М. Абдижалилов, В. Г. Яхно, Двумерная обратная динамическая задача для системы уравнений Максвелла, *Сиб. матем. журн.*, 1992, том 33, номер 3, 7–20

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Т. 33, № 3 МАЙ — ИЮНЬ 1992

УДК 517.956

М. АБДИЖАЛИЛОВ, В. Г. ЯХНО

# ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Настоящая работа посвящена задаче определения функций диэлектрической, магнитной проницаемости и функции проводимости, входящих в систему уравнений Максвелла. Информацией для решения задачи служат интегральные характеристики от некоторых компонент фундаментального решения. Предполагается, что указанные функции неизвестны в некоторой заданной области и принимают известные постоянные значения вне этой области. Такого сорта постановки обратных задач впервые начали изучаться М. М. Лаврентьевым [1]. В. Г. Романов [2, 3] рассмотрел и исследовал вопросы единственности решения многомерных обратных задач для скалярных гиперболических уравнений в лучевых постановках. Исследование лучевых постановок для системы динамических уравнений теории упругости содержится в работах [4, 5]. Настоящая работа продолжает исследование цитируемых выше.

## 1. Основные понятия, постановка обратной задачи и схема ее решения

Рассмотрим систему уравнений Максвелла при $x\in\mathbf{R}^3$, $t\in\mathbf{R}$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} H &= \varepsilon\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\sigma E\right)+j,\\ \operatorname{rot} E &= -\mu\frac{\partial H}{\partial t},\end{aligned}\tag{1}$$

со следующими условиями:

$$H|_{t<0}=0,\quad E|_{t<0}=0.\tag{2}$$

Здесь $E=(E_1, E_2, E_3)$, $H=(H_1, H_2, H_3)$ — напряженности электрического и магнитного полей; $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ — функции диэлектрической и магнитной проницаемости среды; $\sigma(x)$ — функция проводимости среды; $j=(j_1, j_2, j_3)$ — плотность внешнего электрического тока $j=j^0\delta(x-x^0)\delta(t)$, $j^0=\operatorname{colon}(1, 0, 0)$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Рассмотрим риманову метрику, в которой элемент длины вычисляется по формуле

$$d\tau=\left(\varepsilon(x)\mu(x)\sum_{i=1}^{3}dx_i^2\right)^{1/2},\quad x=(x_1, x_2, x_3).\tag{3}$$

Далее предполагается, что геодезические этой метрики регулярны в $\mathbf{R}^3$ в следующем смысле: любую пару точек $x\in\mathbf{R}^3$, $x^0\in\mathbf{R}^3$ можно соединить единственной геодезической $\mathscr{T}(x, x^0)$. Обозначим через $\tau(x, x^0)$ длину метрики (3) $\mathscr{T}(x, x^0)$, через $S(x, t, x^0)$ — риманов эллипсоид, $S(x, t, x^0)=\{\xi\colon \tau(x, \xi)+\tau(\xi, x^0)=t\}$. Очевидно, что $S(x, \tau(x, x^0), x^0)=\mathscr{T}(x, x^0)$ и $S(x, t, x^0)=\varnothing$ для $t<\tau(x, x^0)$. Пусть $D\subset\mathbf{R}^2$ — открытая односвязная ограниченная область с границей класса $C^r$, $D'$ — замкнутое компактное в $\mathbf{R}\times D$ множество, $G'$ — замкнутое множество точки $(x, t, x^0)$ такое, что $x\in D'$, $t>\tau(x, x^0)$, $S(x, t, x^0)\subset D'$, $G'(x^0)$ — сечение множества $G'$ плоскостями $x^0=\mathrm{const}$. Обозначим через $\theta_0(t)$ функцию Хевисайда $\theta_k(t)=\frac{t^k}{k!}\theta_0(t)$, $\theta_{-k}(t)=\frac{d^k}{dt^k}\theta_0(t)$, $k=1,2,3,\ldots$

В работе [6] доказана

**Теорема 1.** *Пусть* $\varepsilon$, $\mu\in C^2(\mathbf{R}^3)\cap C^r(\mathbf{R}\times D)$, $\sigma\in C^{r-1}(\mathbf{R}\times D)$, $r\geqslant 2s+21$, $s\geqslant 0$. *Тогда решение задачи* (1), (2) *представимо в виде*

$$H(x,t,x^0)=\theta_0(t)\left[\sum_{k=-2}^{s} a^k(x,t,x^0)\,\theta_k(t^2-\tau^2(x,x^0))+\right.$$

$$\left.+\int_0^t b^k(x,z,x^0)\,\theta_k((t-z)^2-\tau^2(x,x^0))\,dz\right]+H^s(x,t,x^0), \tag{4}$$

$$E(x,t,x^0)=\theta_0(t)\left[\sum_{k=-2}^{s} c^k(x,t,x^0)\,\theta_k(t^2-\tau^2(x,x^0))+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=-3}^{s-1}\int_0^t d^k(x,z,x^0)\,\theta_k((t-z)^2-\tau^2(x,x^0))\,dz\right]+E^s(x,t,x^0), \tag{5}$$

*где* $a^k$, $c^k\in C^{r-2k-6}(G')$, $d^k$, $b^k\in C^{r-2k-6}(G'\times[0, T])$, $T>0$, $H^s(x, t, x^0)$, $E^s(x, t, x^0)\in C(G')$, $H^s(x, t, x^0)=\theta_0(t)\theta_{s-1}(t^2-\tau^2(x, x^0))\tilde H^s(x, t, x^0)$, $E^s(x, t, x^0)=\theta_0(t)\theta_s(t^2-\tau^2(x, x^0))\tilde E^s(x, t, x^0)$, $\tilde H^s(x, t, x^0)$, $\tilde E^s(x, t, x^0)$ — *ограниченные в* $G'$ *функции. При этом*

$$a^k=\frac{1}{\mu}\left[\alpha^{k+1}\times\Delta\tau^2+\mathrm{rot}\,\alpha^k\right],\quad b^k=\frac{1}{\mu}\left[\beta^{k+1}\times\nabla\tau^2+\mathrm{rot}\,\beta^k\right],$$

$$c^k=-2t\alpha^{k+1}-\frac{\partial}{\partial t}\alpha^k,\quad k=-2,-1,0,1,\ldots,s; \tag{6}$$

$$d^k=-2t\beta^{k+1}-\frac{\partial}{\partial t}\beta^k+\gamma^{k+1}\nabla\tau^2-\nabla\gamma^k,\quad k=-3,-2,-1,0,1,\ldots,s-1,$$

$$\alpha^{-2}=-\beta^{-3}=\beta^{-2}=\gamma^2=0,$$

$$\alpha^{-1}(x,t,x^0)=\Phi^{-1}(x,t,x^0)\,\frac{1}{2\pi}\left(\varepsilon(x^0)\,\mu(x^0)\right)^{1/2}j^0, \tag{7}$$

$$\alpha^k(x,t,x^0)=-\frac{1}{4}\,\frac{\Phi^{-1}(x,t,x^0)}{\tau^{k+1}}\int\limits_{\mathcal{T}(x,x^0)}\tau^k\left[\Phi(\xi,\tau(\xi,x^0),x^0)\times\right.$$

$$\left.\times L_0\alpha^{k-1}(\xi,\tau(\xi,x^0),x^0)\right]d\tau, \tag{8}$$

*где*

$$\Phi(x,t,x^0)=\left|\frac{\partial}{\partial x}g(x,x^0)\right|^{1/2}\exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{t}{\tau(x,x^0)}\int\limits_{\mathcal{T}(x,x^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\right]\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(x,x^0)}Q(d\xi)\right].$$

*Здесь* $Q(dx)$ — *матричная линейная форма, определяемая равенством*

$$Q\left(\frac{dx}{d\tau}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon\mu}\left[-\left(\nabla\frac{1}{\varepsilon\mu},\frac{dx}{d\tau}\right)\alpha+\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left(\alpha,\frac{dx}{d\tau}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{dx}{d\tau}\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla\ln\frac{1}{\mu},\alpha\right)+\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla\ln\frac{1}{\mu},\frac{dx}{d\tau}\right)\right]. \tag{9}$$

В настоящей работе предполагается, что функции $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ зависят от $(x_2, x_3)$ и, кроме того, вне $\mathbf{R}\times D$ принимают постоянные значения $\varepsilon_0$, $\mu_0$, $\sigma_0$.

Из теоремы 1 следует, что к решению $E$, $H$ задачи (1), (2), имеющему структуру (4), (5), применимо преобразование Фурье по $x_1$ при $t\in(0, T_1)$, $T_1$ — фиксированное число. Для удобства дальнейших рассуждений введем следующие обозначения:

$$y_1 = x_2,\ y_2 = x_3,\ y = (y_1, y_2),$$
$$y_1^0 = x_2^0,\ y_2^0 = x_3^0,\ y^0 = (y_1^0, y_2^0).$$

Сделаем несколько предположений: уравнение кривой $S$ будем считать заданным в виде $F(y) = 0$, $F(y) < 0$ при $y \in D$, $|\nabla_y F(y)||_{y \in S} = 1$; $\bar{D}$ обладает свойством выпуклости по отношению к семейству кривых $\mathcal{T}(y, y^0) \subset D$. При сделанных выше предположениях точка $y \in D$ геодезической $\mathcal{T}(y, y^0)$ может быть задана римановыми координатами $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, другими словами, выполняется равенство $y = f(\xi, y^0)$, где функция $f(\xi, y^0)$ имеет по переменной $\xi$ обратную $\xi = g(y, y^0)$, причем $g(y, y^0) \in C^{r-1}(D' \times D')$. Якобиан перехода от римановых координат к декартовым $\left|\frac{\partial}{\partial y} g(y, y^0)\right|$ положителен и при $y = y^0$ равен 1. В силу сказанного выше $\tau^2(y, y^0) = \varepsilon(y^0)\mu(y^0)|g(y, y^0)|^2 \in C^{r-1}(D' \times D')$.

Обратная задача 1. Определить неизвестные при $y \in D$ функции $\varepsilon(y)$, $\mu(y)$, $\sigma(y)$, если относительно решения прямой задачи (1), (2) известна следующая информация:

$$(F_{x_1}[E_1]|_{\nu_1=0})_{y \in S, y^0 \in S} = h_1(y, t, y^0), \quad t \in (-\infty, T),$$

где $h_1(y, t, y^0)$ — заданная при $y \in S$, $y^0 \in S$ функция, $T$ — фиксированное положительное число (достаточно большое), $F_{x_1}$ — оператор преобразования Фурье по переменной $x_1$, $\nu_1$ — параметр преобразования.

Замечание 1. Пусть $y^0 \in S$, $y$ — фиксированная точка $S$, в которой мы наблюдаем за решением прямой задачи (1), (2). Для моментов времени $t < \tau(y, y^0)$ решение прямой задачи (1), (2) тождественно равно нулю. В момент времени $t = \tau(y, y^0)$ (прихода фронта волны в точку $y$) решение становится отличным от нуля. Поэтому если решение прямой задачи (1), (2) известно как функция времени $t$ для всех точек $y \in S$ при всевозможных $y^0 \in S$, то эта информация содержит в себе данные о временах $\tau(y, y^0)$, $y \in S$, $y^0 \in S$, т. е. информацию для решения обратной кинематической задачи. Функцию $v(y) = 1/\sqrt{\varepsilon(y)\mu(y)}$ при $y \in D$ можно находить посредством решения обратной кинематической задачи, которая состоит в следующем. Определить при $y \in D$ функцию $v(y)$, входящую в уравнение эйконала

$$|\nabla_y \tau(y, y^0)|^2 = \frac{1}{v^2(y)}, \quad y \in D, \tag{10}$$

если относительно решения для этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\tau(y, y^0) = O(|y - y^0|), \quad y \to y^0, \tag{11}$$

известна информация

$$\tau(y, y^0)|_{y \in S, y^0 \in S} = \psi(y, y^0), \tag{12}$$

где $\psi(y, y^0)$ — заданная при $y \in S$, $y^0 \in S$ функция. Теорема об оценках устойчивости решения этой обратной кинематической задачи содержится в работе [3, с. 101—106].

Замечание 2. Число $T > 0$, входящее в постановку обратной задачи 1, выбирается так, чтобы для любых точек $y^0 \in S$, $y \in S$ имеет место $\tau(y, y^0) < T$.

В настоящей работе предложен метод решения задачи определения $\sigma(y)$, $\mu(y)$ при $y \in D$, который состоит в сведении при известной $v(y) \in C^{11}(\mathbf{R}^2)$ решения исходной задачи к последовательному решению следующих двух обратных задач.

Обратная задача 2. Пусть $v(y) \in C^{11}(\mathbf{R}^2)$ — известная функция. Определить функцию $\sigma(y)$ при $y \in D$, если относительно решения прямой задачи (1), (2) известна информация

$$\lim_{t\to\tau(y,y^0)+0}\int_0^t F_{x_1}[E_1](\nu,y,z,y^0)\big|_{\nu=0}(z^2-\tau^2(y,y^0))\,dz=h_2(y,y^0), \qquad (13)$$

где $h_2(y,\ y^0)$ — заданная при $y\in S,\ y^0\in S$ функция.

Обратная задача 3. Пусть $v(y)\in C^{11}(\mathbf{R}^2)$, $\sigma(y)\in C^{10}(\mathbf{R}^2)$ — известные функции. Определить $\mu(y)$ при $y\in D$, если относительно решения задачи (1), (2) известна информация

$$\lim_{t\to\tau(y,y^0)+0}\int_0^t F_{x_1}[E_1](\nu,y,z,y^0)\big|_{\nu=0}\,dz=h_3(y,y^0), \qquad (14)$$

где $h_3(y,\ y^0)$ — заданная при $y\in S,\ y^0\in S$ функция. Ниже будут сформулированы и доказаны теоремы об оценках устойчивости решения каждой из обратных задач 2 и 3.

**Теорема 2.** *Пусть $v(y)$ — известная функция и любая пара точек области $D$ может быть соединена единственной геодезической метрики* (3); *граница $S$ области $D$ определяется уравнением $F(y)=0$, где $F(y)\in C^2(\bar D)$, $F(y)<0$ при $y\in D$, $|\nabla_y F(y)|\,|_{y\in S}=1$; $\sigma(y)$, $\sigma^*(y)\in C^{10}(\bar D)$ — решения обратной задачи 2, отвечающие информации $h_2(y,\ y^0)$, $h_2^*(y,y^0)$, $y\in S$, $y^0\in S$. Тогда имеет место оценка*

$$\iint_D \tilde\sigma^2(y)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_S dS_\xi\int_S|\Phi(\widetilde W)|\,dS_x, \qquad (15)$$

$$\tilde\sigma(y)=\sigma(y)-\sigma^*(y),\ \widetilde W(y,y^0)=\ln\left(\frac{h_2^*(y,y^0)}{h_2(y,y^0)}\right)^2,$$

$$\Phi(W)=\begin{vmatrix} W_{y_1}(y,\xi) & W_{y_2}(y,\xi)\\ F_{y_1}(y) & F_{y_2}(y)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} W_{\xi_1}(y,\xi) & W_{\xi_2}(y,\xi)\\ F_{\xi_1}(\xi) & F_{\xi_2}(\xi)\end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Введем класс функций $\mathcal{R}(M)=\{R(y)\subset C^2(\bar D)\,|\,\|R\|_{C^1(D)}\leqslant M\}$, где $M$ — произвольное фиксированное число.

**Теорема 3.** *Пусть $v(y)\in C^{11}(\mathbf{R}^2)$, $\sigma(y)\in C^{11}(\mathbf{R}^2)$ — известные положительные функции, принимающие при $y\in\mathbf{R}^2\backslash D$ постоянные значения; $M$, $\mu_0$ — фиксированные положительные числа; $\mu(y)$, $\mu^*(y)\in\mathfrak{M}(M,\ \mu_0)=\{\mu(y)\,|\,\mu(y)=\exp[R(y)],\ R(y)\in\mathcal{R}(M),\ \mu(y)=\mu_0$ при $y^0\in\mathbf{R}^2\backslash D\}$ — решения обратной задачи 3, отвечающие информациям $h_3(y,\ y^0)$, $h_3^*(y,y^0)$, $y\in S$, $y^0\in S$ соответственно. Тогда имеют место оценки*

$$\left\|\ln\frac{\mu(y)}{\mu^*(y)}\right\|_{L_2(D)}\leqslant C_1\int_S dS_{y^0}\int_S\Phi(w)\,dS_y, \qquad (17)$$

$$W(y,y^0)=\frac{4\tau(y,y^0)}{\alpha^{-1}(y,y^0)}\pi\lim_{t\to\tau(y,y^0)+0}\frac{h_3(y,y^0)-h_3^*(y,y^0)}{\sqrt{t^2-\tau^2(y,y^0)}}, \qquad (18)$$

*где $C_1$ — некоторая постоянная, величина которой зависит от $M$, $\mu_0$, $\operatorname{diam}D$, $v(y)$; $\alpha^{-1}(y,\ y^0)$ задается формулой* (7), *$\tau(y,\ y^0)$ определены после формулы* (3).

## 2. Описания процесса построения решения обратных задач 2 и 3

Для описания процесса построения решения обратных задач 2, 3 и доказательства теорем 2, 3 нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых содержатся в п. 3.

**Лемма 1.** *Пусть* $y \in \mathbf{R}^2$, $y^0 \in \mathbf{R}^2$, $\tau(y, y^0) > 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \to \tau(y,y^0)+0} \int_0^t c^k(y, z, y^0)\,\theta_k(z^2 - \tau^2(y, y^0))(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\tau(y, y^0)} c^{-2}(y, \tau(y, y^0), y^0), & \text{если } k = -2, \\ 0, \text{ если } k = -1, 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{19}$$

**Лемма 2.** *Пусть* $y$, $y^0$ — *фиксированные точки в* $\mathbf{R}^2$ *такие, что* $\tau(y, y^0) > 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \to \tau(y,y^0)+0} \int_0^t \left[ \int_0^{x} d^k(y, x - z, y^0, z)\,\theta_k((x - z)^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz\,(x^2 - \tau^2(y, y^0)) \right] dx =$$

$$= 0, \quad k = -3, -2, -1, 0, \ldots. \tag{20}$$

**Лемма 3.** *Пусть* $y \in \mathbf{R}^2$, $y^0 \in \mathbf{R}^2$, $\tau(y, y^0) > 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \to \tau(y,y^0)+0} \int_0^t E_1(y, z, y^0)(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz = \alpha^{-1}(y, \tau(y, y^0), y^0). \tag{21}$$

**Лемма 4.** *Пусть* $y \in \mathbf{R}^2$, $y^0 \in \mathbf{R}^2$, $\tau(y, y^0) > 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \to \tau(y,y^0)+0} \int_0^t c^k(y, z, y^0)\,\theta_k(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz = \begin{cases} -\dfrac{c^{-1}(y, \tau(y, y^0), y^0)}{2\tau(y, y^0)}, & k = -1, \\ 0, \quad k = -2, -0, 1, \ldots. \end{cases}$$

**Лемма 5.** *Пусть* $y$, $y^0$ — *фиксированные точки в* $\mathbf{R}^2$, *такие, что* $\tau(y, y^0) > 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \to \tau(y,y^0)+0} \int_0^x \left[ \int_0^t d^k(y, x - z, y^0, z)\,\theta_k((x - z)^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz \right] dt = 0,$$

$$k = -3, -2, -1, 0, 1, \ldots. \tag{22}$$

**Лемма 6.** *Пусть* $y \in S$, $y^0 \in S$, $\tau(y, y^0) > 0$. *Тогда*

$$\lim_{t \to \tau(y,y^0)+0} \int_0^t E_1(y, z, y^0)\,dz = -\frac{c^{-1}(y, \tau(y, y^0), y^0)}{2\tau(y, y^0)}. \tag{23}$$

Перейдем к процедуре нахождения решения обратной задачи 2. Для этого рассмотрим равенство (9), где $Q\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$ можно переписать в виде $Q\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha = Q_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha + Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha$. Здесь матричные линейные формы $Q_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha$, $Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha$ определяются равенствами

$$Q_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left[-\left(\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\right), \frac{dy}{d\tau}\right)\alpha\right], \; Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\alpha =$$

$$= \frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla \ln \frac{1}{\mu}, \frac{dy}{d\tau}\right)\right].$$

**Лемма 7.** *В условиях теоремы 2 имеет место равенство*

$$\exp\left[\int_{\mathscr{T}(y,y^0)} \left(Q_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right) + Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\right) d\tau\right] j^0 = \frac{v(y^0)}{v(y)} \sqrt{\frac{\mu(y^0)}{\mu(y)}}\, j^0.$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\left(Q_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right)+Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\right)d\tau\right]j^0=\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]\times$$

$$\times\left(\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]j^0\right)=\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\frac{1}{2v^2(y)}\nabla v^2(y)\frac{dy}{d\tau}\,d\tau\right]j^0=\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}d(\ln v(y))\right]j^0=\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]\exp\left[-\ln v(y)+\right.$$

$$\left.+\ln v(y^0)\right]j^0=\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]\exp\left[\ln\frac{v(y^0)}{v(y)}\right]j^0=$$

$$=\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}Q_2\left(\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau\right]\frac{v(y^0)}{v(y)}j^0=\frac{v(y^0)}{v(y)}\times$$

$$\times\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\frac{1}{2v^2(y)}v^2(y)\nabla\ln\frac{1}{\mu(y)}\frac{dy}{d\tau}\,d\tau\right]j^0=\frac{v(y^0)}{v(y)}\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}d\left(\ln\frac{1}{\mu(y)}\right)\right]j^0=$$

$$=\frac{v(y^0)}{v(y)}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{\mu(y)}-\ln\frac{1}{\mu(y^0)}\right)\right]j^0=\frac{v(y^0)}{v(y)}\exp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1/\mu(y)}{1/\mu(y^0)}\right]j^0=$$

$$=\frac{v(y^0)}{v(y)}\sqrt{\frac{\mu(y^0)}{\mu(y)}}.$$

Учитывая лемму 7, равенство (8) перепишем в виде

$$\Phi(y,\tau(y,y^0),y^0)=\left|\frac{\partial}{\partial y}g(y,y^0)\right|^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\right]\frac{v(y^0)}{v(y)}\sqrt{\frac{\mu(y^0)}{\mu(y)}}. \tag{24}$$

Из равенства (24) находим

$$\Phi^{-1}(y,\tau(y,y^0),y^0)=\left|\frac{\partial}{\partial y}g(y,y^0)\right|^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\right]\frac{v(y)}{v(y^0)}\sqrt{\frac{\mu(y)}{\mu(y^0)}}. \tag{25}$$

Из равенств (30) и (7) вытекает формула

$$\alpha_1^{-1}(y,\tau(y,y^0),y^0)=\frac{1}{2\pi}(\varepsilon(y^0)\mu^3(y^0))^{1/2}\exp\left[\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\right]\frac{v(y)}{v(y^0)}\sqrt{\frac{\mu(y)}{\mu(y^0)}}. \tag{26}$$

Правая часть равенства (26) есть функция с положительными значениями. Поэтому из леммы 3 и равенства (13) следует, что $h_2(y,y^0)=\alpha_1^{-1}(y,\tau(y,y^0),y^0)>0$, $y\in S$, $y^0\in S$. Тогда равенство (26) перепишется в виде

$$\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\right]=\frac{1}{h_2(y,y^0)}\frac{1}{2\pi}(\varepsilon(y^0)\mu^3(y^0))^{1/2}\times$$

$$\times\left|\frac{\partial}{\partial y}g(y,y^0)\right|^{1/2}\frac{v(y)}{v(y^0)}\sqrt{\frac{\mu(y)}{\mu(y^0)}}. \tag{27}$$

Логарифмируя правую и левую части (27), получим выражение

$$\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)} \sigma(\xi)\,d\tau = W(y,y^0), \quad y \in S,\ y^0 \in S, \tag{28}$$

где

$$W(y,y^0) = -2\ln h_2(y,y^0) + p(y,y^0), \tag{28'}$$

$$p(y,y^0) = 2\ln\frac{1}{2\pi}\left(\varepsilon(y^0)\mu^3(y^0)\right)^{1/2}\left|\frac{\partial}{\partial y}g(y,y^0)\right|^{1/2}\frac{v(y)}{v(y^0)}\sqrt{\frac{\mu(y)}{\mu(y^0)}}.$$

Функция $h_2(y, y^0)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ является заданной, а эта же функция при $y \in D$ и функция $\mu(y)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ известны. Тем самым функцию $W(y, y^0)$, задаваемую формулой (28′), можно считать известной при $y \in S$, $y^0 \in S$. Кроме того, семейства геодезических $\mathcal{T}(y, y^0)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ есть заданное семейство кривых. Поэтому равенство (28) приводит нас к задаче интегральной геометрии, заключающейся в определении функции $\sigma(y)$. Исследование задачи интегральной геометрии (28) содержится в работах [3, 7].

Замечание 3. Используя проведенные рассуждения, обоснуем теорему 2. Для этого рассмотрим $\sigma(y)$, $\sigma^*(y)$ — решения обратной задачи 2, отвечающие информациям $h_2(y, y^0)$, $h_2^*(y, y^0)$ соответственно. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)} \sigma^*(\xi)\,d\tau = W^*(y,y^0), \quad y \in S, \quad y^0 \in S, \tag{29}$$

где $W^*(y, y^0) = -2h_2^*(y, y^0) + p(y, y^0)$.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{W}(y, y^0) = W(y, y^0) - W^*(y, y^0),\ \widetilde{\sigma}(y) = \sigma(y) - \sigma^*(y).$$

Из правой и левой частей равенства (28) вычтем правые и левые части равенства (29) и получим

$$\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)} \widetilde{\sigma}(\xi)\,d\tau = \widetilde{W}(y,y^0), \quad y \in S, \quad y^0 \in S, \tag{30}$$

где $\widetilde{W}(y, y^0) = \ln\left(\dfrac{h_2^*(y, y^0)}{h_2(y, y^0)}\right)^2$. Применяя теорему 3.2 из работы [3, с. 95] к интегральным соотношениям (30) и учитывая введенные обозначения, установим оценку (15). Тем самым теорема 2 доказана.

Далее считаем $\sigma(y) \in C^{10}(\mathbf{R}^2)$, $v(y) \in C^{11}(\mathbf{R}^2)$ известными функциями.

Рассмотрим равенство (6) при $k = -1$. Тогда оно перепишется в виде

$$c^{-1}(y, t, y^0) = -2t\alpha^0(y, t, y^0) - \frac{\partial}{\partial t}\alpha^{-1}(y, y^0, t).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha^0(y, t, y^0) = c^{-1}(y, t, y^0)\frac{1}{2t} - \frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}\alpha^{-1}(y, t, y^0). \tag{31}$$

Равенство (31) можно переписать так:

$$\lim_{t\to\tau(y,y^0)+0}\alpha_1^0(y, t, y^0) = -\lim_{t\to\tau(y,y^0)}\frac{c^{-1}(y, t, y^0)}{2t} - \lim_{t\to\tau(y,y^0)}\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1^{-1}(y, t, y^0). \tag{32}$$

Из леммы 6 и равенства (14) следует, что

$$h_3(y, y^0) = -c^{-1}(y, \tau(y, y^0), y^0)\,2\tau(y, y^0).$$

Тогда с учетом равенств (7), (26) получим

$$\alpha_1^0(y, \tau(y, y^0), y^0) = h_3(y, y^0) - \frac{1}{2\pi}\left(\varepsilon(y^0)\mu^3(y^0)\right)^{1/2}\left|\frac{\partial}{\partial y}g(y, y^0)\right|^{1/2}\frac{1}{4\tau(y, y^0)}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)}\sigma(\xi)\,d\tau\right]\frac{v(y)}{v(y^0)}\exp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\mu(y)}{\mu(y^0)}\right]. \tag{33}$$

Здесь $h_3(y, y^0)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ — заданная функция; $\sigma(y) \in C^{10}(D)$, $v(y) \in C^{11}(D)$ — известные функции; $\mu(y)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ — известная функция. Итак, можно считать $\alpha_1^0(y, \tau(y, y^0), y^0)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ известной функцией. С другой стороны, для $\alpha^0(y, t, y^0)$ из равенства (8) при $k = 0$ следует формула

$$\alpha(y, \tau(y, y^0), y^0) = -\frac{\alpha^{-1}(y, y^0)}{4\tau(y, y^0)} \int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)} [\alpha^{-1}(\xi, y^0)]^{-1} L_\xi \alpha^{-1}(\xi, y^0)\, d\tau, \quad (34)$$

где

$$L_y = v^2(y)\, \Delta_y + v^2(y)\, \nabla_y \ln \frac{1}{\mu(y)}\, \nabla_y. \quad (35)$$

Цель дальнейших рассуждений состоит в изучении структуры правой части выражения (35). Для этого рассмотрим выражение

$$L_y \alpha^{-1}(y, y^0) = -v^2(y)\, \Delta_y \alpha^{-1}(y, y^0) + v^2(y)\, \nabla_y \ln \frac{1}{\mu(y)}\, \nabla_y \alpha^{-1}(y, y^0),$$

функцию $\alpha^{-1}(y, y^0)$ представим в виде

$$\alpha^{-1}(y, y^0) = B(y, y^0) \exp\left[\frac{1}{2} R(y)\right], \quad (36)$$

где $B(y, y^0) = \frac{1}{2\pi} (\varepsilon(y^0)\, \mu^3(y^0))^{1/2} \left| \frac{\partial}{\partial y} g(y, y^0) \right|^{1/2} \frac{v(y)}{v(y^0)} \exp\left[\frac{1}{2} R(y)\right]$.

Учитывая формулу (36), находим

$$\Delta_y \alpha^{-1}(y, y^0) = [\Delta B(y, y^0) + \nabla B(y, y^0)]\, \nabla R(y) + \\ + \left(\frac{\Delta R(y)}{2} + \frac{1}{4} |\nabla R(y)|^2\right) B(y, y^0) \exp\left[\frac{1}{2} R(y)\right],$$

$$\nabla_y \alpha^{-1}(y, y^0) = \dot{\nabla} B(y, y^0) \exp\left[\frac{1}{2} R(y)\right] + \frac{1}{2} B(y, y^0) \exp\left[\frac{1}{2} R(y)\right] \nabla R(y).$$

Из этих равенств и (36) получим

$$\frac{\Delta \alpha^{-1}(y, y^0)}{\alpha^{-1}(y, y^0)} = \frac{\Delta B(y, y^0)}{B(y, y^0)} + \frac{\Delta R(y)}{2} + \nabla \ln B(y, y^0)\, \nabla R(y) + \frac{1}{4} |R(y)|^2, \quad (37)$$

$$\frac{\nabla_y \alpha^{-1}(y, y^0)}{\alpha^{-1}(y, y^0)} = \nabla_y \ln B(y, y^0) + \frac{\nabla R(y)}{2}. \quad (38)$$

Далее, имеем

$$\frac{L_y \alpha^{-1}(y, y^0)}{\alpha^{-1}(y, y^0)} = \frac{v^2(y)}{2} \left[-\Delta R(y) + \frac{|\nabla R(y)|^2}{2} - 2 \frac{\Delta B(y, y^0)}{B(y, y^0)}\right]. \quad (39)$$

Из равенства (35) с учетом (39) при $y \in S$, $y^0 \in S$ находим равенство

$$\int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)} \frac{v^2(\xi)}{2} \left[\Delta R(\xi) - \frac{1}{2} |\nabla R(\xi)|^2\right] d\tau = \overline{W}(y, y^0), \quad y \in S,\ y^0 \in S, \quad (40)$$

где

$$\overline{W}(y, y^0) = 8\pi\tau(y, y^0) \frac{\alpha^0(y, y^0)}{\alpha^{-1}(y, y^0)} - \int\limits_{\mathcal{T}(y,y^0)} v^2(\xi) \frac{\Delta B(\xi, y^0)}{B(\xi, y^0)}\, d\tau. \quad (41)$$

Функции $\tau(y, y^0)$, $B(y, y^0)$, $\alpha^{-1}(y, y^0)$, $\alpha^0(y, y^0)$ известны при $y \in S$, $y^0 \in S$, функция $v(y)$ — при $y \in D$. Поэтому функция $W(y, y^0)$, задаваемая формулой (41), известна при $y \in S$, $y^0 \in S$. Отметим, что совокупность геодезических $\mathcal{T}(y, y^0)$ при $y \in S$, $y^0 \in S$ есть заданное семейство кривых.

Равенство (40) приводит к задаче интегральной геометрии, заключающейся в определении функции $U(y) \equiv \frac{v^2(y)}{2}\left[\Delta R(y) - \frac{1}{2}|\nabla R(y)|^2\right]$ по известным значениям $\overline{W}(y, y^0)$ интегралов от $U(y)$ вдоль кривых $\mathcal{T}(y, y^0)$, $y \in S$, $y^0 \in S$.

Проведенные рассуждения показывают, что решение обратной задачи 3 сведено к последовательному решению задачи интегральной геометрии, связанной с определением функции $U(y)$ при $y \in D$ по функции $\overline{W}(y, y^0)$, $y \in S$, $y^0 \in S$, а затем к решению следующей задачи: определить функцию $R(y) \in C^{10}(\overline{D})$, которая при $y \in \mathbf{R}^2 \backslash D$ принимает постоянные значения, а при $y \in D$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_y R(y) - \frac{1}{2}|\nabla_y R(y)|^2 = \frac{2}{v^2(y)} U(y), \quad y \in D. \tag{42}$$

Существование единственного решения аналогичной задачи для области $D$ малого диаметра можно найти в [8].

Приведем оценку устойчивости решения задачи Дирихле для уравнения (42) и обоснуем теорему 4.

Пусть $R_1(y)$, $R_2(y) \in \mathcal{R}(M)$ — решения уравнения (42) при $U(y) = U_1(y)$, $U(y) = U_2(y)$ соответственно, удовлетворяющие данным

$$R_1(y)|_{y \in S} = -\ln\frac{1}{\mu_0}, \quad R_2(y)|_{y \in S} = -\ln\frac{1}{\mu_0}.$$

Введем обозначения: $\overline{R}(y) = R_1(y) - R_2(y)$, $\overline{U}(y) = U_1(y) - U_2(y)$, $\mu_j(y) = \exp R_j(y)$, $j = 1, 2$; $a(y) = 1/\sqrt{\mu_1(y)\mu_2(y)}$. Имеют место равенства

$$\operatorname{div}(a(y)\nabla\overline{R}(y)) = \frac{2a(y)}{v^2(y)}\overline{U}(y), \quad \overline{R}(y)|_{y \in S} = 0. \tag{43}$$

Для задачи (43) справедлива оценка

$$\|\overline{R}\|_{L_2(D)} \leqslant C\|\overline{U}\|^2_{L_2(D)}, \tag{44}$$

где $C$ — постоянная, величина которой зависит от $M$, $\mu_0$, $\operatorname{diam} D$. Из неравенств (44) и (15) получим (17). Таким образом, теорема 3 доказана.

## 3. Доказательства лемм 1—6

Доказательство леммы 1. Пусть $k = -2$. Тогда из равенства (19) следуют соотношения

$$\lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^{-2}(y, z, y^0)\,\theta_{-2}(z^2 - \tau^2(y, y^0))(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz =$$

$$= \lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^{-2}(y, z, y^0)\,\delta'(z^2 - \tau^2(y, y^0))(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz =$$

$$= -\lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^{-2}(y, z, y^0)\,\delta(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz =$$

$$= -\lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \frac{c^{-2}(y, \tau(y, y^0), y^0)}{2\tau(y, y^0)} = -\frac{c^{-2}(y, \tau(y, y^0), y^0)}{2\tau(y, y^0)}.$$

Пусть $k = -1$. Тогда

$$\lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^{-1}(y, z, y^0)\,\theta_{-1}(z^2 - \tau^2(y, y^0))(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz =$$

$$= \lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^{-1}(y, z, y^0)\,\delta(z^2 - \tau^2(y, y^0))(z^2 - \tau^2(y, y^0))\,dz = 0.$$

Пусть $k \geqslant 0$. Тогда

$$\lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} \int_0^t c^k(y,\, z,\, y^0)\, \theta_k(z^2-\tau^2(y,\, y^0))\,(z^2-\tau^2(y,\, y^0))\, dz =$$

$$= \lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} \int_{\tau(y,y^0)}^{t} c^k(y,\, z,\, y^0)\, \frac{(z^2-\tau^2(y,\, y^0))^{k+1}}{k!}\, dz = 0,$$

и тем самым лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $y \in \mathbf{R}^2$, $y^0 \in \mathbf{R}^2$ — фиксированные точки такие, что $\tau(y,\ y^0) > 0$, $f_k(x)$ — обобщенные функции, определенные равенствами

$$f_k(x) = \int_0^x \left[\int_0^t d^k(x,\, z,\, y^0,\, x-z)\, \theta_k(z^2-\tau^2(y,y^0))\, dz\right](t^2-\tau^2(y,\, y^0))\, d\tau. \quad (45)$$

Покажем, что при $x > \tau(y,\ y^0)$ верны равенства $f_k(x) = 0$, $k=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$. Для этого достаточно показать, что имеют место равенства $(f_k(x),\ \varphi(x)) = 0$, $k=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$ для произвольной функции $\varphi(x)$ из пространства основных функций $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset \{x \mid x > \tau(y,\ y^0)\}$. Заметим, что если $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset \{x \mid x > \tau(y,\ y^0)\}$, то

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{d}{dx}\int_{\tau(y,y^0)}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Используя эти равенства, получим соотношения

$$(f_k(x), \varphi(x)) = -\left(\left(\int_0^x d^k(y,\, z,\, y^0,\, x-z)\, \theta_k(z^2-\tau^2(y,\, y^0))\, dz\,(x^2-\tau^2(y,\, y^0)),\right.\right.$$

$$\left.\int_{\tau(y,y^0)}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi\right) = -\left(\int_0^x d^k(y, z, y^0, x-z)\, \theta_k(z^2-\tau^2(y, y^0))\, dz,\right.$$

$$\left.\left(x^2-\tau^2(y,\ y^0)\right)\int_{\tau(y,y^0)}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi\right) = \left(d^k(y, x, y^0, 0)\, \theta_k(x^2-\tau^2(y, y^0)),\right.$$

$$\left.\int_{\tau(y,y^0)}^{x}\left((z^2-\tau^2(y, y^0))\int_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\right) dz\right) =$$

$$= \theta_k(x^2-\tau^2(y, y^0)),\ d^k(y, y^0, x)\int_{\tau(y,y^0)}^{x}\left((z^2-\tau^2(y,\ y^0))\int_{\tau(y,y^0)}^{z}\varphi(\xi)\, d\xi\right) dz\Big).$$

Пусть $k=-3$. Тогда

$$\left(\theta_{-3}(x^2-\tau^2(y, y^0)),\ d^{-3}(y, x, y^0)\int_{\tau(y,y^0)}^{x}(z^2-\tau^2(y, y^0))\int_{\tau(y,y^0)}^{z}\varphi(\xi)\, d\xi\, dz\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}[\delta'(x^2-\tau^2(y, y^0))],\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x}d^{-3}(y, x, y^0, 0)\int_{\tau(y,y^0)}^{x}(z^2-\tau^2(y, y^0)) \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{\tau(y,y^0)}^{z}\varphi(\xi)\, d\xi\, dz\right]\right) = \left(\delta(x-\tau(y, y^0)),\ \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x}d^{-3}(y, x, y^0)\times\right.\right.\right.$$

$$\times \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\Bigg)\Bigg]\Bigg) = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x} d^{-3} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times (y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi dz\right)\right]\Bigg|_{x=\tau(y,y^0)} = 0.$$

Пусть $k = -2$. Тогда

$$\left(\theta_{-2}(x^2 - \tau^2(y, y^0)),\ d^{-2}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi dz\right) =$$

$$= \left(\delta'(x^2 - \tau^2(y, y^0)),\ d^{-2}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}[\delta(x^2 - \tau^2(y, y^0))],\ \frac{1}{2x} d^{-2}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\Bigg) = -\left(\delta(x - \tau(y, y^0)),\ \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x} d^{-2}(y, x, y^0, 0) \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi dz\right]\right) = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x} d(y, x, y^0, 0) \times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\right]\Bigg|_{x=\tau(y,y^0)} = 0.$$

Пусть $k = -1$. Тогда

$$\left(\theta_{-1}(x^2 - \tau^2(y, y^0)), d^{-1}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y; y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\right) =$$

$$= \left(\delta(x^2 - \tau^2(y, y^0)),\ d^{-1}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)\right) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\Bigg) =$$

$$= \left(\delta(x - \tau(y, y^0)),\ \frac{1}{2x} d^{-1}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2x} d^{-1}(y, x, y^0, 0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} (z^2 - \tau^2(y, y^0)) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz\Bigg|_{x=\tau(y,y^0)} = 0.$$

Рассмотрим формулу (45) при $k \geqslant 0$. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{0}^{x}\left(\int\limits_{0}^{t} d^k(y, z, y^0, t - z)\, \theta_k(z^2 - \tau^2(y, y^0))\, dz\right)(t^2 - \tau^2(y, y^0))\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{x}\theta_0(t - \tau(y, y^0))\left[\int\limits_{\tau(y,y^0)}^{z} d^k(y, z, y^0, t - z)\frac{[z^2 - \tau^2(y, y^0)]^k}{k!} dz\right](t^2 - \tau^2(y, y^0)) dt =$$

$$= \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} \left( \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} d^k(y, z, y^0, t-z) \frac{[z^2 - \tau^2(y, y^0)]^k}{k!} dz \right) (t^2 - \tau^2(y, y^0))\, dt =$$

$$= \lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} \int\limits_0^x \left( \int\limits_0^t d^k(y, z, y^0, t-z)\, \theta_k(z^2 - \tau^2(y, y^0))\, dz \right)(t^2 - \tau^2(y, y^0))\, dt =$$

$$= \lim_{x\to\tau(y,y^0)+0} \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{x} \left( \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} d^k(y, z, y^0, t-z) \frac{[z^2 - \tau^2(y, y^0)]^k}{k!} dz \right) \times$$

$$\times (t^2 - \tau^2(y, y^0))\, dt = 0,$$

и тем самым лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Обоснование леммы 3 следует из лемм 1, 2 и соотношения (6).

Доказательство леммы 4. Пусть $y \in \mathbf{R}^2$, $y^0 \in \mathbf{R}^2$ — фиксированные точки такие, что $\tau(y, y^0) > 0$.

Пусть $k = -2$, $\varphi(t) = \int\limits_0^t c^{-2}(y, z, y^0)\, \theta_{-2}(z^2 - \tau^2(y, y^0))\, dz$ — обобщенная функция. Покажем, что при $t > \tau(y, y^0)$ верно равенство $\varphi(t) = 0$. Для этого достаточно показать, что имеют место равенства $(\psi(t), \varphi(t)) = 0$ для произвольной функции из пространства $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{supp} \varphi(t) \subset \{t \mid t > \tau(y, y^0)\},$$

$$(\psi(t), \varphi(t)) = \left( \int\limits_0^t c^{-2}(y, z, y^0)\, \delta'(z^2 - \tau^2(y, y^0))\, dz,\ \varphi(t) \right) =$$

$$= -\left( c^{-2}(y, t, y^0)\, \delta'(t^2 - \tau^2(y, y^0)),\ \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi \right) = -\Bigg( \delta'(t^2 - \tau^2(y, y^0)),$$

$$c^{-2}(y, t, y^0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi \Bigg) = \Bigg( \delta(t^2 - \tau^2(y, y^0)),\ \frac{d}{d\tau}\Bigg[ c^{-2}(y, t, y^0) \times$$

$$\times \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi \Bigg]\Bigg) = \left( \frac{\delta(t - \tau(y, y^0))}{2t},\ \frac{d}{dt}\left[ c^{-2}(y, t, y^0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi \right] \right) =$$

$$= \delta(t - \tau(y, y^0)),$$

$$\frac{1}{2t} \frac{d}{dt}\left[ c^{-2}(y, t, y^0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi \right] = \frac{1}{2t}\left[ c^{-2}(y, t, y^0) \int\limits_{\tau(y,y^0)}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi \right]\Bigg|_{t=\tau(y,y^0)} = 0. \qquad (46)$$

Пусть $k = -1$. Тогда

$$\lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} \int\limits_0^t c^{-1}(y, z, y^0)\, \theta_{-1}(z^2 - \tau^2(y, y^0))\, dz = \lim_{t\to\tau(y,y^0)} \int\limits_0^t c^{-1}(y, z, y^0)\, \delta(z^2 -$$

$$- \tau^2(y, y^0))\, dz = \lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} \int\limits_0^t c^{-1}(y, z, y^0) \frac{\delta(z - \tau(y, y^0))}{2\tau(y, y^0)}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\tau(y, y^0)} \lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} \int\limits_0^t c^{-1}(y, z, y^0)\, \delta(z - \tau(y, y^0))\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\tau(y, y^0)} \lim_{t\to\tau(y,y^0)+0} c^{-1}(y, \tau(y, y^0), y^0) = \frac{1}{2\tau(y, y^0)} c^{-1}(y, \tau(y, y^0), y^0).$$

Пусть $k \geqslant 0$. Тогда

$$\lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^k(y, z, y^0)\, \theta_k(z^2 - \tau^2(y, y^0))\, dz =$$

$$= \lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t c^k(y, z, y^0) \frac{[z^2 - \tau^2(y, y^0)]^k}{k!}\, dz = 0,$$

и тем самым лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 2.

Доказательство леммы 6. Лемма 6 следует из лемм 4, 5 и соотношения (6).

Замечание 4. Пусть $\varepsilon(x)$, $\sigma(x)$ — гладкие положительные функции, $\varepsilon(x) \in C^2(\mathbf{R}^3) \cap C^r(\bar{D})$, $\sigma(x) \in C^{r-1}(D) \cap C^2(\mathbf{R}^3)$, причем $x \in \mathbf{R}^3$, $r$ — достаточно большое число ($r \geqslant 21$); $\mu$ — известная положительная постоянная, $D \subset \mathbf{R}^3$ — односвязная область конечного диаметра, ограниченная замкнутой гладкой поверхностью. Будем считать уравнения поверхности заданными в виде $F(x) = 0$, где функция $F(x)$ принадлежит $C^r(\bar{D})$ и удовлетворяет условиям $F(x) < 0$, $x \in D$, $|\nabla_x F(x)| |_{x \in S} = 1$.

Обратная задача 4. Определить неизвестные при $x \in D$ функции $\varepsilon(x)$, $\sigma(x)$, для которых решение прямой задачи (1)—(3) удовлетворяет информации

$$E_1|_{x \in S,\, x^0 \in S} = \Phi(x, x^0, t), \tag{47}$$

где $\Phi(x, x^0, t)$ — заданная при $x \in S$, $x^0 \in S$, $t \in (-\infty, T_0)$ функция. Здесь $T_0$ — фиксированное достаточно большое число.

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям п. 1, можно показать, что решение обратной задачи 4 сводится к решению обратной кинематической задачи и решению обратной задачи 5.

Обратная задача 5. Пусть $v(x)$ — известная гладкая функция. Определить функцию $\sigma(x)$ при $x \in D$, если относительно решения прямой задачи (1)—(3) известна информация

$$\lim_{t \to \tau(y, y^0)+0} \int_0^t E_1(x, z, x^0)(z^2 - \tau^2(x, x^0))\, dz = h(x, x^0), \tag{48}$$

где $h(x, x^0)$ — заданная при $x \in S$, $x^0 \in S$ функция. Используя рассуждения, аналогичные описанным в пп. 1—3, можно обосновать следующую теорему.

**Теорема 4.** *Пусть $r \geqslant 21$; область $D$ и ее граница $S$, известная функция $\varepsilon(x)$ и постоянная $\mu$ удовлетворяют вышеприведенным условиям; $\sigma(x)$, $\sigma^*(x) \in C^{r-1}(D) \cap C^2(\mathbf{R}^3)$ являются решениями обратной задачи* **2**, *отвечающими информациям $h(x, x^0)$, $h^*(x, x^0)$, $x \in S$, $x^0 \in S$ соответственно. Тогда $h(x, x^0) \in C^2(S \times S)$, $h^*(x, x^0) \in C^2(S \times S)$, $h(x, x^0) > 0$, $h^*(x, x^0) > 0$, при $x \in S$, $x^0 \in S$ и имеет место оценка*

$$\int_D |\sigma(x) - \sigma^*(x)|^2 \leqslant \int_S dS_\xi \int_S \Phi(\widetilde{W}, \tau)\, dS_x,$$

*где*

$$\Phi(\widetilde{W}, \tau) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \widetilde{W}_{x_1} & \widetilde{W}_{x_2} & \widetilde{W}_{x_3} \\ 0 & 0 & F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \\ \widetilde{W}_{\xi_1} & F_{\xi_1}(\xi) & \tau_{x_1\xi_1} & \tau_{x_2\xi_1} & \tau_{x_3\xi_1} \\ \widetilde{W}_{\xi_2} & F_{\xi_2}(\xi) & \tau_{x_1\xi_2} & \tau_{x_2\xi_2} & \tau_{x_3\xi_2} \\ \widetilde{W}_{\xi_3} & F_{\xi_3}(\xi) & \tau_{x_1\xi_3} & \tau_{x_2\xi_3} & \tau_{x_3\xi_3} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{W}(x, \xi) = \ln\left(\frac{h^*(x, \xi)}{h(x, \xi)}\right)^2.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 153, № 3. С. 520—523.
2. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнения гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
3. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
4. *Яхно В. Г.* Двумерная обратная задача для системы динамических уравнений Ламе // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 2. С. 360—362.
5. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
6. *Романов В. Г.* О структуре фундаментального решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1577—1586.
7. *Мухаметов Р. Г.* Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32—35.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

*г. Ош,*
*г. Новосибирск*

*Статья поступила*
*3 сентября 1991 г.*