращения (4.3) явно входит лишь g.

5. Обращение других интегральных преобразований. Вернемся к произвольным интегральным преобразованиям. По теореме 2.1 *морфизм морфизмов* векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} C_1' & \to & B_1' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_2' & \to & B_2' \end{array}$$

индуцирует отображение интегральных преобразований

$$\begin{array}{ccc} \Omega(B_1) & \to & \Omega(C_1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega(B_2) & \to & \Omega(C_2) \end{array}$$

Фиксируем расслоение B с базой X и число s. Пусть $H_s = H_s(B\to X)$, $E_s^{\perp} := H_s'$. Будем рассматривать полную подкатегорию в категории морфизмов векторных расслоений, содержащую в качестве объектов лишь морфизмы вида $C'\to B'$, где $\operatorname{rank} B' - \operatorname{rank} C' = s$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Морфизм $E_s^{\perp}\to B'$, соответствующий s-мерному послойному преобразованию Радона, является универсальным притягивающим объектом в такой подкатегории.*

Доказательство. Заметим, что $E_s^{\perp}(B\to X) = E_{m-s}(B'\to X)$, если $\operatorname{rank} B = m$. Достаточно применить ковариантный функтор E_{m-s} к морфизму $C'\to B'$. $\square$

В координатах преобразованию Радона отвечает универсальная подстановка $\pi_\mu = Q_\mu^\sigma \theta_\sigma$; допуская вольность речи, мы будем называть универсальным (отталкивающим, двойственно к морфизму) само преобразование Радона.

Следствие 5.1. *Ядро любого интегрального преобразования $\Omega(B)\to\Omega(C)$ не меньше ядра преобразования Радона.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Omega(B) & \to & \Omega(H_s) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Omega(C) \end{array} \quad \square$$

Выясним, когда же может возникнуть «лишнее ядро». Во-первых, если в диаграмме (2.1) образ Y не всюду плотен в X, то легко найти ненулевую форму произвольной степени, попадающую в $\operatorname{Ker} p_1^* \subset \operatorname{Ker} I$. Поэтому размерность базы A должна быть не меньше, чем размерность базы B, чтобы лишнего ядра не возникало. Можно дать и более точную оценку.

ЛЕММА 5.1. *Пусть* $\dim X = n$. *Если* $\dim Y < n + s$, *то преобразование* I *имеет лишнее ядро на формах любой степени.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $C'\Pi \to B'\Pi$. Размерности этих супермногообразий: $\dim C'\Pi = \dim Y \mid m - s$, $\dim B'\Pi = n \mid m$. Пусть для супермногообразия M через $\widehat{M}$ обозначается супермногообразие с кольцом функций $\Omega(M)$. Тогда обратный образ псевдодифференциальных форм $\Omega(B'\Pi) \to \Omega(C'\Pi)$ совпадает с обратным образом функций относительно $\widehat{C'\Pi} \to \widehat{B'\Pi}$. Так как $\dim \widehat{C'\Pi} = \dim Y + m - s \mid \dim Y + m - s$, $\dim \widehat{B'\Pi} = n + m \mid n + m$, то по теореме Сарда образ подложки $\widehat{C'\Pi}$ неплотен в подложке $\widehat{B'\Pi}$, если $\dim Y - s < n$. В этом случае можно построить псевдодифференциальную форму произвольной *степени* (см. [1]), обратный образ которой исчезает. $\square$

Пусть p_1 — субмерсия на базах. Как заметил А. В. Зорич, в этом случае интегральное преобразование становится послойным, и достаточно рассмотреть диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R}^m \times F & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbf{R}^m & & H \end{array} \tag{5.1}$$

т. е. как в примере 3(d), где F — слой субмерсии $Y \to X$, а $E = \operatorname{Ker}(A \to C)|_F$. Среди таких интегральных преобразований универсальным будет s-мерное преобразование Радона в $\mathbf{R}^m$.

Укажем здесь связи с понятием двойного расслоения в смысле [3]. Диаграмма (2.1) является *двойным расслоением* (в смысле [3]), если p_1 и p_2 суть расслоения, а оба отображения $B \ni b \mapsto C_b = p_2(p_1^{-1}b) \subset C$ и $C \ni c \mapsto B_c = p_1(p_2^{-1}c) \subset B$ инъективны. В наших рассмотрениях (на самом деле также и в [2, 3], в отличие от [4]) левая и правая вершины диаграммы не равноправны. Можно показать, что условие инъективности отображения $c \mapsto B_c$ не выполняется в примерах типа 3(b), но это не влияет на существование формулы обращения. Оставим в определении лишь условие инъективности $b \mapsto C_b$. Достаточно проверять его послойно, для диаграммы (5.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (А. В. Зорич). *Если класс Эйлера расслоения $E \to F$ отличен от нуля, то диаграмма* (5.1) — *двойное расслоение.*

Доказательство. Рассмотрим $v \in \mathbf{R}^m$. $H_v = p_2(p_1^{-1}v)$ — это множество смежных классов $v \bmod E_t$, $t \in F$. Инъективность нарушается, если для некоторого $v \neq 0$ классы $v \bmod E_t$ одновременно обращаются в нуль, т. е. $v \in \bigcap E_t \subset \mathbf{R}^m$. Отсюда следует существование тривиального одномерного подрасслоения в E и обращение в нуль класса Эйлера [1]). $\square$

Пользуясь теоремой Сарда, как в лемме 5.1, можно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если диаграмма* (5.1) *не является двойным расслоением, то соответствующее интегральное преобразование имеет лишнее ядро на формах любой степени.* $\square$

По лемме 5.1, чтобы задаваемое (5.1) интегральное преобразование не имело лишнего ядра, необходимо неравенство $\dim F \geqslant s$. В этом случае $\dim H \geqslant m$. Для преобразования Радона $\dim H = \dim H_s = (s+1)(m-s) > m$ при $s < m-1$. Ясно, что избыточные размерности несут избыточную информацию. Поэтому возникает задача построить наряду с универсальным (отталкивающим) преобразованием Радона «минимальное» (притягивающее) преобразование с тем же ядром, но $\dim F = s$, $\dim H = m$. Оно строится модификацией примера 3(b).

Рассмотрим стандартное вложение $S^s \hookrightarrow \mathbf{R}^{s+1}$ и вложение $\mathbf{R}^{s+1} \hookrightarrow \mathbf{R}^m$ как координатной плоскости $v^{s+2} = 0, \ldots$

ЛЕММА 5.2. *Диаграмма* 3(b) *задает интегральное преобразование, совпадающее с классическим* (*коразмерности* 1) *преобразованием Радона по переменным* $v^1, \ldots, v^{s+1}, \mathrm{d}v^1, \ldots, \mathrm{d}v^{s+1}$.

Доказательство получается сравнением явных формул. $\square$

Рассуждая аналогично теореме 4.1, заключаем, что по образу такого интегрального преобразования можно восстановить компоненты $\omega_{1\ldots s+1\mu_1\ldots\mu_l}(v)$ $(s+l+1)$-формы $\omega(v, \mathrm{d}v)$. Будем задавать аффинные s-плоскости уравнениями $v^\mu Q^\sigma_\mu = b^\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, m-s$. В настоящем примере уравнения суть $v^1 p_1 + \ldots + v^{s+1} p_{s+1} = b$,

[1]) Как препятствия.

$v^{s+2}=v'^{s+2}, \ldots, v^m=v'^m$, т. е.

$$Q=\begin{array}{c|c|c|l} \multicolumn{3}{c}{} & \\ \cline{2-3} & p & 0 & s+1 \\ \cline{2-3} & 0 & 1 & m-s-1 \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{m-s-1} & \end{array}, \qquad (b^\sigma)=\begin{array}{|c|c|} \hline b & v'_{\text{посл}} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{m-s-1} \end{array},$$

где $v_{\text{посл}}=(v^{s+1}, \ldots, v^m)$, $v_{\text{перв}}=(v^1, \ldots, v^{s+1})$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть* $\hat{\omega}\,(Q, b, \mathrm{d}Q, \mathrm{d}b)$ — *значение универсального преобразования. Тогда компоненты* $(s+1+l)$-*формы* ω *даются явными формулами*

$$\omega_{1\ldots s+1\mu_1\ldots\mu_l}(v)\,\mathrm{d}v^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}v^{\mu_l}=(-1)^{s+l+sl}\frac{l!}{(s+l+1)!}\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^s}\cdot$$

$$\cdot\int_{S^s\times\mathbf{R}^{0|1}} D(e, \mathrm{d}b)\left\{\left|\frac{\partial}{\partial b}\right|^s\hat{\omega}\left(\left|\begin{array}{c|c} p & 0 \\ \hline 0 & 1\end{array}\right|, \left|\begin{array}{c|c} b & v_{\text{посл}}\end{array}\right|,\right.\right.$$

$$\left.\left.0, \left|\begin{array}{c|c}\mathrm{d}b & \mathrm{d}v_{\text{посл}}\end{array}\right|\right)\right\}_{p:=e,\ b:=v_{\text{перв}}p}\cdot\ \square \quad (5.2)$$

Чтобы получить другие составляющие формы ω, нужно взять другое вложение $\mathbf{R}^{s+1}\hookrightarrow\mathbf{R}^m$. Искомое «минимальное» преобразование $\Omega(\mathbf{R}^m)\to\Omega(N)$ индуцируется вложением дизъюнктной суммы $\bigsqcup S^s_{(k)}$, $k=1, \ldots, \binom{m}{s+1}$, в $\mathbf{R}^m$, где различные члены суммы вкладываются в различные координатные $(s+1)$-плоскости. Рассматривая отображения в минимальное других интегральных преобразований, получаем для них формулы обращения.

6. Замечания. 1. Преобразование Радона в аффинном пространстве $\mathbf{R}^m$ рассматривалось И. М. Гельфандом, С. Г. Гиндикиным, М. И. Граевым и З. Я. Шапиро (см. [2]). Ими отмечена его роль как «модельной задачи» для интегральных преобразований, связанных с комплексами плоскостей [2, с. 55]. Формулы обращения преобразования Радона для дифференциальных форм при *четном* s были построены в [2, с. 131—215] сведением к соответствующей задаче для функций, см. [2, с. 58—129].

2. Коснемся кратко интегральных преобразований функций. Вообще говоря, само определение таких преобразований, в отличие от случая дифференциальных форм, требует фиксации меры в слоях двойного расслоения, поэтому обычно они рассматриваются в контексте однородных пространств или римановой геометрии, где такая мера однозначно определена, см. [4]. Однако в важном частном случае *линейной* интегральной геометрии [2] естественная мера определена с точностью до числового множителя. Поэтому можно говорить, например, о преобразовании Радона функций в аффинном пространстве $\mathbf{R}^m$, и образом его будут сечения одномерного расслоения над $H_s(\mathbf{R}^m)$ (расслоения «аффинных мер» $p^* \mid \Lambda^s E_s' \mid$, $p: H_s(\mathbf{R}^m) \to G_s(\mathbf{R}^m)$). С нашей функториальной точки зрения желательно, чтобы образ при интегральном преобразовании объекта некой природы был объектом той же природы. Этого можно добиться, перейдя от функций к подходящим плотностям (интегральное преобразование по существу не изменится, а лишь «уравновесится» множителем). Точнее, рассмотрим ту же категорию векторных расслоений, что и в основном тексте статьи. Пусть для векторного расслоения $p: N \to M$ через $D(N)$ обозначено пространство *послойных плотностей* веса 1: $D(N) = \Gamma(N; p^* \mid \Lambda^m N' \mid)$, где m — ранг N. Элементы $D(N)$ имеют вид $f(x, v)\, Dv$. *Послойное преобразований Фурье* функции $f(x, v)$ на N — это послойная плотность $F(f) = g(x, p) \cdot Dp$ на N', $g(x, p)\, Dp := \left(\int_{\mathbf{R}^m} e^{-iv \cdot p} f(x, v)\, Dv\right) Dp$; таким образом, F: $C^\infty(N) \to D(N')$ и обратно. Если $q: N_1 \to N_2$, $q: (x_1, v_1) \mapsto (x_2(x_1), v_1 Q(x_1))$, — морфизм векторных расслоений, то наряду с обычным поднятием функций $q^*: C^\infty(N_2) \to C^\infty(N_1)$ можно определить *поднятие* послойных плотностей на сопряженном расслоении $q^*: D(N_2') \to D(N_1')$ интегральной формулой

$$q^*: f(x_2, p_2)\, Dp_2 \mapsto g(x_1, p_1)\, Dp_1,\ g(x_1, p_1) := \\ = \int_{\mathbf{R}^{m_2}} \delta(p_1 - Q(x_1)\, p_2) \cdot f(x_2(x_1), p_2)\, Dp_2$$

(сравните пп. 1, 2). Преобразование Фурье F и поднятие q^* можно определить и не прибегая к координатам. Справедлива теорема, аналогичная теореме 2.1: *послойное преобразование Фурье задает изоморфизм функторов* $: C^\infty(N) \to D(N')$. Таким образом, мы видим, что интегральные преобразования функций можно изучать методами настоящей работы. По сравнению со случаем дифференциальных форм упрощение состоит в том, что уже не требуется привлекать понятия суперматематики. Имеют место аналоги утверждений пп. 3—5. В частности, рассматривая «минимальное преобразование» (пример 3(b)) при четных s, получаем формулу обращения Гельфанда — Гиндикина — Граева — Шапиро (см. [2])

для s-мерного преобразования Радона функций в $\mathbf{R}^m$ (в конкретной реализации эйлерова цикла гауссовым отображением сферы). В заключение отметим, что связь интеграла Фурье с классическим преобразованием Радона функций хорошо известна [4, с. 30] и эксплуатируется в интегральной геометрии. Принятый нами подход позволяет трактовать ее в более широком контексте не как некое формульное тождество, а как выражение функториальности преобразования Фурье.

Автор благодарит С. П. Новикова за интерес к работе и постоянную поддержку, А. В. Зорича за дружеское обсуждение.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.03.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Воронов Ф. Ф., Зорич А. В. Интегрирование на векторных расслоениях // Функцион. анализ и его прил.— 1988.— Т. 22, вып. 2. С. 14—25.
[2] Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // Соврем. проблемы математ.— Т. 16 / М.: ВИНИТИ, 1980.— С. 53—226.
[3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. Дифференциальные формы и интегральная геометрия // Функцион. анализ и его прил. 1967. Т. 3, вып. 2. С. 24—40.
[4] Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.