УДК 517.946

Р. Г. Шакиров

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$[\partial^2/\partial x^2 + \operatorname{sgn}(xy)\,\partial^2/\partial y^2]\,(\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2)\,u = 0. \tag{1}$$

Пусть Ω — прямоугольник, ограниченный отрезками характеристик AB: $x+y=1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, BC: $y-x=1$, CD: $x+y=0$, AD: $x-y=1$ уравнения (1), OO' — отрезок прямой $y-x=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y<0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{x<0\}$, $\Omega_3 = \Omega \cap \{x>0,\ y>0\}$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти функцию

$$u(x,\ y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega} \setminus OO') \cap C^3[(\Omega \cup AB) \setminus OO'],$$

удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_3 \setminus OO')$ и граничным условиям

$$\partial u/\partial n\,|_{DA} = \psi_{01}(x),\ 1/2 \leqslant x \leqslant 1,\ \ \partial u/\partial n\,|_{CB} = \psi_{02}(y),\ \ 1/2 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$\partial^2 u/\partial n^2\,|_{BA} = \varphi_0(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ u\,|_{CB} = \psi_3(y),\ \ 1/2 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$u\,|_{OC} = \psi_4(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1/2,\ \ u\,|_{OD} = \psi_5(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

где n — внешняя нормаль. Будем предполагать, что

$$\psi_{01}(x) = (1/2 - x)^{2+\varepsilon}(1-x)^{2+\varepsilon}\,\psi_{11}(x),\ \ 1/2 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\psi_{02}(y) = (1/2 - y)^{2+\varepsilon}(1-y)^{2+\varepsilon}\,\psi_{12}(y),\ \ 1/2 \leqslant y \leqslant 1,\ \ 0 < \varepsilon < 1,$$

где ψ'_{11}, $\psi'_{12} \in H[0,\ 1]$, а функции ψ_3, ψ_4, ψ_5 — трижды непрерывно дифференцируемы. При этом $\psi'_{01}(1) = \psi'_{02}(1) = 0$, $\psi_3(1/2) = \psi_4(1/2)$, $\psi_4(0) = \psi_5(0)$. Кроме того допускается, что частные производные 3-го порядка функции $u(x,\ y)$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы вблизи точек O, A, B.

Замена $v(x,\ y) = u_{xx} - u_{yy}$ дает следующую задачу.

Задача 2. Найти функцию $v(x,\ y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AB)$, удовлетворяющую уравнению

$$v_{xx} + \operatorname{sgn}(xy)\,v_{yy} = 0 \tag{2}$$

в $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ и граничным условиям

$$v\,|_{DA} = \sqrt{2}\,\psi'_{01}(x) = \psi_{21}(x),\ \ 1/2 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$v\,|_{CB} = -\sqrt{2}\,\psi'_{02}(y) = \psi_{22}(y),\ \ 1/2 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$\partial v/\partial n\,|_{BA} = \sqrt{2}\,\varphi_0(x) = \varphi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3}$$

Кроме того допускается, что частные производные v_x, v_y вблизи точек O, A, B могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.

Отметим, что аналогичная задача для уравнения Лаврентьева — Бицадзе рассматривалась в [1] и [2].

Как и в работе [1] ограничимся случаем $\varphi(x)=0$.

При решении задачи 2 методом интегральных уравнений основную роль играет функция Грина задачи Неймана, которую можно определить согласно [2] следующим образом.

Определение. Функцией Грина задачи Неймана для уравнения (2) в области Ω_3 называется функция $G(z, \zeta)$ двух точек $z\in\overline{\Omega}_3$, $\zeta\in\Omega_3$, обладающая свойствами:

1) $\forall\zeta\in\Omega_3$ она представима в виде

$$G(z, \zeta)=-(2\pi)^{-1}\ln|z-\zeta|+g(z, \zeta),$$

где функция $g(z, \zeta)$ по переменной z принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega}_3)$ и гармоническая в $\overline{\Omega}_3$,

2) $\forall\zeta\in\Omega_3$ удовлетворяет граничному условию по z

$$\partial G(z, \zeta)/\partial n\,|\,\partial\Omega_3=h(z),$$

где $h(z)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, для которой

$$\int\limits_{\partial\Omega_3} h(z)\,ds_z=-1.$$

Приведем одну теорему, которая доказывается аналогично теореме 2 в [2].

Теорема. *Пусть Ω' — область, расположенная симметрично Ω_3 относительно отрезка OB, $\Omega''=\Omega_3\cup\Omega'\cup OB$, Ω''' — область, расположенная симметрично Ω'' относительно отрезка $(-1,\ 1)$ вещественной оси, $\Omega^*=\Omega''\cup\Omega'''\cup(-1,\ 1)$. Пусть функция $\beta=\omega(\zeta)$ конформно отражает Ω^* на круг $|\beta|<1$, причем так, что отрезки OA, OB преобразуются в себя* и $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$, $\omega(i)=i$. *Тогда функция Грина задачи Неймана в области Ω_3 имеет вид*

$$G(z, \zeta)=G^*[\omega(z),\ \omega(\zeta)]+G^*[\overline{\omega(z)},\ \omega(\zeta)]+$$
$$+G^*[-\omega(z),\ \omega(\zeta)]+G^*[\overline{-\omega(z)},\ \omega(\zeta)], \tag{4}$$

где G^* — функция Грина задачи Неймана в единичном круге $|z|<1$, которая определяется формулой

$$G^*(z, \zeta)=-(2\pi)^{-1}\ln|\zeta-z|\,|1-\bar{z}\zeta|.$$

Заметим, что функция $\beta=\omega(\zeta)$ найдена в работе [3].

Пусть $v(x, y)$ — решение задачи 2. Обозначим

$$v(x,\ 0)=\tau_1(x),\quad v(0,\ y)=\tau_2(y),$$

$$\left.\begin{aligned} \partial v(x,\ 0)/\partial n &= -\partial v(x,\ 0)/\partial y = -\nu_1(x), \\ \partial v(0,\ y)/\partial n &= -\partial v(0,\ y)/\partial x = -\nu_2(y) \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Рассматривая функцию $v(x,\ y)$ в области Ω_3 как решение задачи Неймана с граничными условиями (3), (5), представим ее по формуле (9) работы [2], где G определяется соотношением (4), а постоянная находится из условия $v(0,\ 0)=0$. После этого находим, что

$$\tau_1(x) = q(x) + c_1,\ \ 0 < x < 1,\ \ \tau_2(y) = q(iy) + c_2,\ \ 0 < y < 1, \qquad (6)$$

$$q(z) = -\int_0^1 G(z,\ \xi)\,\nu_1(\xi)\,d\xi - \int_0^1 G(z,\ i\eta)\,\nu_2(\eta)\,d\eta.$$

Основные соотношения между τ_1 и ν_1, τ_2 и ν_2, перенесенные из областей Ω_1 и Ω_2, имеют вид соответственно

$$\left.\begin{aligned} \tau_1'(x) + \nu_1(x) &= 2\psi_{21}'[(x+1)/2] = \psi_1(x),\ 0 < x < 1, \\ \tau_2'(y) + \nu_2(y) &= 2\psi_{22}'[(y+1)/2] = \psi_2(y),\ \ 0 < y < 1. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Пусть $\beta=\omega(\zeta)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы, $\lambda(\beta)=\omega^{-1}(\xi)$. Произведя в сооотношениях (6), (7) взаимно однозначную и непрерывную замену переменных [4] $x=\lambda(\alpha_1)$, $y=-i\lambda(i\alpha_2)$, $\xi=\lambda(\beta_1)$, $\eta=-i\lambda(i\beta_2)$, согласно (4) получим

$$T_k'(\alpha_k) + N_k(\alpha_k) = f_k(\alpha_k), \qquad (8)$$

$$T_k(\alpha_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln|\beta_k^2 - \alpha_k^2|\,|1 - \alpha_k^2\beta_k^2|\,N_k(\beta_k)\,d\beta_k +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln|\beta_j^2 + \alpha_k^2|\,|1 + \alpha_k^2\beta_j^2|\,N_j(\beta_j)\,d\beta_j + c_k, \qquad (9)$$

$$0 < \alpha_k < 1,\ \ k,\ j = 1,\ 2,\ \ k \neq j,$$

где приняты обозначения

$$\left.\begin{aligned} &T_1(\alpha_1) = \tau_1[\lambda(\alpha_1)],\ \ T_2(\alpha_2) = \tau_2[-i\lambda(i\alpha_2)], \\ &N_1(\alpha_1) = \nu_1[\lambda(\alpha_1)]\,\lambda'(\alpha_1),\ N_2(\alpha_2) = \nu_2[-i\lambda(i\alpha_2)]\,\lambda'(i\alpha_2), \\ &f_1(\alpha_1) = \psi_1[\lambda(\alpha_1)]\,\lambda'(\alpha_1),\ f_2(\alpha_2) = \psi_2[-i\lambda(i\alpha_2)]\,\lambda'(i\alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Исключая $T_1(\alpha_1)$ и $T_2(\alpha_2)$ из соотношений (8), (9), будем иметь

$$N_k(\alpha_k) - \frac{2\alpha_k}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} + \frac{\beta_k^2}{1 - \alpha_k^2\beta_k^2}\right) N_k(\beta_k)\,d\beta_k +$$

$$+ \frac{2\alpha_k}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\beta_j^2 + \alpha_k^2} + \frac{\beta_j^2}{1 + \alpha_k^2\beta_j^2}\right) N_j(\beta_j)\,d\beta_j = f_k(\alpha_k), \qquad (11)$$

$$0 < \alpha_k < 1, \quad k, j = 1, 2, \quad k \neq j.$$

Из (10) следует, что $f_1, f_2 \in H[0, 1]$, $f_1', f_2' \in H^*[0, 1]$.

Поступая аналогичным образом, как и в работе [5], решение системы (11) найдем, решив следующую задачу.

Определить голоморфную в четверти круга $|\alpha| < 1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Im} \alpha > 0$ функцию $F(\alpha) = U(\alpha_1, \alpha_2) + iv(\alpha_1, \alpha_2)$, непрерывную вплоть до границы, удовлетворяющую условиям

$$\partial U / \partial n |\gamma = 0, \quad v(0, 0) = 0 \tag{12}$$

и (8), где $\gamma : |\alpha| = 1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Im} \alpha > 0$,

$$T_1'(\alpha_1) = U_{\alpha_1}(\alpha_1, 0), \quad T_2'(\alpha_2) = U_{\alpha_2}(0, \alpha_2),$$

$$N_1(\alpha_1) = U_{\alpha_2}(\alpha_1, 0), \quad N_2(\alpha_2) = U_{\alpha_1}(0, \alpha_2).$$

Для решения этой задачи применим принцип симметрии. Учитывая условия Коши — Римана, из (12) получим $v|\gamma = 0$. Тогда заключаем, что функция $F(\alpha)$ аналитически продолжается через γ на квадрант $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Im} \alpha > 0$, причем

$$\left.\begin{aligned} U_{\alpha_1}(\alpha_1, 0) - U_{\alpha_2}(\alpha_1, 0) &= -\alpha_1^{-2} f_1(1/\alpha_1), \quad 1 < \alpha_1 < \infty, \\ U_{\alpha_2}(0, \alpha_2) - U_{\alpha_1}(0, \alpha_2) &= -\alpha_2^{-2} f_2(1/\alpha_2), \quad 1 < \alpha_2 < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Итак, пришли к задаче:

В квадранте $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Im} \alpha > 0$ определить аналитическую функцию $F(\alpha)$ по условиям (8) и (13).

Обозначая $\Phi(\alpha) = (1 + i) F'(\alpha)$, производя конформное отображение $w = \alpha^2$, получим следующую задачу.

В полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ определить функцию $\Psi(w) = \Phi(\sqrt{w})$ по условию на вещественной оси

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = f_1(\sqrt{t}), \ 0 < t < 1, \ \operatorname{Im} \Psi(t) = -t^{-1} f_1(1/\sqrt{t}), \ 1 < t < \infty,$$

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = f_2(\sqrt{-t}), \ -1 < t < 0, \ \operatorname{Im} \Psi(t) = -t^{-1} f_2(1/\sqrt{-t}),$$

$$-\infty < t < -1.$$

Представим функцию $\Psi_1(w) = \theta(w) \Psi(w)$ (где $\theta(w) = 1/\sqrt{1 - w^2}$, $\theta(t) > 0$, $-1 < t < 1$) при помощи интеграла Шварца. Затем произведем обычные преобразования и вернемся к функции $F'(\alpha)$. Будем иметь

$$F'(\alpha) = -I_1(\tau, \alpha) + I_2(\tau, \alpha),$$

$$I_k(\tau, \alpha) = \frac{1+i}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\alpha^4}{1-\tau^4}} \frac{\tau f_k(\tau)\, d\tau}{\tau^2 + (-1)^k \alpha^2} + \frac{1+i}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\alpha^4}{1-\tau^4}} \frac{\tau^3 f_k(\tau)\, d\tau}{1 + (-1)^k \tau^2 \alpha^2},$$

$$k = 1, 2.$$

Откуда

$$N_1(\alpha_1) = U_{\alpha_2}(\alpha_1, 0) = -\operatorname{Im}[F'(\alpha_1)]^+,$$

$$N_2(\alpha_2) = U_{\alpha_1}(0, \alpha_2) = \operatorname{Re}[F'(i\alpha_2)]^+,$$

$$N_k(\alpha_k) = \frac{1}{2} f_k(\alpha_k) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau p(\alpha_k, \tau) f_k(\tau)\, d\tau}{\tau^2 - \alpha_k^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau^3 p(\alpha_k, \tau) f_k(\tau)\, d\tau}{1 - \tau^2\alpha_k^2} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau p(\alpha_k, \tau) f_j(\tau)\, d\tau}{\tau^2 + \alpha_k^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau^3 p(\alpha_k, \tau) f_j(\tau)\, d\tau}{1 + \tau^2\alpha_k^2},$$

$$p(\alpha_k, \tau) = \sqrt{\frac{1 - \alpha_k^4}{1 - \tau^4}}, \quad k, j = 1, 2, \ k \neq j.$$

Используя формулу дифференцирования интеграла типа Коши [6], можно убедиться, что $N_1'(\alpha_1)$, $N_2'(\alpha_2) \in H[0, 1]$.

Из (10) найдем $\nu_1(x) = N_1[w(x)]\, w'(x)$, $0 < x < 1$,

$$\nu_2(y) = N_2[iw(iy)]\, w'(iy), \quad 0 < y < 1.$$

Откуда следует, что $\nu_1(x)$, $\nu_2(y) \in H(0, 1)$.

Далее из (8) можно найти $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$. После этого решение $v(x, y)$ задачи 2 находится в Ω_3 как решение задачи Неймана, а в Ω_1 и Ω_2 — как решение задачи Коши.

Наконец, поступая так же, как и в работе [3], находим решение $u(x, y)$ задачи 1.

Замечание. Очевидно, что указанный метод решения задачи 2 применим и в случае, когда отрезок AB заменяется произвольной простой дугой Ляпунова σ, при этом основная трудность состоит в изучении поведения функции $\beta = w(\zeta)$ в точках $\zeta = 1, i$. В частности, если σ оканчивается сколь угодно малыми дужками окружности $|\zeta| = 1$, то $w(\zeta)$ аналитична в окрестности этих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных.— М.: Наука, 1981.— 448 с.
2. Крикунов Ю. М. Обобщенная функция Грина задачи Неймана и задача T_3 для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. (Этот сборник.)
3. Шакиров Р. Г. Об одной краевой задаче для уравнения 4-го порядка смешанно-составного типа с двумя линиями вырождения.— Казань, 1982.—18 с.— Рукопись представлена Казан. ун-том, Деп. в ВИНИТИ, № 2879—82.
4. Крикунов Ю. М. Об одной краевой задаче для уравнения $u_{xx} + \operatorname{Syn}(xy)\, u_{yy} = 0$.— Труды семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974, вып. 11, с. 100—106.
5. Бицадзе А. В. Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений.— Успехи математических наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77), с. 185—190.
6. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций.— В кн.: Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань, 1962, с. 17—24.

Доложено на семинаре 30 января 1984 года.