

**ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ, НАДЕЛЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ
СТРУКТУРАМИ. IV. ПОДМНОГООБРАЗИЯ
КОРАЗМЕРНОСТИ 1 В МНОГООБРАЗИЯХ
ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ**

Т. Н. Балазюк, Н. М. Остиану

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор является продолжением серии обзоров [16], [18], [19], опубликованных в сборниках «Проблемы геометрии» и посвященных исследованию подмногообразий в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. Здесь мы останавливаемся на исследованиях, относящихся к многомерной поверхности в дифференцируемых многообразиях, оснащенных почти комплексной структурой F и почти эрмитовой структурой (F, G) , некоторыми подклассами этих структур, такими как комплексные структуры, келеровы, почти келеровы и др.; а также евклидовой структурой.

В основном мы рассматриваем подмногообразия общего положения и подробнее останавливаемся на геометрии подмногообразий коразмерности 1 (гиперповерхностей).

Оставлены в стороне подмногообразия в проективно комплексных многообразиях.

Статья состоит из двух параграфов. В § 1, после введения некоторых предварительных понятий, проведена типизация подмногообразий M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$ и эрмитовой структуры $M_n(F, G)$, затем рассмотрены некоторые классы индуцированных на M_m структур и предложен путь их классификации. В § 2 дан обзор результатов исследования гиперповерхности в многообразиях $M_n(F)$ и ряда подклассов этой структуры. Изложение проведено в терминах теории полей геометрических объектов с использованием метода внешних дифференциальных форм.

На протяжении всего изложения используемые индексы принимают следующие значения:

$I, J, K, L, \dots = 1, \dots, n; i, j, k, \dots = 1, \dots, m; \alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n.$

§ 1. СТРУКТУРЫ НА ПОДМНОГООБРАЗИИ M_m В M_n ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

1. Предварительные понятия. Над окрестностью U гладкого многообразия M_n введем формы

$$\omega^J = x'_K dx^K, \quad (1.1)$$

которые будем называть структурными формами многообразия M_n . При помощи форм ω^J над этой окрестностью U , как известно [10], [18], можно построить последовательность линейных, линейно независимых форм $\omega'_K, \omega'_{K_1 K_2}, \dots, \omega'_{K_1 \dots K_s}$, удовлетворяющих уравнениям

$$d\omega'_K = \omega'^L \wedge \omega'_L + \omega^L \wedge \omega'_{KL}, \quad (1.2)$$

$$d\omega'_{K_1 \dots K_q} = \sum_{s=1}^q \frac{s!}{q!(q-s)} \omega'^L_{(K_1 \dots K_s} \wedge \omega'_{K_{s+1} \dots K_q)L} + \omega^L \wedge \omega'_{K_1 \dots K_q L} \quad (q=1, 2, \dots),$$

обладающих, как это очевидно из уравнений (1.2), расслоенной структурой [9] по отношению к формам ω^J и в каждой фиксированной точке $x \in U \subset M_n$ (т. е. при $\omega^J=0$) образующих систему инвариантных форм дифференциальной группы D_n^q соответствующего порядка q [5], [10], [18].

Дифференциально-геометрической структурой на многообразии M_n называется заданное на M_n поле геометрического объекта V , присоединенного к некоторой группе Ли G (в частности, к группе D_n^q) [5].

Объект V называется структурным объектом данной структуры. Если объект V присоединен к группе D_n^q , то порядок группы называется также и порядком структуры.

1. Регулярное отображение $f: Y_m \rightarrow M_n$ гладкого многообразия Y_m в гладкое многообразие M_n при $n \leq m$ называется погружением, а в случае, если оно к тому же инъективно — вложением Y_m в M_n (см., например, [5], гл. 1). Здесь мы будем всегда полагать, что отображение обладает обоими свойствами и для его образа $f(Y_m)$ не будем различать понятия «погруженное многообразие» и «подмногообразие» («поверхность»). В дальнейшем образ $f(Y_m)$ будем обозначать M_m .

Будем считать, что на Y_m (точнее над некоторой окрестностью $S \subset Y_m$), которое будем называть пространством параметров, введены формы

$$\theta^i = y_k^i dy^k, \quad (1.3)$$

при помощи которых, как и выше, можно ввести последовательность форм $\theta_{j_1}^i, \theta_{j_1 j_2}^i, \dots, \theta_{j_1 \dots j_p}^i, \dots$, удовлетворяющих уравнениям вида (1.2).

Отображение f можно задать уравнениями

$$x^j = f^j(y^k). \quad (1.4)$$

Одновременно определяется гладкое отображение $df: T(Y_m) \rightarrow T(M_n)$, называемое дифференциалом отображения f . Используя (1.1) и (1.3), отображение (1.4) можно записать в следующей форме

$$\omega^j = \Lambda_k^j \theta^k. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) называются параметрическими дифференциальными уравнениями подмногообразия M_m в многообразии M_n . В каждой точке $x \in M_m$ $T_x(M_m) \subset T_{xR}(M_n)$, где $T_R(M_n)$ — ограничение касательного расслоения $T(M_n)$ на M_m .

Функции $\Lambda = \{\Lambda_k^j\}$ образуют фундаментальный объект первого порядка подмногообразия M_m . Поле объекта Λ на M_m определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda_j^j - \Lambda_i^j \theta_j^i + \Lambda_j^K \omega_K^j = \Lambda_{jk}^j \theta^k, \quad (1.6)$$

где $\Lambda_{jk}^j = \Lambda_{kj}^j$.

2. На M_m можно задать локально поле $(n-m)$ -мерных подпространств v_x , натянутых в каждой точке $x \in M_m$ на $n-m$ линейно независимых векторов \vec{v}_α таких, что $v_x(M_m) \subset T_{xR}(M_n)$, и натянутое на них подпространство дополняет $T_x(M_m)$. Такое поле v определяется [16] геометрическим объектом v_α^j и задается системой дифференциальных уравнений

$$dv_\alpha^j - v_\beta^j \theta_\alpha^\beta + v_\alpha^K \omega_K^j = v_{\alpha k}^j \theta^k, \quad (1.7)$$

где формы θ_β^α обладают расслоенной структурой по отношению к формам θ^i (см., например, [16]) и при $\theta^i = 0$ образуют систему инвариантных форм параметрической группы. Известно [8], что если в M_n задана некоторая линейная связность, то такое поле v может быть присоединено к M_m внутренним образом, т. е. компоненты v_α^j будут функциями компонент фундаментального объекта некоторого порядка подмногообразия M_m .

Поле v будем называть нормально оснащающим полем (или нормальным расслоением $v(M_m)$).

Компоненты обращенных объектов $\{\Delta_i^K\}, \{v_K^\alpha\}$ связаны с компонентами $\{\Delta_i^K\}, \{v_\alpha^K\}$ следующими соотношениями [16], [18]:

$$\begin{aligned}\Lambda_k^J \Lambda_J^{*l} &= \delta_k^l, & v_\alpha^J v_J^{*\beta} &= \delta_\alpha^\beta, \\ \Lambda_k^J \Lambda_K^{*k} + v_\alpha^J v_K^{*\alpha} &= \delta_K^J, \\ \Lambda_k^J v_J^{*\alpha} &= 0, & v_\alpha^J \Lambda_J^{*k} &= 0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

3. Если на M_n задана некоторая линейная связность Γ , то каждое нормально оснащающее поле индуцирует в касательном расслоении $T(M_m)$ линейную связность $\overset{1}{\gamma}$, именуемую тангенциальной [16].

Нормальная связность $\overset{2}{\gamma}$ или связность в нормальном расслоении возникает естественным образом в любом нормальном расслоении подмногообразия M_m в многообразии M_n с заданной связностью Γ [16].

Тангенциальная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ и нормальная связность $\overset{*}{\gamma}$, однозначно определяемые формулами:

$$\overset{\circ}{\gamma}_{jk}^i = -\overset{*}{\Lambda}_k^i (\Lambda_{jk}^K - \Lambda_J^L \Gamma_{Lk}^K),\tag{1.9}$$

$$\overset{*}{\gamma}_{\beta k}^\alpha = -\overset{*}{v}_k^\alpha (v_{\beta k}^K - v_\beta^L \Gamma_{Lk}^K),\tag{1.10}$$

называются, соответственно, индуцированной и внешней (или вертикальной) связностями [16].

4. Будем считать, что над окрестностью $U \subset M_n$ введено расслоение реперов $R^1(M_n) = \bigcup_{x \in M_n} R_x^1(M_n)$, где $R_x^1(M_n)$ — мно-

жество всех реперов в точке $x \in M_n$ с базисными векторами \vec{e}_j .

В касательном расслоении $T_x(M_n)$ группа D_n^1 с инвариантными формами $\overline{\omega}_K^J = \omega_K^J|_{\omega^J=0}$ представлена локально как группа преобразований векторного репера \vec{e}_j : $\delta \vec{e}_j = \overline{\omega}_j^K \vec{e}_K$. Подмногообразие M_m определяет сечение в расслоении реперов $R^1(M_n)$:

$$R_R^1(M_n) = R^1(M_m) = \bigcup_{x \in M_m} R_x^1(M_m).$$

В дальнейшем для упрощения записи индекс x в обозначениях векторов репера и компонент объектов будем опускать.

Векторы $\overset{\rightarrow}{\Lambda}_i$ и \vec{v}_α , соответственно, натягивающие в каждой точке $x \in M_m$ подпространства $T_x(M_m)$ и $v_x(M_m)$, определяются следующими разложениями:

$$\overset{\rightarrow}{\Lambda}_i = \Lambda_i^J \vec{e}_J,\tag{1.11}$$

$$\vec{v}_\alpha = v_\alpha^J \vec{e}_J,\tag{1.12}$$

где \vec{e}_J образуют базис исходного репера семейства $R_x^1(M_m)$.

Подпространства $T_x(M_m)$ и $\nu_x(M_m)$ являются базовыми подпространствами неголономной композиции [12], естественно сасоциирующей с нормально оснащенным подмногообразием M_m . Репер $R(\vec{\Lambda}, \vec{\nu})$, образованный в каждой точке $x \in M_m$ векторами $\vec{\Lambda}_i$ и $\vec{\nu}_\alpha$, будем называть репером, адаптированным композиции (Λ, ν) .

Если векторы \vec{e}_j образуют в каждой точке $x \in M_n$ натуральный репер, т. е. векторы $\vec{e}_j = \vec{\partial}_j x$ касаются координатных линий, то систему линейных линейно независимых форм ω^j , учитывая их строение, можно принять за натуральный корепер, следовательно:

$$\omega^K(e_j) = \delta_j^K.$$

Система линейных линейно независимых форм Θ^j , определенных следующим образом:

$$\Theta^i = \vec{\Lambda}_K^i \omega^K, \quad \Theta^\alpha = \vec{\nu}_K^\alpha \omega^K,$$

также образует корепер на M_n , который мы будем называть корепером, адаптированным подмногообразию M_m , оснащенному полем нормалей $\nu(M_m)$. Учитывая соотношения (1.8), получаем

$$\Theta^i(\vec{\Lambda}_k) = \delta_k^i; \quad \Theta^i(\vec{\nu}_\alpha) = 0; \quad \Theta^\alpha(\vec{\Lambda}_k) = 0; \quad \Theta^\alpha(\vec{\nu}_\beta) = \delta_\beta^\alpha.$$

На подмногообразии M_m $\Theta^\alpha = 0$, $\Theta^i = \theta^i$, причем формы Θ^i образуют корепер, сопряженный реперу $\{\vec{\Lambda}_i\}$.

Функции

$$\vec{\Lambda}_{ij}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^j - \Lambda_i^K \Gamma_{Kj}^j + \Lambda_k^j \gamma_{ij}^k, \quad (1.13)$$

$$\vec{\nu}_{\alpha j}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\alpha j}^j - \nu_\alpha^K \Gamma_{Kj}^j + \nu_\beta^j \gamma_{\alpha j}^\beta \quad (1.14)$$

называются ковариантными производными объектов $\{\Lambda_j^j\}$ и $\{\nu_\alpha^j\}$ относительно связностей Γ , γ и Γ , γ , соответственно, [5], [16].

Компонентами разложения векторов ковариантных производных (1.13) и (1.14):

$$\vec{\Lambda}_{ij}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\Lambda}_{ij}^1 e_j, \quad (1.15)$$

$$\vec{\nu}_{\alpha k}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\alpha k}^2 e_j \quad (1.16)$$

относительно локального репера $\{\vec{\Lambda}_i, \vec{v}_\alpha\}$ являются, соответственно, следующие пары тензоров:

$$H_{ik}^j = (\Lambda_{ik}^L - \Lambda_i^K \Gamma_{Kk}^L + \Lambda_i^L \Upsilon_{ik}^L) \tilde{\Lambda}_L^j, \quad (1.17)$$

$$H_{ik}^\alpha = (\Lambda_{ik}^L - \Lambda_i^K \Gamma_{Kk}^L) \tilde{v}_L^\alpha, \quad (1.18)$$

$$l_{\alpha k}^i = (v_{\alpha k}^J - v_\alpha^K \Gamma_{Kk}^J) \tilde{\Lambda}_J^i, \quad (1.19)$$

$$l_{\alpha k}^\beta = (v_{\alpha k}^J - v_\alpha^K \Gamma_{Kk}^J + v_\gamma^J \Upsilon_{\alpha k}^\gamma) \tilde{v}_J^\beta. \quad (1.20)$$

В силу (1.17)–(1.20) и соотношений (1.8), из (1.13), (1.14) следует [16]:

$$\overset{1}{\Gamma_{ij}^y} \tilde{\Lambda}_{ij}^j = H_{ij}^k \Lambda_k^j + H_{ij}^\alpha v_\alpha^j, \quad (1.21)$$

$$\overset{2}{\Gamma_{\alpha j}^y} v_{\alpha j}^j = l_{\alpha j}^k \Lambda_k^j + l_{\alpha j}^\beta v_\beta^j, \quad (1.22)$$

а для ковариантных производных обращенных объектов $\tilde{\Lambda}_J^i, \tilde{v}_J^\alpha$ получаем [16]:

$$\overset{1}{\tilde{\Lambda}_{jk}^i} = -H_{ik}^j \tilde{\Lambda}_J^i - l_{\alpha k}^j \tilde{v}_J^\alpha, \quad (1.23)$$

$$\overset{2}{\tilde{v}_{jk}^\alpha} = -H_{ik}^\alpha \tilde{\Lambda}_J^i - l_{\beta k}^\alpha \tilde{v}_J^\beta. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.21), (1.22) названы [16] обобщенными уравнениями Гаусса—Вейнгартена, а (1.23), (1.24)—обобщенными уравнениями Ван дер Вардена—Бортолотти.

Необходимым и достаточным $\overset{1}{0}$ условием того, что связность $\overset{1}{\gamma}$ есть индуцированная связность γ , а связность $\overset{2}{\gamma}$ —вертикальная связность $\overset{*}{\gamma}$, является тождественное обращение в нуль тензоров H_{jk}^i и $l_{\beta k}^\alpha$, соответственно.

2. Типы подмногообразий M_m в многообразии почти комплексной структуры. Вещественное четномерное дифференцируемое многообразие M_n ($n=2q$) со структурными формами ω^J , на котором задано поле линейного однородного геометрического объекта $F = \{F_K^J\}$, определенное системой дифференциальных уравнений:

$$dF_K^J - F_L^J \omega_K^L + F_K^L \omega_L^J = F_{KL}^J \omega^L \quad (1.25)$$

такое, что выполняются соотношения

$$F_L^J F_K^L = -\delta_K^J, \quad (1.26)$$

называется многообразием почти комплексной структуры. F называется структурным объектом почти комплексной структуры.

Из этого определения следует, что почти комплексная структура является дифференциально-геометрической структурой первого порядка.

Если многообразие почти комплексной структуры $M_n(F)$ дополнительно оснащено полем невырожденного симметрического тензора G типа $(0,2)$, согласованного с почти комплексной структурой F , т. е. такого, что его относительные компоненты G_{JK} и компоненты F_K^J удовлетворяют соотношениям

$$F_J^L F_K^M G_{LM} - G_{JK} = 0, \quad (1.27)$$

то многообразие $M_n(F, G)$ называется почти эрмитовым многообразием, пара полей (F, G) — почти эрмитовой дифференциально-геометрической структурой, а тензор G — метрическим тензором.

В качестве следствия свойства (1.27) для почти эрмитова многообразия $M_n(F, G)$ устанавливаем следующие очевидные свойства.

1) Пусть векторы $\vec{X} = X^J \vec{e}_J$ и $\vec{Y} = Y^K \vec{e}_K$ определяют два векторных поля на $M_n(F, G)$. Если в каждой точке $x \in M_n(F, G)$ соответствующие векторы \vec{X}, \vec{Y} взаимно ортогональны в метрике G , т. е. $G(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$, то $G(F\vec{X}, F\vec{Y}) = 0$, т. е. образы их также взаимно ортогональны.

2) Вектор и его образ взаимно ортогональны в метрике G , т. е. $G(\vec{X}, F\vec{X}) = 0$.

3) Если вектор \vec{X} ортогонален соответствующему касательному пространству $T_x(M_m)$ к подмногообразию M_m , то его образ $F\vec{X}$ принадлежит этому касательному пространству.

1. Любая дифференциально-геометрическая структура со структурным объектом W , заданная на M_n , индуцирует на подмногообразии M_m определенную дифференциально-геометрическую структуру, структурным объектом которой является ограничение объекта W . В то же время на погруженном многообразии в первой дифференциальной окрестности естественно возникает структура, определенная полем фундаментального объекта первого порядка Λ (поле m -мерных касательных элементов). Пара структур (W, Λ) индуцирует на M_m новые дифференциально-геометрические структуры, структурными объектами которых являются объекты, охваченные объектами W, Λ . Так, например, если объект W определяет на M_n поле аффинора, то сразу же на M_m возникает возможность ввести поле линейных элементов $W\Lambda$ и др. В почти комплексном многообразии M_n , где таким оснащающим полем является поле объекта F почти комплексной структуры ($F^2 = -I$), касательному подпространству $T_x(M_m)$ размерности m подмногообразия M_m в каж-

дой точке $x \in M_m$ сопоставляется подпространство $FT_x(M_m)$ той же размерности. Появляется возможность выделения некоторых типов подмногообразий M_m , характеризуемых размерностью голоморфного касательного пространства

$$H_x(M_m) = T_x(M_m) \cap FT_x(M_m), \quad (1.28)$$

а также соотношением размерностей касательного пространства $T_{xR}(M_n)$ и голоморфного расширения касательного пространства $T_x^H(M_m)$:

$$T_x^H(M_m) = T_x(M_m) + FT_x(M_m) \quad (1.29)$$

в каждой точке $x \in M_m$.

Оснащение подмногообразия M_m дополнительными дифференциально-геометрическими структурами, например, различными нормально оснащающими полями ν , а также возможность продолжения полей W, Δ, ν на M_m позволяет строить различные поля геометрических объектов, охваченных этими полями и их продолжениями и, тем самым, открывает широкие возможности определения естественно возникающих на M_m дифференциально-геометрических структур, в том числе и структур высших дифференциальных порядков. Накладывая на компоненты таких охваченных объектов различные требования, мы также получаем возможность выделять разнообразные подклассы подмногообразий M_m и в то же время различных типов индуцированных на них структур. Поэтому процесс выявления подклассов подмногообразий M_m , даже в $M_n(F)$, по-видимому, неисчерпаем. Говоря о том, что проведена классификация подмногообразий M_m в многообразии M_n , мы подразумеваем, что она проведена лишь на базе каких-то выделенных критериев.

Рассмотрим теперь основные типы подмногообразий M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$, выделяемые на базе различных критериев.

2. Пусть подмногообразие M_m определено системой дифференциальных уравнений (1.5):

$$\omega^j = \Lambda_k^j \theta^k.$$

Ограничение поля структурного объекта F (1.25) на M_m определяется следующей системой уравнений

$$dF_{Kl}^j - F_{Kl}^j \omega_K^l + F_{Kl}^j \omega_L^j = F_{Kl}^j \theta^l, \quad (1.30)$$

где

$$F_{Kl}^j = F_{KL}^j \Lambda_l^i. \quad (1.31)$$

Яно и Исихара [55] ввели понятие f -подмногообразия.

Определение. m -мерное подмногообразие M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$, характеризуемое

тем, что в каждой точке $x \in M_m$

$$H_x(M_m) = T_x(M_m) \cap FT_x(M_m) \neq \{0\}$$

($H_x(M_m)$ определено в (1.28)) и $\dim H_x(M_m) = r$ постоянна на M_m , называется f -подмногообразием.

Очевидно, что r — четное. При этом предполагается, что $n \geq \dim T_x^H(M_m)$, где $T_x^H(M_m)$ определено в (1.29).

Если $2m > n$, то $r > 0$ и, следовательно, в $M_n(F)$ такое подмногообразие M_m по терминологии, принятой в [55], всегда является f -подмногообразием.

Пусть M_m в $M_n(F)$ является f -подмногообразием. Тогда в каждой точке $x \in M_m$ в голоморфном расширении $T_x^H(M_m)$ касательного пространства $T_x(M_m)$ существует подпространство $N_x(M_m)$ размерности $m-r$ такое, что $FN_x(M_m) \subset T_x(M_m)$ и $T_x^H(M_m) = T_x(M_m) + N_x(M_m)$.

Если $\dim T_x^H(M_m) < n$, то в каждой точке $x \in M_m$ в $T_x(M_n)$ существует подпространство $\bar{N}_x(M_m)$ размерности $(n-2m+r)$ такое, что $F\bar{N}_x(M_m) = \bar{N}_x(M_m)$ и $T_x(M_n) = T_x^H(M_m) + \bar{N}_x(M_m)$.

Над M_m , как над базой, возникают два векторных расслоения: $N(M_m)$ и $\bar{N}(M_m)$. Совокупность $(M_m, N(M_m), \bar{N}(M_m))$ названа [55] f -поверхностью, а M_m — ее базой. Возможные соотношения между n , m и r : $n \geq 2m-r$ и $0 < r < m$.

З а м е ч а н и е. Термин f -подмногообразие был, по-видимому, подсказан тем, что при таком выборе нормально оснащающего поля на M_m в $M_n(F)$ индуцируется f -структура (см., например, [5]).

В последние годы для вещественных подмногообразий в $M_n(F)$ и его подклассах введен термин родовое подмногообразие (generic submanifold) [25], [29], [56] и др.

О п р е д е л е н и е 1. Подмногообразие M_m называется родовым подмногообразием в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$, если размерность подпространства $H_x(M_m)$ постоянна на M_m и $H_x(M_m)$ определяет на M_m дифференцируемое распределение $H(M_m)$.

Распределение $H(M_m)$ называется голоморфным распределением.

Класс родовых подмногообразий очень широк, тем более, если считать, что для размерности $H_x(M_m)$ принимаются только естественные ограничения, т. е. $0 \leq \dim H_x(M_m) \leq m$.

Для граничных случаев в многообразии комплексной структуры вводятся также и следующие термины (см., например, [25]).

О п р е д е л е н и е 2. Родовое подмногообразие M_m в многообразии комплексной структуры называется чисто вещественным (rigely real), если $\dim H_x(M_m) = 0$.

Этот класс существует при $n \geq 2m$.

О п р е д е л е н и е 3. Родовое подмногообразие M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$ называется го-

ломорфным (или комплексным, или инвариантным), если $\dim H_x(M_m) = m$.

Замечание. Отметим, во-первых, что родовое подмногообразие, в том числе чисто вещественное подмногообразие, \bar{f} -подмногообразие и голоморфное подмногообразие определены как подмногообразия неметрического многообразия почти комплексной структуры $M_n(F)$; во-вторых, эти понятия введены без связи с нормально оснащающим полем. Выделение указанных выше типов подмногообразий основано лишь на соотношении размерностей подпространств $T_x(M_n)$, $T_x(M_m)$, $T_x^H(M_m)$, $H_x(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$.

Для большей четкости типизации мы введем термин собственно (properly) родовое подмногообразие.

Определение 4. Родовое подмногообразие будем называть собственно родовым подмногообразием, если размерность r подпространства $H_x(M_m)$ всюду постоянна на M_m и выполнены строгие неравенства $0 < r < m$.

Очевидно, что \bar{f} -поверхность есть собственно родовое подмногообразие, нормально оснащенное специальным образом выбранными полями нормалей.

3. В многообразии почти комплексной структуры, дополнительно оснащенном полем метрического тензора G , появляется возможность однозначно присоединить к подмногообразию M_m нормально оснащающее поле $(n-m)$ -мерных подпространств $T_x(M_m)^\perp$, образующих в каждой точке $x \in M_m$ ортогональное дополнение касательного пространства $T_x(M_m)$. В связи с этим естественно проводить более детальную типизацию подмногообразий M_m в $M_n(F, G)$, учитывая взаимное расположение четырех подпространств: $T_x(M_m)$, $FT_x(M_m)$, $T_x(M_m)^\perp$ и $FT_x(M_m)^\perp$ в каждой точке $x \in M_m$. Вопрос о допустимом взаимном расположении этих подпространств существенно связан с соотношением размерности и коразмерности подмногообразия M_m .

Пусть $M_n(F, G)$ — почти эрмитово многообразие и M_m — подмногообразие, изометрически погруженное в $M_n(F, G)$. Метрический тензор G индуцирует на M_m поле метрического тензора g :

$$g_{ij} = G_{JK} \Lambda_i^J \Lambda_j^K. \quad (1.32)$$

Если на многообразии M_m задано нормально оснащающее поле $v(M_m)$, то на M_m естественно возникают также поля объектов [16]:

$$g_{\alpha\beta} = G_{JK} v_\alpha^J v_\beta^K, \quad (1.33)$$

$$g_{i\alpha} = G_{JK} \Lambda_i^J v_\alpha^K. \quad (1.34)$$

Из (1.32) и (1.33), с учетом (1.8), получаем

$$G_{JK} \Lambda_k^K = g_{ki} \Lambda_j^i + g_{k\alpha} v_\alpha^\alpha, \quad (1.35)$$

$$G_{JK} v_\alpha^K = g_{\alpha i} \Lambda_j^i + g_{\alpha\beta} v_\beta^\beta. \quad (1.36)$$

Если нормально оснащающее поле $\nu(M_m)$ является ортогонально оснащающим полем, т. е. в каждой точке $x \in M_m$ подпространство $\nu_x(M_m)$ является ортогонально дополняющим $T_x(M_m)$ подпространством, то $g_{i\alpha} = 0$ и из (1.35) и (1.36) следует

$$G_{JK}\Lambda_k^K = g_{kl}\Lambda_j^l, \quad (1.37)$$

$$G_{JK}\nu_\alpha^K = g_{\alpha\beta}\nu_j^\beta. \quad (1.38)$$

Остановимся на основных известных типах M_m в $M_n(F, G)$.

Определение 5. Подмногообразие M_m в многообразии $M_n(F, G)$ называется вполне вещественным подмногообразием, если в каждой точке $x \in M_m$ $FT_x(M_m) \subset T_x(M_m)^\perp$.

Возможное соотношение m и n : $n > 2m$.

Определение 6. Подмногообразие M_m в многообразии $M_n(F, G)$ называется антиголоморфным подмногообразием, если в каждой точке $x \in M_m$ $FT_x(M_m)^\perp \subset T_x(M_m)$.

Возможное соотношение m и n : $n < 2m$.

Замечание. В метрическом почти комплексном многообразии $M_n(F, G)$ термин «родовое подмногообразие» отождествляется с термином «антиголоморфное подмногообразие» (см., например, [29], [40]).

Если в определениях 5 и 6 не требовать строгого включения, то случай равенства приводит оба раза к одному и тому же типу подмногообразия M_m .

Определение 7. Подмногообразие M_m в многообразии $M_n(F, G)$ называется антиинвариантным, если $FT_x(M_m)^\perp = T_x(M_m)$ (и, следовательно, $FT_x(M_m) = T_x(M_m)^\perp$).

При том возможное соотношение m и n : $n = 2m$.

Бежанку [22], [23], [24] ввел для подмногообразий M_m в $M_n(F, G)$ понятие CR -подмногообразия.

Определение 8. Подмногообразие M_m называется CR -подмногообразием в многообразии $M_n(F, G)$, если существует на M_n голоморфное распределение D (т. е. $FD = D$) такое, что ортогональное дополнение D_x^\perp элемента D_x в $T_x(M_m)$ — вполне вещественное, т. е. $FD_x^\perp \subset T_x(M_m)^\perp$.

В частности, если $\dim D_x^\perp = 0$ для всех $x \in M_m$, то CR -подмногообразие является голоморфным подмногообразием; если $D_x = 0$ для всех $x \in M_m$, то CR -подмногообразие является вполне вещественным многообразием.

Класс CR -подмногообразий достаточно широк, тем более, если включать в него вполне вещественные и голоморфные подмногообразия. Для большей конкретизации (см., например, Сато [40]) введен термин собственно CR -подмногообразия.

Определение 9. Собственно (прорег) CR -подмногообразием почти эрмитова многообразия $M_n(F, G)$ называется

CR -подмногообразии с нетривиальными голоморфным распределением и вполне вещественным распределением.

Аналогичный термин введен и для антиголоморфных подмногообразий [40].

Определение 10. Собственно (proper) антиголоморфным подмногообразием называется антиголоморфное подмногообразие с нетривиальными голоморфным распределением и вполне вещественным распределением.

В неметрических многообразиях почти комплексной структуры типизация подмногообразий менее разработана. В этом случае подмногообразии дополняются некоторыми нормальными полем и рассматриваются возможные типы подмногообразий, допускающие то или иное расположение элементов этого поля относительно касательного пространства в точке $x \in M_m$ и его образа.

Многие типы подмногообразий M_m , введенных в метрическом многообразии почти комплексной структуры $M_n(F, G)$, допускают обобщение на случай $M_n(F)$.

Снимается требование оснащения M_n полем метрического тензора, однозначно определяющего поле ортогональных дополнений касательного пространства в каждой точке $x \in M_m$. Любое нормально оснащающее поле, инвариантное относительно преобразований группы D_n^1 , внутренне присоединенное к M_m либо заданное на M_m , позволяет вводить различные типы подмногообразий M_m в $M_n(F)$.

Таким путем Н. Д. Поляков обобщил понятие антиинвариантного подмногообразия в многообразии почти контактной структуры и ввел тип $N(\sigma)$ -антиинвариантных подмногообразий [19].

3. Индуцированные структуры.

1. Из теории подмногообразий M_m в многообразии почти комплексной структуры известен следующий факт.

Теорема [18]. На поверхности M_m , погруженной в многообразие почти комплексной структуры F , оснащенной нормально оснащающим полем $\nu(M_m)$, в общем случае естественно возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура ранга m и коранга $n-m$.

Это утверждение справедливо для многообразия общего положения, т. е. для случая, когда на фундаментальный объект первого порядка подмногообразия, а также на структурные объекты не наложено никаких, умаляющих их общность, требований.

Как известно [11], [14], [18] $(f\xi\eta\rho)$ -структура на M_m определяется четырьмя полями структурных геометрических объектов: аффинором f , присоединенным к группе $Gl(m, R)$, аффинором ρ , присоединенным к группе $Gl(n-m, R)$, и линейными однородными объектами ξ и η , присоединенными к группе $Gl(m, R) \times Gl(n-m, R)$.

При надлежащем выборе векторных базисов адаптированного репера $R(\Lambda, \nu)$ инвариантные формы этих групп становятся определенными линейными комбинациями инвариантных форм группы D_n^1 [16].

Структурные объекты $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, индуцированной на M_m в многообразии $M_n(F)$, оснащенном нормально оснащающим полем $\nu(M_m)$, являются объектами, охваченными структурным аффинором F , фундаментальным объектом первого порядка $\{\Lambda_k^j\}$ и нормально оснащающим объектом $\{\nu_\alpha^j\}$ [11]:

$$\begin{aligned} f_j^i &= \Lambda_j^K F_K^j \Lambda_j^i; & \eta_i^\alpha &= \Lambda_i^K F_K^j \nu_j^\alpha; \\ \xi_\alpha^i &= -\Lambda_k^i F^k \nu_\alpha^j; & \rho_\beta^\alpha &= \nu_\beta^j F^k \nu_k^\alpha, \end{aligned} \quad (1.39)$$

и удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [11]:

$$\begin{aligned} df_j^i - f_k^i \theta_j^k + f_j^k \theta_k^i &= f_j^i \theta^k, \\ d\xi_\alpha^i - \xi_\beta^i \theta_\alpha^\beta + \xi_\alpha^k \theta_k^i &= \xi_\alpha^i \theta^k, \\ d\eta_i^\alpha - \eta_k^\alpha \theta_i^k + \eta_i^\beta \theta_\beta^\alpha &= \eta_i^\alpha \theta^k, \\ d\rho_\beta^\alpha - \rho_\gamma^\alpha \theta_\beta^\gamma + \rho_\beta^\gamma \theta_\gamma^\alpha &= \rho_\beta^\alpha \theta^k. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Для $(f\xi\eta\rho)$ -структуры наиболее общего типа выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f^2 &= -I + \eta^\alpha \otimes \xi_\alpha; \\ f(\xi_\alpha) &= -\rho_\alpha^\beta \xi_\beta; & \eta^\alpha f &= -\rho_\beta^\alpha \eta^\beta; \\ \rho_\alpha^\beta \rho_\gamma^\beta &= -\delta_\alpha^\beta + \eta^\beta(\xi_\alpha). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Объекты f, ξ, η, ρ являются коэффициентами в разложении образов базисных векторов репера $R(\Lambda, \nu)$ по этим векторам:

$$\begin{aligned} F\vec{\Lambda}_i &= f_i^k \vec{\Lambda}_k + \eta_i^\alpha \vec{\nu}_\alpha, \\ F\vec{\nu}_\alpha &= -\xi_\alpha^i \vec{\Lambda}_i + \rho_\beta^\alpha \vec{\nu}_\beta. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Если $M_n(F)$ дополнительно оснащено полем метрического тензора G , то на M_m индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$ -структура, т. е. $(fg\xi\eta\rho)$ -структура. Компоненты структурных объектов $(fg\xi\eta\rho)$ -структуры и компоненты индуцированного на M_m метрического тензора g (1.32), в дополнение к соотношениям (1.41), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} g_{ij} f_m^i f_k^j &= g_{mk} - g_{\beta i} f_m^i \eta_k^\beta + g_{\beta i} f_k^i \eta_m^\beta - g_{\nu\delta} \eta_m^\nu \eta_k^\delta, \\ g_{\alpha\beta} \rho_\gamma^\alpha \rho_\delta^\beta &= g_{\nu\delta} + g_{i\beta} \xi_\nu^i \rho_\delta^\beta + g_{k\beta} \rho_\gamma^\beta \xi_\delta^k - g_{ki} \xi_\delta^k \xi_\nu^i, \\ g_{i\alpha} f_i^\alpha \rho_\beta^\alpha &= g_{i\beta} - g_{\alpha k} \eta_i^\alpha \xi_\beta^k - g_{\alpha\nu} \rho_\beta^\nu \eta_i^\alpha + g_{km} f_i^m \xi_\beta^k. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Индукцированная на подмногообразии M_m $(f\xi\eta\rho)$ -структура в $M_n(F)$ тогда и только тогда будет внутренне присоединена к

M_m , когда нормально оснащающее поле $\nu(M_m)$ будет внутренне присоединено к M_m . Известно, что если в многообразии M_n задана некоторая линейная связность Γ , то фундаментальным объектом третьего порядка подмногообразия (поверхности) M_m можно охватить объект, определяющий нормально оснащающее поле $\nu(M_m)$. Для пространства аффинной связности такое поле $\nu(M_m)$ было построено Г. Ф. Лаптевым [8]. Построения были проведены в частично канонизированном репере, относительно которого компоненты фундаментального объекта первого порядка имели постоянные значения: $\Lambda_i^j = \delta_i^j$. В статье [16] приведен метод, позволяющий провести построение такого охвата без приведения компонент Λ_i^j к постоянным значениям. Этот метод был использован Б. Акматовым [1] для построения объекта, определяющего нормально оснащающее поле распределения m -мерных линейных элементов в многообразии $M_n(F)$.

$(f\xi\eta\rho)$ -структура наиболее общего типа на многообразии M_n была введена (см. [5], [14]) одним из авторов настоящей статьи (см. также [20]). Ранги матриц, составленных из компонент структурных объектов, предполагались при этом максимальными.

2. В математической литературе описаны и исследованы различные подклассы $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, при выделении которых используются разные критерии. Кратко они описаны в статьях [5], [14], [18], [20].

Структурные объекты ξ и η заданной на M_n $(f\xi\eta\rho)$ -структуры определяют на нем два распределения линейных элементов, согласованных с действием операторов f и ρ . Аналогичную геометрическую характеристику допускают и поля структурных объектов ξ и η индуцированной на M_m $(f\xi\eta\rho)$ -структуры [18].

Н. Д. Поляков [20] дал классификацию $(f\xi\eta\rho)$ -структур на четномерных и нечетномерных многообразиях, обладающих тем свойством, что распределения ξ и η определяют на M_n π -структуру. Найденные им типы $(f\xi\eta\rho)$ -структур естественно возникают на подмногообразиях M_m многообразия почти комплексной структуры, оснащенных различными полями нормально оснащающих подпространств. В основу классификации положено введенное Н. Д. Поляковым понятие рода $(f\xi\eta\rho)$ -структуры.

Индуцированная $(f\xi\eta\rho)$ -структура на нормально оснащенном подмногообразии M_m в многообразии почти комплексной структуры зависит как от типа подмногообразия, так и от выбранного нормально оснащающего поля $\nu(M_m)$, характеризуемого, в свою очередь (кроме других признаков), взаимным расположением его элементов $\nu_x(M_m)$ относительно их образов $F\nu_x(M_m)$ и образов соответствующих касательных пространств $T_x(M_m)$.

Одним из авторов настоящей статьи предложена классификация неметрических $(f\xi\eta\rho)$ -структур на подмногообразиях

M_m в многообразиях $M_n(F)$, основанная на исследовании рангов матриц, составленных из компонент структурных объектов, а также ранга матрицы $\|\rho^2 + I\|$. Классификация проводится отдельно для следующих соотношений размерности и коразмерности подмногообразия M_m : класс А. $n - m < m$; класс В. $n - m = m$; класс С. $n - m > m$.

Очевидно, что тип чисто вещественных подмногообразий (см. п. 2 определения 2) допускает только $(f\xi\eta\rho)$ -структуру класса С, голоморфные и собственно родовые подмногообразия — $(f\xi\eta\rho)$ -структуру любого из классов А, В, С. Далее классификация строится по иерархическому принципу по следующим критериям: I. $\text{rang} \|\eta_i^\alpha\|$; II. $\text{rang} \|\xi_\alpha^i\|$; III. $\text{rang} \|\eta_i^\alpha \xi_\beta^i\|$; IV. $\text{rang} \|\rho_\beta^\alpha\|$; V. $\text{rang} \|f_j^i\|$.

Наибольшее число подклассов допускает класс А.

На примере подмногообразий коразмерности 2 в $M_n(F)$ класс А проанализирован в [2].

3. Из продолженных объектов объекта почти комплексной структуры F , структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, а также объектов связности Γ и тангенциальной и нормальной связностей γ и γ строятся некоторые охваченные ими объекты такие, как тензор Нейенхейса:

$$N_{JK}^I = F_K^L F_{JL}^I - F_J^L F_{KL}^I + F_L^I (F_{KJ}^L - F_{JK}^L), \quad (1.44)$$

S-тензоры (см., например, [27], [55]) и другие линейные однородные объекты, которые также используются для выделения различных типов подмногообразий M_m в $M_n(F)$ и $M_n(F, G)$.

Будем исходить из того, что на $M_n(F)$ задана некоторая линейная связность Γ , определенная объектом Γ_{KL}^J таким, что

$$\omega \Gamma_{KL}^J - \Gamma_{IL}^J \omega_K^I - \Gamma_{KI}^J \omega_L^I + \Gamma_{KL}^I \omega_I^J - \Gamma_{KL}^I \Gamma_{IM}^J \omega^M + \omega_{KL}^J = \Gamma_{KLM}^J \omega^M. \quad (1.45)$$

Формы

$$\tilde{\omega}_K^J = \omega_K^J - \Gamma_{KL}^J \omega^L \quad (1.46)$$

удовлетворяют структурным уравнениям Картана — Лаптева [5] и, следовательно, являются формами связности.

Пусть подмногообразии M_m оснащено полем нормалей $\nu(M_m)$ (заданным или внутренне присоединенным к M_m). При этом в касательном расслоении $T(M_m)$ и нормальном расслоении $\nu(M_m)$, соответственно, может быть введена связность (тангенциальная и нормальная связности γ и γ), внутренне присоединенная к подмногообразию M_m и определяемая полями объектов, охваченных расширенными фундаментальными объектами (т. е. фундаментальными объектами, собственно говоря, и оснащающими объектами и их продолжениями).

Один из возможных путей присоединения связностей γ и γ описан в [16]. Две замечательные связности—индуцированная связность γ и вертикальная связность $\tilde{\gamma}$ —определяются формулами (1.9) и (1.10). Заметим, что это не единственный путь построения объектов связностей $\gamma, \tilde{\gamma}$.

При надлежащем выборе векторов, натягивающих, соответственно, касательное пространство $T_x(M_m)$ и нормальное пространство $\nu_x(M_m)$ в точке $x \in M_m$, дифференциальные уравнения полей объектов (1.6) $\{\Lambda_i^j\}$ и (1.7) $\{\nu_\alpha^j\}$ могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} d\Lambda_i^\alpha - \Lambda_k^\alpha \partial_i^k + \Lambda_l^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_i^\alpha &= \Lambda_{ik}^\alpha \omega^k, \\ d\nu_\alpha^i - \nu_\beta^i \partial_\alpha^\beta + \nu_\alpha^k \partial_k^i + \omega_\alpha^i &= \nu_{\alpha k}^i \omega^k, \\ d\nu_\beta^\alpha - \nu_\gamma^\alpha \partial_\beta^\gamma + \nu_\beta^\gamma \partial_\gamma^\alpha + \Lambda_k^\alpha \nu_\beta^\gamma \omega_\gamma^k + \nu_\alpha^k \omega_k^\beta &= \nu_{\alpha k}^\beta \omega^k, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где

$$\partial_k^i = \omega_k^i + \Lambda_k^\alpha \omega_\alpha^i, \quad \partial_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Lambda_i^\alpha \omega_\beta^i. \quad (1.48)$$

Формы

$$\tilde{\partial}_\beta^\alpha = \partial_\beta^\alpha - \gamma_{\beta k}^\alpha \omega^k \quad (1.49)$$

тогда и только тогда будут формами нормальной связности, когда будет задано на M_m поле объекта $\{\gamma_{\beta k}^\alpha\}$:

$$d\gamma_{\beta k}^\alpha - \gamma_{\beta l}^\alpha \partial_k^l - \gamma_{\gamma k}^\alpha \partial_\beta^\gamma + \gamma_{\beta k}^\gamma \partial_\gamma^\alpha + \partial_{\beta k}^\alpha = (\gamma_{\beta k l}^\alpha + \gamma_{\beta k}^\gamma \gamma_{\gamma l}^\alpha) \omega^l, \quad (1.50)$$

где

$$\partial_{\beta k}^\alpha = \omega_{\beta k}^\alpha - \Lambda_l^\alpha \omega_{\beta k}^l - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_\beta^i. \quad (1.51)$$

Следовательно, вопрос введения связности в нормальном расслоении сводится к заданию или построению объекта типа (1,2), компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (1.50).

С каждым нормально оснащающим полем $\nu(M_m)$ подмногообразия M_m ассоциируется семейство нормальных полей, порожденное возникающим в каждой точке $x \in M_m$ семейством нормально оснащающих объектов [14]:

$$\nu_\alpha^j(\tau) = \nu_\alpha^j + \tau \tilde{\xi}_\alpha^j, \quad (1.52)$$

где

$$\tilde{\xi}_\alpha^j = \Lambda_k^j \xi_\alpha^k$$

и ξ_α^k определены формулами (1.39).

Если исключить здесь из рассмотрения случай, когда $\text{rang} \|\xi_\alpha^k\|$ не максимален и, в частности, равен нулю, то можно

сказать, что каждому объекту $\{v_\alpha^j\}$ семейства (1.52) однозначно соответствует объект $\{F_K^j v_\alpha^K\}$ (его образ, полученный под действием на него аффинора F), также принадлежащий этому семейству. Следует отметить, что семейство (1.52) содержит один замечательный объект $\{v_\alpha^j(\tau_0)\}$, образ которого определяет подпространство ξ_x , натянутое на векторы $\vec{\xi}_\alpha \in T_x(M_m)$ и, следовательно, не определяет нормально оснащающего поля. Подпространство (ξ_x) играет роль «канонической касательной» семейства нормалей и, как следует из уравнений (1.42), такое нормально оснащающее поле $v(\tau_0)$ выделяется инвариантным признаком $\rho_\beta^\alpha \equiv 0$. Следовательно, индуцированная на M_m структура будет подклассом $(f\xi\eta\rho)$ -структуры (а именно, дополнительно нормально оснащенной f -структурой [5], [21]). Между нормальным расслоением $v(M_m)$ и расслоением $\xi(M_m)$ устанавливается изоморфизм $F^*: v(M_m) \rightarrow \xi(M_m)$, определенный как $F^*(X) = -F(X)$, где X — произвольный вектор, принадлежащий $v(M_m)$. При этом, если относительно локального репера вектор X определяется компонентами $x^\alpha v_\alpha^j$, то преобразованный вектор $F^*(X)$ определяется компонентами $(x^\alpha \xi_\alpha^i) \Lambda_i^j$ [55].

Если задать теперь связность $\dot{\gamma}$ в нормальном расслоении $v(M_m)$ (или, в частности, принять в качестве такой связности вертикальную связность $\dot{\gamma}^*$ (1.10)), то в расслоении $\xi(M_m)$ будет возникать связность, также определяемая объектом $\dot{\gamma}$. Это обстоятельство используется часто при выделении типов подмногообразий M_m в $M_n(F)$ (см., например, [55]), определяемых продолженными структурными объектами почти комплексной структуры F и индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ -структуры.

По определению, $(f\xi\eta\rho)$ -структура, индуцированная на M_m в $M_n(F)$, называется нормальной, если почти комплексная структура F -интегрируема.

Определение. Подмногообразие M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$, оснащенное полем нормалей $v(M_m)$, называется нормальным относительно нормальной связности $\dot{\gamma}$, если индуцированная на нем этим нормально оснащающим полем $(f\xi\eta\rho)$ -структура — нормальна.

Замечание. С подмногообразием M_m в почти комплексном многообразии $M_n(F)$ с заданной симметричной связностью Γ , на котором задано нормально оснащающее поле $v(M_m)$, индуцирующее на M_m $(f\xi\eta\rho)$ -структуру, ассоциируются шесть геометрических объектов, часто называемых S -объектами, охваченных продолженными структурными объектами $\{f_j^i, f_{jk}^i\}$, $\{\xi_\alpha^i, \xi_{\alpha k}^i\}$, $\{\eta_i^\alpha, \eta_{ik}^\alpha\}$, $\{\rho_\beta^\alpha, \rho_{\beta k}^\alpha\}$ и объектами $\dot{\gamma}_{jk}^i$ и $\dot{\gamma}_{\beta k}^\alpha$ тангенциальной и нор-

мальной связностей и связности Γ : S_{jk}^i , S_{jk}^α , $S_{\beta k}^i$, $S_{\beta k}^\alpha$, $S_{\alpha\beta}^i$, $S_{\alpha\beta}^\gamma$, которые естественно возникают при построении объектов $N_{JK}^i \Lambda_j^i \Lambda_k^k$, $N_{JK}^i \Lambda_j^\alpha \Lambda_k^\beta$, $N_{JK}^i \nu_\alpha^j \nu_\beta^k$ (см., [55] для подкласса $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, выделяемого требованием $0 < \text{rang}(\rho) < n - m$).

Для комплексного многообразия $M_n(F)$ (т. е. $N_{JK}^i = 0$) с заданной связностью Γ Яно и Исихара доказывают теорему, устанавливающую условия, при которых оснащенное полем нормалей подмногообразие M_m — нормально.

Теорема [55]. В комплексном многообразии M_n для того чтобы подмногообразие M_m было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$S_{jk}^i = 0 \text{ и } R_{\beta jk}^\alpha = 0,$$

где $R_{\beta jk}^\alpha$ — тензор кривизны нормальной связности γ^* .

Отметим, что из формул охвата тензора S_{ij}^k следует, что он не зависит от тангенциальной связности γ .

$(f\xi\eta\rho)$ -структура называется интегрируемой, если ранг матрицы аффинора f — четный и существует система координат,

относительно которой $(f) = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема [55]. Для того чтобы $(f\xi\eta\rho)$ -структура была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы $N_{jk}^i(f) = 0$, где

$$N_{jk}^i(f) \stackrel{\text{def}}{=} f^k f_{jl}^i - f_j^l f_{kl}^i + f_l^i (f_{kj}^l - f_{jk}^l). \quad (1.53)$$

Тензор $N_{jk}^i(f)$ будем называть тензором Нейенхейса $(f\xi\eta\rho)$ -структуры.

Замечание. В работе [55] Яно и Исихара рассматривают подмногообразие M_m в $M_n(F)$, нормально оснащенное $(n - m)$ полями векторов \vec{C}_α таких, что векторы $\vec{C}_{\alpha i} \in FT_x(M_m)$, а $\vec{C}_{\alpha n}$ натягивают инвариантное относительно F подпространство и $n - m < m$. При этом индуцируемая на M_m структура есть подкласс $(f\xi\eta\rho)$ -структуры.

Тензоры S были введены Исихарой [27] при исследовании нормальных f -структур. Для такой структуры известны пять тензоров. Они приведены также и в совместной работе Яно и Исихара [55]. Для $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, как было указано выше, это семейство тензоров S состоит из шести тензоров. Для $(fuv\lambda)$ -структуры они были получены Судзуки [43], а его построения перенесены на случай $(fU_\alpha u^i \lambda_\alpha^i)$ -структуры Башкене [4]. Для $(f\xi\eta\rho)$ -структур общего типа эти тензоры получены одним из авторов настоящей статьи.

В большинстве работ, посвященных исследованию подмногообразий M_m в $M_n(F)$, предполагается, что подмногообразие M_m

оснащено полем нормалей $\nu(M_m)$, индуцирующим на M_m реперированную f -структуру (см. [21]), т. е. предполагается, что $\rho^{\alpha} \equiv 0$.

На подмногообразиях M_m тензоры S были определены именно для этого подкласса $(f\xi\eta\rho)$ -структур, при некоторых дополнительных условиях: M_n — комплексное многообразие и, следовательно, $N_{KL}^J \equiv 0$, а следовательно, существует связность Γ такая [51], [52], что $\tilde{F}_{KL}^J = 0$ (см. [55]), M_n — келерово многообразие и Γ — риманова связность, следовательно, также $\tilde{F}_{KL}^J = 0$, M_n — евклидово пространство.

§ 2. ПОДМНОГООБРАЗИЕ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 (ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ) В МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

Геометрия вещественной гиперповерхности в многообразии почти комплексной структуры обладает определенной спецификой.

Наиболее ранние исследования гиперповерхности в многообразии почти комплексной структуры относятся к началу шестидесятых годов. Следует отметить работы Сасаки [39], Тасиро [45], Такидзавы [44], Окумуры [35], [36], [37] и др.

Обращаясь к типизации подмногообразия M_m в многообразии $M_n(F)$, приведенной в п. 2, § 1, отмечаем, что не существует гиперповерхностей вполне вещественных, равно как не существует и голоморфных гиперповерхностей. Следовательно, гиперповерхности относятся к типу собственно родовых подмногообразий (см. § 1, п. 2, определение 4).

В наиболее ранних исследованиях на гиперповерхности в $M_n(F)$ (см. [45], [46], [54] и др.) было установлено существование почти контактной структуры. Это в какой-то степени обусловило исследование геометрии гиперповерхности и направление по пути изучения свойств, непосредственно связанных со свойствами почти контактной структуры.

Библиография исследований гиперповерхности в многообразии почти комплексной структуры, их различных подклассах и особенно в метрических многообразиях почти комплексной структуры достаточно богата и преимущественно содержит исследования японской школы.

Под новым углом зрения исследование гиперповерхности начато недавно румынским геометром Бежанку [23], который изучает свойства гиперповерхности, в связи с возникающей на ней CR -структурой (см. п. 2, § 1).

Однако можно отметить, что остаются незатронутыми еще многие вопросы дифференциальной геометрии гиперповерхности в $M_n(F)$.

Пусть гиперповерхность M_{n-1} в $M_n(F)$ задана системой дифференциальных уравнений (1.5):

$$\omega^j = \Lambda_k^j \theta^k.$$

Будем считать, что в многообразии $M_n(F)$ задана симметрическая линейная связность, определяемая полем (1.45) объекта Γ .

При этих обстоятельствах на M_{n-1} можно построить внутренне присоединенные к гиперповерхности различные поля одномерных нормалей, определенные фундаментальным объектом третьего порядка и более высоких порядков [8].

В связи с этим, в дальнейшем изложении, если это не конкретизируется, говоря о поле нормалей на M_{n-1} , мы будем иметь в виду внутренне присоединенное к ней поле нормалей.

Поле одномерных нормалей ν на M_{n-1} определяется дифференциальным уравнением

$$d\nu_n^j + \nu_n^k \omega_k^j - \nu_n^j \theta_n^n = \nu_n^k \theta^k. \quad (2.1)$$

Выбирая надлежащим образом некоторый нормирующий множитель и заменяя функции ν_n^j функциями $\bar{\nu}^j = \lambda \nu_n^j$, можно привести уравнения поля нормалей к виду

$$d\bar{\nu}^j + \bar{\nu}^k \omega_k^j = \bar{\nu}^j \theta^k.$$

Если это не будет оговорено специально, мы будем считать, что уравнения поля нормалей имеют вид (2.1). Также в написании компонент различных геометрических объектов, аналогичных введенным для подмногообразий M_m коразмерности $l > 1$, не будем опускать индекс n , если это не отмечено специально. При этом уравнения, определяющие компоненты охваченных объектов и дифференциальные уравнения полей используемых объектов, сохраняют вид, указанный в § 1 лишь с оговоркой, что индекс α принимает одно значение n .

Поле

$$d\Lambda_k^j - \Lambda_l^j \theta_k^l + \Lambda_k^k \omega_k^j = \Lambda_{kl}^j \theta^l \quad (2.2)$$

определяет на M_{n-1} поле касательных пространств. При $\theta^i = 0$ формы θ_k^i становятся инвариантными формами группы, представленной в каждом локальном пространстве Λ_x , как группа преобразований векторного репера, а θ_n^n в уравнениях (2.1) — инвариантной формой одночленной группы, действующей в одномерном нормальном пространстве N_x .

1. Индуцированные структуры.

1. На оснащенной полем нормалей $\nu(M_{n-1})$ гиперповерхности M_{n-1} в общем случае индуцируется $(f\xi\eta\rho)$ -структура [15], определенная полями объектов $f_j^i, \xi_n^i, \eta_n^n, \rho_n^n \equiv \rho$, для которых выполняются конечные соотношения (1.41) и дифференциальные уравнения (1.40).

З а м е ч а н и е. Из уравнений (1.40) следует, что, в случае гиперповерхности, ρ определяют поле абсолютного инварианта

[7], [17]. Уравнения (1.42) также сохраняют свой вид:

$$F\vec{\Lambda}_i = f_i^k \vec{\Lambda}_k + \eta_i^n \vec{v}_n, \quad F\vec{v}_n = -\xi_n^i \vec{\Lambda}_i + \rho \vec{v}_n. \quad (2.3)$$

Размерность голоморфного касательного пространства $H_x(M_{n-1}) = \Lambda_x \cap F\Lambda_x$ равна $n-2$ в каждой точке $x \in M_{n-1}$. Поле объекта $\{\eta_i^n\}$ определяет на M_{n-1} распределение голоморфных касательных пространств $H_x(M_{n-1})$. Далее это поле будем обозначать D .

Анализируя возможность понижения значений рангов матриц структурных объектов индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, устанавливаем, что:

— ранг матрицы $\{\eta_i^n\}$ всегда максимален, т. е. равен 1, так как в локальной системе координат уравнение $\eta_i^n x^i = 0$ определяет в касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$ соответствующее голоморфное касательное пространство;

— ранг матрицы $\{\xi_n^i\}$ не может быть меньше единицы (т. е. он равен единице), так как в противном случае следовало бы, что $F\vec{v}_n = \rho \vec{v}_n$, что невозможно;

— ранг $\|\eta_i^n \xi_n^i\| = \text{ранг} \|\rho^2 + I\| = 1$ при любом ρ . Следовательно, $\vec{\xi}_n \notin H_x(M_{n-1})$ и поля объектов ξ и η определяют на M_{n-1} π -структуру;

— если $\rho \equiv 0$, то индуцированная структура является подклассом $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, а именно, почти контактной структурой. При этом ранг f понижается на единицу. Структура индуцирована полем нормалей v таким, что в каждой точке $x \in M_{n-1}$ \vec{v}_n — образ $\vec{\xi}_n$, полученный под действием аффинора F и, следовательно, $\vec{v}_x \in F\Lambda_x$. Конечные соотношения (1.41) принимают при этом вид:

$$\begin{aligned} f^2 &= -I + \eta \otimes \xi, & f(\xi) &= 0, & \eta \circ f &= 0, \\ \eta(\xi) &= 1, & \text{ранг} \|f\| &= n-2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. Так как $FD = D$, то в каждой точке $x \in M_{n-1}$, если $\vec{V} \in D_x$, то $F\vec{V} \in D_x$. Тогда можно ввести на M_{n-1} поле тензора J типа (1.1) такое, что $JV = FV$. При этом из $F^2 = -I$ следует $J^2 = -I_H$, где I_H имеет ранг $n-2$.

Итак, распределение D несет почти комплексную структуру J , индуцированную структурой F .

Распределение D не зависит от выбора поля нормалей v . Заменяя нормаль v другой нормалью как принадлежащей плоскости, натянутой на v и Fv (т. е. нормалью из семейства (1.52)), так и не принадлежащей этой плоскости, устанавливаем [3], что при этом η лишь умножается на некоторый множитель.

Итак, на гиперповерхности M_{n-1} в $M_n(F)$ индуцируется T -структура [5], определенная распределением линейных эле-

ментов коразмерности 2, оснащенным почти комплексной структурой J .

3. Если на $M_n(F)$ задано поле метрического тензора G_{JK} , согласованного с почти комплексной структурой F , т. е. такого, что выполняются соотношения (1.27), то на M_{n-1} , оснащенной полем нормалей ν , индуцируются тензоры (1.32), (1.33)

$$g_{ij} = G_{JK} \Lambda_i^J \Lambda_j^K, \quad g_{in} = G_{JK} \Lambda_i^J \nu_n^K \quad (2.5)$$

и относительный инвариант (1.34)

$$g_{nn} = G_{JK} \nu_n^J \nu_n^K. \quad (2.6)$$

Соответственно на M_{n-1} индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$ -структура, определенная объектами f, ξ, η, ρ и g .

Если нормаль ν_x в каждой точке $x \in M_{n-1}$ ортогональна касательному пространству $T_x(M_{n-1})$, то $g_{in} = 0$ и, следовательно, $G_{JK} \Lambda_i^J \nu_n^K = 0$. На M_{n-1} индуцируется метрическая почти контактная $(fg\xi\eta)$ -структура (или почти греева структура). Компоненты структурных объектов удовлетворяют соотношениям (2.4) и следующим соотношениям:

$$g_{ik} f_j^l f_l^k = g_{ji} - \eta_j^n \eta_i^n g_{nn},$$

$$g_{ik} \xi_n^k = g_{in} \eta_i^n.$$

Поле нормалей, ортогональных касательным пространствам, обозначим ν^\perp .

4. На вещественной гиперповерхности M_{n-1} в многообразии $M_n(F, G)$, оснащенной полем нормалей ν^\perp , естественно индуцируется CR -структура [24]. Действительно, за распределение D^\perp принимается поле образов нормалей: $F\nu^\perp$. Элементы распределения D являются в каждой точке $x \in M_{n-1}$ ортогональными дополнениями для $F\nu_x^\perp$ относительно индуцированной метрики g_{ij} (2.5).

2. Поля некоторых геометрических объектов высших порядков на M_{n-1} .

1. Будем считать, что векторы репера $R(\Lambda, \nu)$ в локальных пространствах выбраны так, что формы θ_j^h и θ_n^n имеют, соответственно, строение [16]:

$$\theta_j^l = \omega_j^l + \Lambda_j^n \omega_n^l,$$

$$\theta_n^n = \omega_n^n - \Lambda_i^n \omega_n^i$$

и сохраним для них обозначения $\vartheta_j^l, \vartheta_n^n$, соответственно, введенные в § 1.

Учитывая, что, по предположению, в $M_n(F)$ задана связность Γ и считая, что в касательном и нормальном расслоениях введены, соответственно, тангенциальная $\overset{1}{\gamma}$ и нормальная связности $\overset{2}{\gamma}$ и $\overset{2}{\gamma}$, определяемые объектами γ_{jk}^1 и γ_{nk}^2 , мы можем пре-

образовать формы $\omega_K^J, \vartheta_j^i, \vartheta_n^n$ по формулам:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_K^J &= \omega_K^J - \Gamma_{KL}^J \omega^L, \\ \tilde{\vartheta}_j^i &= \vartheta_j^i - \gamma_{jk}^i \theta^k, \\ \tilde{\vartheta}_n^n &= \vartheta_n^n - \gamma_{nk}^n \theta^k.\end{aligned}\quad (2.7)$$

При этом новые формы $\tilde{\omega}_K^J, \tilde{\vartheta}_j^i, \tilde{\vartheta}_n^n$ удовлетворяют условиям Картана—Лаптева [5] и, следовательно, являются формами связности.

2. Уравнения (1.21)—(1.24) для гиперповерхности, оснащенной полем нормалей ν , сохраняют тот же вид, а компоненты тензоров (1.17)—(1.20) имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}H_{ih}^j &= (\Lambda_{ik}^L - \Lambda_i^K \Gamma_{Kk}^L + \Lambda_i^L \gamma_{ik}^j) \Lambda_L^j, \\ H_{ih}^n &= (\Lambda_{ik}^L - \Lambda_i^K \Gamma_{Kk}^L) \nu_n^j, \\ l_{nk}^i &= (\nu_{nk}^j - \nu_n^K \Gamma_{Kk}^j) \Lambda_j^i, \\ l_{nk}^n &\equiv l_k = (\nu_{nk}^j - \nu_n^K \Gamma_{Kk}^j + \nu_n^j \gamma_{nk}^2) \nu_n^j.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Если в качестве связности $\overset{1}{\gamma}$ выбрать индуцированную связность $\overset{0}{\gamma}$ (1.9), то тензор $\{H_{jk}^i\}$ тождественно обратится в нуль.

В дальнейшем будем всюду считать, что $H_{jk}^i = 0, \overset{1}{\gamma} = \overset{0}{\gamma}$ и уравнения (1.21) и (1.23) имеют вид:

$$\tilde{\Lambda}_{ij}^j = H_{ij}^n \nu_n^j, \quad (2.9)$$

$$\tilde{\Lambda}_{jk}^i = -l_{nk}^i \nu_n^j. \quad (2.10)$$

Используя формулы (1.39), определяющие компоненты индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ -структуры, с учетом уравнений (1.21), (1.24), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{je}^i &= \tilde{F}_{jL}^K \Lambda_j^L \Lambda_K^i \Lambda_L^* - \xi_n^i H_{ji}^n - \eta_j^i l_{ni}^i, \\ \tilde{\xi}_{ni}^i &= \tilde{F}_{KL}^J \nu_n^K \Lambda_i^L \Lambda_J^* + (f_k^i + \rho \delta_k^i) l_{ni}^k - \xi_n^i l_{ni}^i, \\ \tilde{\eta}_{ni}^i &= \tilde{F}_{jL}^K \Lambda_j^L \Lambda_i^* \nu_n^K - f_i^k H_{ki}^n - \eta_i^i l_{ni}^i, \\ \tilde{\rho}_{ni}^n &\equiv \tilde{\rho}_i = \tilde{F}_{KL}^J \nu_n^K \Lambda_i^L \nu_n^J + \xi_n^k H_{ki}^n + \eta_k^i l_{ni}^k - \rho l_i^i.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем значок « \sim » над компонентами ковариантной производной означает, что ковариантная производная была вычислена в связностях $\overset{0}{\Gamma}, \overset{0}{\gamma}, \overset{0}{\nu}$.

Для почти контактной гиперповерхности в почти комплексном многообразии аналогичные уравнения были получены Та-сиро [47], [45], [46].

3. Почти комплексное многообразие $M_n(F)$ тогда и только тогда будет комплексным, когда тензор Нейенхейса (1.44)

$$N_{JK}^I = F_K^L F_{JL}^I - F_J^L F_{KL}^I + F_L^I (F_{KJ}^L - F_{JK}^L)$$

обращается в нуль.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы F был комплексной структурой, является существование такой симметрической связности Γ в $M_n(F)$, относительно которой ковариантная производная структурного аффинора F равна нулю, т. е.

$$\nabla_L F_K^J \equiv \tilde{F}_{KL}^J = 0$$

(см., например, [51], [52]).

Если многообразии $M_n(F)$ — комплексное и связность Γ есть F -связность [5], то $\nabla_L F_K^J = 0$ и, следовательно, $\Lambda_j^L \nabla_L F_K^J = 0$. Уравнения (2.11) принимают при этом такой вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ji}^l &= -\xi_n^i H_{ji}^n - \eta_j^n l_{ni}^l, \\ \tilde{\xi}_{ni}^l &= (f_{ki}^l + \rho \delta_k^l) l_{ni}^k - \xi_n^i l_i^l, \\ \tilde{\eta}_{il}^n &= -f_i^k H_{kl}^n - \eta_i^n l_l^l, \\ \tilde{\rho}_l &= \xi_n^k H_{kl}^n + \eta_k^n l_{ni}^k - \rho l_l^l. \end{aligned} \quad (2.12)$$

4. Величины

$$\begin{aligned} T_{ji}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{jL}^K \Lambda_j^J \Lambda_L^i \Lambda_K^*{}^i; & T_{ni}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{KL}^J \nu_n^K \Lambda_L^i \Lambda_J^*{}^i; \\ T_{il}^n &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{jL}^K \Lambda_j^J \Lambda_L^i \nu_K^n; & T_{ni}^n &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{KL}^J \nu_n^K \Lambda_L^i \nu_J^n \end{aligned} \quad (2.13)$$

определяют 4 тензорных поля на M_{n-1} . Для гиперповерхности M_{n-1} в $M_n(F, G)$, на которой индуцирована почти контактная структура, аналогичные тензоры были использованы Нагао [33] при исследовании гиперповерхности в качестве критерия для выделения классов многообразий $M_n(F, G)$. Об этом будет сказано дальше (см. п.п. 3.2 и 3.3).

5. Известно (см., например, [5]), что с почти контактной структурой $(f\xi\eta)$, заданной на нечетномерном многообразии M_n , ассоциируются 4 S -тензора.

Поля тензоров аналогичного строения определяются на гиперповерхности M_{n-1} в многообразии почти комплексной структуры, индуцированной на ней почти контактной структурой $(f\xi\eta)$:

$$\begin{aligned} 1. S_{kj}^i &= f_k^i \tilde{f}_{ji}^l - f_j^l \tilde{f}_{kl}^i - (\tilde{f}_{jk}^l - \tilde{f}_{kj}^l) f_l^i + (\tilde{\eta}_{jk}^n - \tilde{\eta}_{kj}^n) \xi_n^i, \\ 2. S_{kj}^n &= f_k^l (\tilde{\eta}_{jl}^n - \tilde{\eta}_{lj}^n) - f_j^l (\tilde{\eta}_{kl}^n - \tilde{\eta}_{lk}^n), \\ 3. S_{nj}^i &= \xi_n^i \tilde{f}_{ji}^l - f_j^l \tilde{\xi}_{ni}^l + f_l^i \tilde{\xi}_{nj}^l, \\ 4. S_{nj}^n &= \xi_n^i \tilde{\eta}_{ji}^n + \tilde{\xi}_{nj}^i \eta_i^n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Определение. Если $S_{kj}^i \equiv 0$, то $(f\xi\eta)$ -структура называется нормальной.

Тензор S_{jk}^i называется тензором кручения $(f\xi\eta)$ -структуры [28].

Известен также тензор $\{L_{kj}^n\}$, который некоторыми авторами именуется тензором Леви [53]. Связь его с тензорами S выражается соотношением:

$$S_{kj}^n = L_{kj}^n - L_{jk}^n. \quad (2.15)$$

З а м е ч а н и е. Тензоры S почти контактной структуры связаны рядом линейных зависимостей, из которых следует, что если первый тензор S равен нулю, то равны нулю и остальные тензоры S . Если равен нулю второй либо третий, то равен нулю и четвертый тензор S (см. [33]).

3. Геометрия почти контактной гиперповерхности в $M_n(F)$.

Определение. Гиперповерхность M_{n-1} в многообразии $M_n(F)$ будем называть почти контактной (в частности, контактной), если нормально оснащающее поле ν индуцирует на ней почти контактную (контактную) структуру.

Пусть M_{n-1} — почти контактная гиперповерхность. Следовательно, индуцированная структура определяется объектами f, ξ, η , а $\rho \equiv 0$. Для структурных объектов выполняются соотношения (2.4), а в формулах (2.3) и (2.11) следует учитывать, что $\rho = 0$ и $\rho_i = 0$. Если многообразие $M_n(F)$ комплексное, то получаем из (2.12):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{jk}^l &= -H_{jk}^n \xi_n^i - l_{nk}^i \eta_j^n, & \tilde{\xi}_{nk}^i &= l_{nk}^i f_j^i - l_k \xi_n^i, \\ \tilde{\eta}_{jk}^n &= -H_{jk}^n f_j^i - l_k \eta_j^n, & H_{kl}^n \xi_n^k + \eta_n^k l_{kl}^n &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

1. В [53] Яно и Исихара изучают вещественную почти контактную гиперповерхности в комплексном многообразии $M_n(F)$. Для гиперповерхности M_{n-1} $(f\xi\eta)$ -структуры в многообразии $M_n(F)$ комплексной структуры в предположении, что Γ есть F -связность, $\gamma = \nu$ и γ — произвольная связность в нормальном расслоении, строение компонент тензоров (2.14), с учетом равенств (2.16), приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} S_{kj}^i &= (f_j^i l_{nk}^i - l_{nk}^i f_j^i - l_k \xi_n^i) \eta_j^n - (f_j^i l_{nj}^i - l_{nj}^i f_j^i - l_j \xi_n^i) \eta_k^n, \\ S_{kj}^n &= (\eta_k^n H_{mj}^n - \eta_j^n H_{mk}^n) \xi_n^m + l_i (f_j^i \eta_k^n - f_k^i \eta_j^n), \\ S_{nj}^i &= (l_{nj}^i + f_j^k f_i^l l_{nk}^l) - l_{nk}^i \xi_n^k \eta_j^n - f_j^k l_k \xi_n^i, \\ S_{nj}^n &= l_j - l_k \xi_n^k \eta_j^n - H_{kl}^n \xi_n^k f_j^l. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Определение. Распределение D называется распределением нулевого кручения, если $S_{jk}^i \equiv 0 \pmod{\eta_j^n, \eta_k^n}$.

Теорема [53]. Для вещественной гиперповерхности M_{n-1} в комплексном многообразии $M_n(F)$ индуцированное распределение D имеет всегда нулевое кручение.

Учитывая (2.15) и (2.14) для тензора L_{kj}^n , получаем

$$L_{kj}^n = f_k^l (\tilde{\eta}_{jl}^n - \tilde{\eta}_{lj}^n). \quad (2.18)$$

Подставив в (2.18) выражения для $\tilde{\eta}_{jl}^n$ из (2.16), получим для почти контактной гиперповерхности в многообразии $M_n(F)$ комплексной структуры следующее выражение:

$$L_{kj}^n = - (f_k^l f_j^m H_{lm}^n + H_{kj}^n) + \xi_n^m \eta_k^n H_{jm}^n - f_k^l l_l \eta_j^n. \quad (2.19)$$

Теорема 2 [53]. Для вещественной гиперповерхности M_{n-1} в комплексном многообразии $M_n(F)$ компоненты тензора Леви почти контактной структуры, индуцированной на M_{n-1} полем нормалей ν , удовлетворяют условию

$$L_{kj}^n \equiv - (H_{kj}^n + f_k^l f_j^m H_{lm}^n) \pmod{\eta_k^n, \eta_j^n}. \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что

$$L(X, Y) = L(Y, X), \quad L(JX, JY) = L(X, Y) \quad (2.21)$$

для любой пары векторных полей, принадлежащих распределению D почти комплексной структуры J .

Ранг тензора L называется рангом распределения D . Если ранг L максимален, то распределение D называется невырожденным [28].

Теорема 3 [53]. Пусть $(f\xi\eta)$ — почти контактная структура, индуцированная на вещественной гиперповерхности M_{n-1} заданием на ней нормально оснащающего поля ν . Тогда $(f\xi\eta)$ -структура нормальна тогда и только тогда, когда

$$(f_l^i l_{nk}^i - f_k^l l_{nl}^i - l_k \xi_n^i) \equiv 0 \pmod{\eta_k^n}. \quad (2.22)$$

З а м е ч а н и е. По определению, запись

$$A_{jk}^i \equiv 0 \pmod{\eta_l^n, \eta_j^n} \quad (2.23)$$

означает, что компоненты тензорного поля A имеют следующее строение

$$A_{jk}^i = \eta_j^n P_{nk}^i + \eta_k^n Q_{nj}^i,$$

где P и Q — некоторые тензорные поля. Условия (2.23) выполняются тогда и только тогда, когда $A_{jk}^i \omega^j \nu^k = 0$ для любых векторных полей ω^j, ν^k , принадлежащих распределению D .

Тасиро [45], [46], [47] изучает почти контактную гиперповерхность в почти комплексном многообразии. Тензоры S записываются через посредство тензоров T (2.13).

Вводится система величин, образующая тензор:

$$k_{nj}^i = l_{nj}^i - \eta_j^n \xi_n^k l_{nk}^i + f_j^k (l_{nk}^i f_l^i + l_k \xi_n^i + \nu_n^j \Lambda_k^l \Lambda_{Kl}^i \bar{F}_{Lj}^K). \quad (2.24)$$

Теорема [45], [46]. Пусть $M_n(F)$ — комплексное многообразие и M_{n-1} — ориентированная гиперповерхность. Тогда условия, приведенные в каждой из следующих троек, эквивалентны и из одного следует второе:

(1) Индуцированная почти контактная структура на M_{n-1} нормальна, т. е.

$$S_{jk}^i = 0 \Leftrightarrow S_{nj}^i = 0 \Leftrightarrow L_{nj}^i = 0;$$

(2)

$$S_{ij}^n = 0 \Leftrightarrow S_{nj}^n = 0 \Leftrightarrow L_{nj}^k \eta_k^n = 0.$$

2. Мишра [31] исследует гиперповерхность M_{n-1} в почти эрмитовом многообразии $M_n(F, G)$. Метрический тензор G согласован со структурным тензором F , т. е. в $M_n(F, G)$ выполнены условия (1.27). На M_{n-1} индуцируется поле g_{ij} (2.5) метрического тензора. В $M_n(F, G)$ естественно возникает риманова связность Γ .

Гиперповерхность оснащается ортогонально оснащающим полем единичных векторов \vec{C}_n . При этом из (2.5) и (2.6) следует $g_{in} = 0$, $g_{nn} = 1$.

Заметим, что при таком оснащении формы θ_n^n становятся линейными комбинациями главных форм θ^i : $\theta_n^n = -\frac{1}{2} g_{nnk} \theta^k$, где $g_{nnk} = 2G_{JK} C_n^J \vec{C}_{nk}^K$. На M_{n-1} индуцируется почти греева структура. В расслоении нормалей $S(M_{n-1})$ индуцируется внешняя связность $\overset{*}{\gamma}$ (1.10) с нулевым тензором кривизны r_{nj}^k . Фундаментальные тензоры (2.8) имеют следующие значения

$$H_{jk}^i = 0, \quad l_{nk}^n \equiv l_k = 0, \quad H_{jk}^n = -g_{ji} l_{nk}^i, \quad (2.23)$$

и уравнения (1.21) и (1.22) принимают вид:

$$\overset{0}{\Lambda}_{ij}^{\Gamma, \gamma} = H_{ij}^n C_n^j; \quad \overset{\Gamma, \gamma}{\vec{C}}_{nj}^J = -g^{kl} H_{kj}^n \Lambda_l^J.$$

Доказывается теорема, утверждающая, что необходимое и достаточное условие того, чтобы M_{n-1} в эрмитовом $M_n(F, G)$ была почти контактной метрической гиперповерхностью со структурными объектами f, ξ, η , состоит в выполнении равенств:

$$F \vec{\Lambda}_i = f_l^i \vec{\Lambda}_k + \eta_i^n \vec{C}_n, \quad F \vec{C}_n = -\xi_n^i \vec{\Lambda}_i \quad (2.25)$$

(см. также наши утверждения в п. 1 настоящего параграфа).

Исследуя гиперповерхность M_{n-1} в эрмитовом многообразии $M_n(F, G)$, Нагао [33] вводит для этого случая тензоры Θ , аналогичные тензорам T (2.13), с той лишь разницей, что в построениях используется ковариантная производная кососимметрического тензора $F_{JK} = F_{,J}^L G_{LK}$,

а именно:

$$\begin{aligned}\Theta_{jih} &= \Lambda_j^j \Lambda_i^i \Lambda_k^k F_{IKJ}, \\ \Theta_{ji} &= C_n^j C_j^j \Lambda_i^i F_{IKJ}, \\ \Theta_{ji}' &= \Lambda_j^j \Lambda_i^i C_n^k F_{IKJ}, \\ \Theta_j &= C_n^j C_n^i \Lambda_j^k F_{IKJ}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

В терминах этих тензоров записываются выражения ковариантных производных структурных объектов и индуцированного объекта $\Phi_{ij} = f_i^k g_{kj}$ и ковариантной производной F_{IKJ} .

Теорема 1. Для почти контактной гиперповерхности в почти эрмитовом многообразии выполняются условия

$$\begin{aligned}\Theta_{ji}' &= \Theta_{jki} f_i^k \xi_n^l; \quad \Theta_{jih} + \Theta_{jhi} = 0; \\ \Theta &= \Theta_{ij} \Phi^{ij} \Theta; \quad \Theta = \Theta^i{}_i \Theta + \Theta^i{}^i \Theta\end{aligned}\quad (2.27)$$

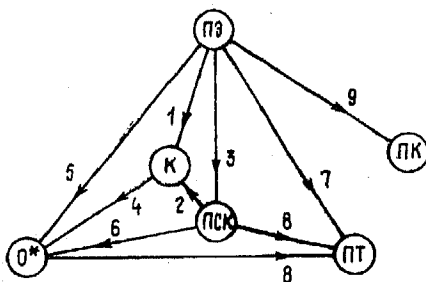
Найдены также условия, сформулированные в терминах тензоров Θ , выполняющиеся на почти контактной гиперповерхности в ряде подклассов эрмитова многообразия: почти семи-келеровом, O^* -многообразии почти татибановом, почти келеровом, а также выполняющиеся в самих этих многообразиях.

Доказан [33] ряд теорем следующего характера.

Теорема. Для того чтобы многообразии класса A было многообразием класса B , необходимо и достаточно, чтобы на любой почти контактной гиперповерхности многообразия класса A выполнялись условия K_{AB} .

Мы передадим истинное содержание этих теорем графическим способом.

На рисунке стрелки направлены от многообразия класса A к многообразию класса B , цифры отсылают к списку условий типа K_{AB} , а буквы в вершинах графа — к перечню наименований классов многообразий.



ПЭ — почти эрмитово;

ПСК — почти семи-келерово ($\nabla_j F_K^j = 0$);

O^* — многообразие ($\nabla_K F_{JL} = -F_K^P F_J^M \nabla_P F_{ML}$);

ПК — почти келерово ($\nabla_K F_{JL} + \nabla_J F_{LK} + \nabla_L F_{KJ} = 0$);

К — келерово многообразии ($\nabla_j F_L^k = 0$);

ПТ — почти татибаново ($\nabla_j F_{KL} + \nabla_K F_{JL} = 0$); (где ∇ — риманова связность в $M_n(F)$).

1. $\Theta_{jih} = 0, \Theta_{ji} = 0, \Theta_j = 0;$
2. $\Theta_{jih} = 0, \Theta_{ji} = 0;$
3. $\Theta_j = -\Theta_{kij}g^{kl}, \Theta'_{kl}g^{kl} = 0$ (или $\Theta_{klm}\varphi^{kl}\xi_n^m = 0$);
4. $\Theta_{jih} = 0;$
5. $\Theta_j = -\Theta_{kij}g^{kl}, \Theta_{ji} = f_j^k \xi_n^l \Theta_{lki} - \eta_j^n \xi_n^k \Theta_{ki};$
6. $\Theta_{ji} = f_j^k \xi_n^l \Theta_{lki} - \eta_j^n \xi_n^k \Theta'_{ki},$

$$\Theta_{kij}g^{kl} = \Theta_{kij}\xi_n^k \xi_n^l,$$

$$\Theta_{jih} + f_j^k f_i^l \Theta_{klh} = f_j^k \eta_i^n \Theta'_{kn} + \eta_j^n \xi_n^k \Theta_{kjh};$$

7. Θ_{jih} — кососимметричен,

$$\Theta_{ji} = \Theta'_{ji}, \Theta_j = 0;$$

8. Θ_{jih} — кососимметричен,

$$\Theta_{ji} = \Theta'_{ji};$$

9. $\Theta_{jih} + \Theta_{ihj} + \Theta_{hji} = 0, \Theta_{ji} = \Theta'_{ij} - \Theta'_{ji}.$

3. В почти татибановом многообразии $M_n(F)$ можно ввести [32] кососимметрический по всем индексам тензор

$$A_{ijk} = \tilde{F}_{JKL} \Lambda_i^J \Lambda_j^K \Lambda_k^L, \quad (2.28)$$

который фактически легко получается из тензора T_{jk}^i (2.13).

Лемма 1 [32]. Если $A_{ijk} = 0$, то почти татибаново пространство есть келерово пространство.

На базе этой леммы доказывается следующая теорема:

Теорема 1 [32]. Гиперповерхность в некелеровом почти татибановом многообразии не допускает контактной метрической структуры.

Доказательство проводится от противного. При этом устанавливается, что $A_{ijk} = 0$, т. е. что почти татибаново многообразие $M_n(F)$ есть обязательно келерово.

Теорема 2 [32]. Второй фундаментальный тензор H_{jk}^n гиперповерхности в почти татибановом многообразии имеет вид $H_{ij}^n = -g_{ij} + \varphi \eta_i^n \eta_j^n$ (где φ — скалярная функция) тогда и только тогда, когда $\varphi_{ij} = f_i^k g_{kj}$ удовлетворяет условию

$$\varphi_{ij} = -\tilde{\eta}_{ij}^n + A_{kij} \xi_n^k f_i^l.$$

Нагао [33] устанавливает, что для почти контактной гиперповерхности в почти татибановом многообразии следующие условия эквивалентны:

- 1) $S_{nj}^n = 0$ (S_{nj}^n определен в (2.14₂));
 - 2) $H_{jk}^n \xi_n^k = a \eta_j^n$ (т. е. ξ_n^k определяет главное направление второго фундаментального тензора первого рода (2.8)).
- Эквивалентны также и следующие условия [33]:

$$\tilde{\eta}_{ij}^n + \tilde{\eta}_{ji}^n = 0, \quad (\text{т. е. } \tilde{\xi}_n^k - \text{киллингов вектор}),$$

$$f_j^k H_{ki}^n + f_i^k H_{kj}^n = 0,$$

$$H_{ij}^n - f_j^k f_i^l H_{kl}^n = a \eta_j^n \eta_i^n,$$

где a — скаляр.

Теорема 3 [[33]. Если каждая гиперповерхность допускает нормальную почти контактную структуру, то почти татибаново многообразие есть келерово многообразие.

Для O^* -многообразия доказано:

Теорема 4 [33]. Если каждая гиперповерхность O^* -многообразия допускает контактную структуру, то O^* -многообразие есть почти келерово многообразие.

Из этой теоремы немедленно следует теорема 1.

По определению [33], гиперповерхность M_{n-1} называется K -почти контактной, если тензор (2.14₃) $S_{nj}^i = 0$.

Для того чтобы почти контактная гиперповерхность в почти татибановом многообразии была K -почти контактной, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$f_j^k H_{ki}^n + f_i^k H_{kj}^n = 0, \quad \xi_n^k \Theta_{kji} = 0$$

(где Θ_{kji} определен в (2.26)).

При этом, если $S_{nj}^i = 0$, то и $S_{ij}^n = 0$.

В терминах A -тензора (2.28) в работе [32] устанавливаются условия, при которых гиперповерхность в почти татибановом многообразии нормальна.

Доказывается, что если $S_{nk}^n = 0$ и $S_{ik}^n = 0$, то $A_{ijk} \xi_n^i = 0$. При помощи этого утверждения доказывается следующее.

Теорема 5 [32]. Для того чтобы гиперповерхность в почти татибановом многообразии была нормальным почти контактным подмногообразием, необходимо и достаточно, чтобы тензор H_{ij}^n имел следующее строение:

$$H_{ij}^n = -g_{ij} + \Phi \eta_i^n \eta_j^n - f_j^k (\Phi_{ik} + \tilde{\eta}_{ik})$$

и A_{ijk} удовлетворяло соотношению

$$A_{ijl}f_k^l = A_{ikl}f_j^l,$$

где φ — скалярная функция.

Определение 1. Если второй фундаментальный тензор может быть приведен к виду

$$H_{ij}^n = \lambda g_{ij} + \mu \eta_j^n \eta_i^n,$$

то гиперповерхность называется C -омбилической (или квази-омбилической [42]). В частности, если $\lambda=0$, то поверхность будет цилиндрической, а если $\mu=0$, то омбилической.

Для того чтобы почти контактная гиперповерхность келерова многообразия была сасакиевой, необходимо и достаточно, чтобы она была C -омбилической [45], [46], [54].

В работе [49] доказано, что если гиперповерхность в почти татибановом многообразии C -омбилическая, то почти татибаново многообразие необходимо является келеровым.

Для этого сначала устанавливается, что на C -омбилической гиперповерхности в почти татибановом многообразии вектор $\vec{\xi}_n$ — киллингов.

Используя тензор S_{ji}^n , автор доказывает [49], что индуцированная на C -омбилической гиперповерхности $(fg\xi\eta)$ -структура — нормальна, откуда, на основании теоремы 3, и следует указанное выше утверждение.

Теорема 6 [41]. Для того, чтобы гиперповерхность в почти татибановом многообразии была почти сасакиевым (т. е. контактным метрическим) подмногообразием, должны выполняться следующие условия

$$2\varphi_{ij} + \tilde{\eta}_{ij}^n + H_{kj}^n f_i^k + H_{ik}^n f_j^k = 0,$$

$$f_{jki} + f_{kij} = \eta_i^n H_{jk}^n + \eta_j^n H_{ik}^n - 2\eta_k^n H_{ij}^n.$$

Теорема 7 [33]. В почти татибановом многообразии $M_n(F)$ индуцированная на гиперповерхности M_{n-1} структура тогда и только тогда будет сасакиевой, когда второй фундаментальный тензор гиперповерхности будет иметь вид:

$$H_{ij}^n = g_{ij} + \alpha \eta_i^n \eta_j^n,$$

где α — скалярное поле. В этом случае M_{n-1} будет C -омбилической (см. определение 1 в настоящем пункте).

Дополнительными свойствами обладают в почти татибановом многообразии C -омбилические гиперповерхности M_{n-1} с обращаемыми в нуль тензорами проективной кривизны, конформной кривизны и конгармонической кривизны. В этих случаях M_{n-1} локально есть C -эйнштейново многообразие [41].

Мишра [31] указывает условия, которые должны выполняться для того, чтобы гиперповерхность M_{n-1} была почти контактной метрической гиперповерхностью в почти татибановом многообразии $M_n(F)$.

4. Геометрия гиперповерхности M_{n-1} в большей степени разрабатывались в келеровых многообразиях.

Гиперповерхность M_{n-1} в многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$ несет косимплектическую структуру, если выполнены условия

$$\tilde{\eta}_{ij}^n - \tilde{\eta}_{ji}^n, \quad (2.29)$$

$$\tilde{\Phi}_{ijk} + \tilde{\Phi}_{jki} + \tilde{\Phi}_{kij} = 0. \quad (2.30)$$

Если многообразие $M_n(F)$ — келерово, то при надлежащем выборе нормально оснащающего поля из (2.16) получаем:

$$\tilde{\eta}_{jk}^n = -H_{jk}^n f_j^l, \quad (2.31)$$

а для ковариантной производной тензора $\Phi_{ij} = f_i^k g_{kj}$ —

$$\tilde{\Phi}_{ikj} = \eta_i^n H_{jk}^n - \eta_k^n H_{ji}^n. \quad (2.32)$$

Из (2.31) и (2.32) следует, что для всякой гиперповерхности келерова многообразия условия (2.30) всегда выполнены и что $\xi_{ni}^i = 0$.

Отсюда следует [35], [36], что для того чтобы гиперповерхность в келеровом многообразии была косимплектической, необходимо и достаточно, чтобы вектор ξ_n был гармоническим вектором. И далее: вполне геодезическая гиперповерхность келерова многообразия — косимплектическая.

Другой критерий дает теорема, доказанная в [26]. Для того чтобы гиперповерхность в келеровом многообразии была косимплектической, необходимо и достаточно, чтобы

$$H_{ij}^n = \beta \eta_i^n \eta_j^n, \quad \text{где } \beta = \sum_i H_{ii}^n.$$

Как следствие получается, что при $\beta = 0$ гиперповерхность вполне геодезическая.

Нагаи и Кодзэ [32] находят условия, которым должен удовлетворять второй фундаментальный тензор для того, чтобы гиперповерхность в келеровом многообразии была контактным метрическим многообразием. А именно:

$$H_{ij}^n = -g_{ij} + \Phi \eta_i^n \eta_j^n + \frac{1}{2} \{ f_i^k (\Phi_{jk} + \tilde{\eta}_{jk}^n) + f_j^k (\Phi_{ik} + \tilde{\eta}_{ik}^n) \}.$$

Будем теперь считать, что на гиперповерхности M_{n-1} в келеровом многообразии $M_n(F)$ индуцируется почти контактная структура. Тасиро устанавливает [47]:

— Если индуцированная почти контактная метрическая структура есть контактная структура, то ковариантные компоненты

тензора K_{nj}^i (2.24), т. е. K_{ij}^n имеют следующее строение

$$K_{ij}^n = -2H_{ij}^n - g_{ij} + \eta_i^n (\eta_j^n + 2\xi_n^k H_{kj}^n).$$

— Если индуцированная почти контактная структура K -контактна, то эта структура нормальна, т. е. сасакиева. Необходимым и достаточным условием для этого является следующее строение второго фундаментального тензора:

$$2H_{ij}^n = -g_{ij} + \alpha \eta_i^n \eta_j^n, \quad (2.33)$$

где α — скалярное поле.

Используя тензоры S , Окумура доказывает для келерова многообразия следующую теорему [35]:

Для того чтобы почти контактная структура на гиперповерхности келерова многообразия была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы тензор S_{nj}^i обращался в нуль тождественно.

Установлено также [35], что в келеровом многообразии почти контактная структура, индуцированная на вполне геодезической гиперповерхности, нормальна.

Если гиперповерхность M_{n-1} локально омбилическая (т. е. $H_{ij}^n = g_{ij}$), то M_{n-1} — сасакиево многообразие [26].

Другой критерий дается в следующей теореме [42]:

Для того чтобы контактная гиперповерхность в келеровом многообразии была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы f и H коммутировали, т. е. чтобы $f_k^i H_{ij}^n = f_j^i H_{ik}^n$.

Доказано далее [42], что для того чтобы f и H коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы поле вектора \vec{f}_n было килинговым или чтобы тензор H_{ij}^n удовлетворял условию:

$$H_{ij}^n = \eta_i^n \eta_j^n H_{kl}^n \xi_n^k \xi_n^l + H_{kl}^n f_i^k f_j^l.$$

В работе [32] критерии, указывающие на то, что гиперповерхность в келеровом многообразии есть нормальное почти контактное многообразие, выражаются следующим необходимым и достаточным условием:

$$H_{ij}^n = -g_{ij} + \Phi \eta_i^n \eta_j^n - f_j^k (\Phi_{ik} + \bar{\eta}_{ik}^n).$$

Сасакиево многообразие называется локальным S -фубиниевым многообразием [48], если тензор кривизны удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} R_{KIJL} = & (a + b)(G_{IJ}G_{KL} - G_{IK}G_{LJ}) + \\ & + a(\Phi_{IJ}\Phi_{KL} - \Phi_{IL}\Phi_{KJ} - 2\Phi_{KJ}\Phi_{IL}) - \\ & - a(G_{IJ}\eta_K\eta_L - G_{IL}\eta_K\eta_J + G_{KL}\eta_I\eta_J - G_{KI}\eta_J\eta_L), \end{aligned}$$

где a — константа, и $\Phi_{IK} = F_I^L G_{LK}$.

Ямягути рассматривал [50] S -омбилические гиперповерхности в келеровом многообразии с обращающимися в нуль тензором бохнеровой кривизны [5].

Если гиперповерхность S -омбилическая, то для нее выполняются условия

$$Z_i = \tilde{\mu}_i - \eta_i^n \xi_n^k \tilde{\mu}_k, \quad (2.34)$$

$$H_{ij}^n = (n-2+\mu) g_{ij} + (\eta-3) \mu \eta_i^n \eta_j^n, \quad (2.35)$$

где $Z_i = \Lambda_i^K C_n^I R_{KI}$ и R_{KI} — тензор Риччи римановой связности Γ в $M_n(F)$. Множитель μ называется S -средней кривизной и определяется через среднюю кривизну H следующим образом: $H = \frac{1}{n-1} H_{ij}^n g^{ij}$ и $\mu = (n-1)(H-1)$. Из (2.34) следует, что $Z_i \xi_n^i = 0$.

Доказано [50], что если M_{n-1} S -омбилическая гиперповерхность в келеровом многообразии с обращающейся в нуль бохнеровой кривизной, то 1) S -средняя кривизна есть константа; 2) M_{n-1} локально S -фубиниева. Непостоянное скалярное поле ρ в многообразии $M_n(F)$ называется конциркулярным скалярным, или просто конциркулярным полем, если выполняются уравнения

$$\nabla_J \nabla_K \rho = \varphi G_{JK},$$

где φ — скалярное поле, называемое характеристической функцией поля ρ (см., например, [38]). Конциркулярное преобразование, по определению, есть конформное преобразование, сохраняющее геодезические окружности. Если P — не особая точка в $M_n(F)$ и U — некоторая окрестность точки P , содержащая не стационарные точки, тогда в U можно определить семейство гиперповерхностей уравнением $\rho = \text{const}$, называемых ρ -гиперповерхностями в U . Через каждую точку $Q \in U$ проходит одна и только одна ρ -гиперповерхность $M_{n-1}(Q)$, определяемая условием $\rho = \rho(Q)$.

Сагава [38] изучает контактную структуру на ρ -гиперповерхности в келеровом многообразии.

Теорема [38]. Если в келеровом многообразии, допускающем конциркулярное поле ρ , характеристическая функция $\varphi(\rho)$ положительно постоянна на некоторой ρ -гиперповерхности, то такая ρ -гиперповерхность есть нормальное контактное метрическое пространство.

Бежанку [23], [24], [22] изучает вещественную гиперповерхность в келеровом многообразии, рассматривая ее как CR -многообразие (см. § 1, п. 2.3).

Доказано:

— Гиперповерхность M_{n-1} — вполне геодезическая тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) M_{n-1} D^\perp -минимальна,

2) Голоморфное распределение D параллельно в индуцированной на M_{n-1} связности γ .

(Замечание. Понятие D^\perp -минимальности введено в [23]. По определению, M_{n-1} называется D^\perp -минимальной, если $H_{ij}^n v^i v^j = 0$, где $v = v^i \vec{\Lambda}_i \in D^\perp$).

— Голоморфное распределение инволютивно тогда и только тогда, когда H_{ij}^n коммутирует с аффинором почти комплексной структуры в D .

— Любая вещественная вполне омбилическая гиперповерхность с инволютивным голоморфным распределением — вполне геодезическая.

5. Если четномерное евклидово пространство E_n трактовать как плоское келерово пространство, то на каждой гиперповерхности M_{n-1} будет индуцироваться почти контактная метрическая структура.

Окумура [35] рассматривает четномерное евклидово пространство E_n , в котором введена естественная келерова структура. Для такой гиперповерхности уравнения Гаусса и Кодаци будут иметь вид:

$$r_{hijl} = H_{ji}^n H_{kl}^n - H_{kl}^n H_{ji}^n, \\ \bar{H}_{jik}^n - \bar{H}_{hij}^n = 0,$$

где r_{hijl} — тензор кривизны поверхности.

Опираясь на утверждение, что тензор S_{nl}^n (2.14) обращается в нуль тогда и только тогда, когда вектор $\vec{\xi}_n$ определяет главное направление второго фундаментального тензора H_{ij}^n , т. е.

$$H_{ij}^n \xi_n^j = \alpha \eta_i^n, \quad (2.35)$$

где α — надлежащим образом выбранная функция, Окумура доказывает следующую лемму [35]:

Лемма 1. Пусть M_{n-1} — нормальная почти контактная гиперповерхность в евклидовом пространстве E_n . Тогда одно из двух следующих условий должно быть выполнено:

1) скалярная функция α в (2.31) — постоянна;

2) гиперповерхность локально развертываема на $(n-1)$ -мерное евклидово пространство E_{n-1} .

Для нормальной почти контактной гиперповерхности доказана следующая теорема.

Теорема [35]. Нормальная почти контактная гиперповерхность M_{n-1} в евклидовом пространстве E_n локально изометрична либо $(n-1)$ -мерной сфере S_{n-1} , либо евклидову пространству E_{n-1} , либо многообразию $S_r \times E_s$, где r — нечетное число и $r+s=n-1$.

В качестве следствия из этой теоремы получается результат, указанный ранее в [48]:

Нормальная контактная гиперповерхность M_{n-1} в евклидовом пространстве E_n есть вполне омбилическая гиперповерхность и, следовательно, является куском сферы.

Если поверхность M_{n-1} представляет собой многообразие $S_r \times E_s$, то на ней индуцируется f -структура ранга $r-1$, определенная аффинором \bar{f} [45]:

$$\bar{f}_j^i = \frac{1}{c} \tilde{\eta}_{jk}^n g^{ki} = \frac{1}{c} f_j^{kl} l_{nk}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акматов Б., Об инвариантном построении геометрии распределений m -мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии. Моск. гос. пед. ин-т. М., 1983. 34 с. Библиогр. 20 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 26 мая 1983 г., № 2874—83 Деп) (РЖМат, 1983, 9A637ДЕП)
2. —, Классификация $(f\xi\eta\rho)$ -структур, индуцированных на распределении линейных элементов коразмерности два в многообразии почти комплексной структуры M_n . «Дифференц. геом. многообразия фигур. Калининград, 1983, вып. 14, 5—8
3. —, Индуцированные структуры на распределении m -мерных линейных элементов в многообразии почти комплексной структуры M_n . Моск. гос. пед. ин-т. М., 1983, 21 стр. Библиогр. 12 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 6 окт. 1983 г. № 5505—83 Деп) (РЖМат, 1983, 12A862 ДЕП)
4. Башкене А. Л., О структурах, индуцированных на подмногообразиях почти комплексного многообразия. Лит. мат. об., 1976, № 1, 23—34 (РЖМат, 1976, 11A806)
5. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 9 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1979, 5—246 (РЖМат, 1980, 1A800)
6. Крицонайте А. Л., Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхности комплексного и двойного пространства. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1968, 128, № 3, 55—75 (РЖМат, 1969, 9A466)
7. Ланге Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. В сб. «Тр. Моск. матем. о-ва», 1953, 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
8. —, Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 490—493 (РЖМат, 1960, 4526)
9. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. мат. съезда. 1961, Т. 2. Л., Наука, 1964, 226—233 (РЖМат, 1964, 12A391)
10. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 1 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1966, 139—190 (РЖМат, 1967, 6A382)
11. —, Остиану Н. М., $(f\xi\eta\rho)$ -структура на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1975, 5—22 (РЖМат, 1976, 9A622)
12. Норден А. П., Теория композиций. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 10 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1978, 117—145 (РЖМат, 1979, 5A638)
13. —, Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976
14. Остиану Н. М., Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1977, 89—111 (РЖМат, 1978, 1A632)
15. —, Дифференциально-геометрические структуры, индуцированные распределением гиперплоскостных элементов в почти комплексном многообразии. ИСМ 1982. Тезисы доклада. III. Варшава, 1983, 45

16. —, *Домбровский Р. Ф., Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1982, 27—76 (РЖМат, 1982, 9A590)
17. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.*, Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 4 (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1973, 7—70 (РЖМат, 1974, 3A451)
18. —, *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1980, 3—63 (РЖМат, 1980, 11A728)
19. *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma)$ -инвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1982, 77—117 (РЖМат, 1982, 9A591)
20. —, Классификация (f - η)-структур. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 14 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1983, 52—72 (РЖМат, 1983, 5A592)
21. —, Дифференциальная геометрия многообразий f -структуры. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 15 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1983, 93—123
22. *Bejancu A.*, CR-submanifold of a Kaehler manifold. I. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 69, 135—142 (РЖМат, 1979, 2A546)
23. —, Hipersuprafețe reale în variantați Kähleriene. Lucr. Sec. techni.-sti jubiliare a fak. hidrotehn. Inst. politehn., Iași, 1978. Sec. Mat.—mec. Iași, s. a., 21—25 (РЖМат, 1979, 12A718)
24. —, Real hypersurfaces of a complex projective space. Rend. mat., 1979, 12, № 3-4, 439—445 (РЖМат, 1980, 10A486)
25. *Chen Bang yen.* Differential geometry of real submanifolds in a Kählerian manifold. Monatsh. Math., 1981, 91, 257—274 (РЖМат, 1982, 1A882)
26. *Farran Hani.* Hypersurfaces of almost Hermite manifolds. Math. Repts Toyama Univ., 1982, 5, 119—126 (РЖМат, 1983, 1A694)
27. *Ishihara S.* Normal structure f satisfying $f^3 + f = 0$. Kodai Math. Semin. Repts., 1966, 18, № 1, 36—47 (РЖМат, 1967, 6A385)
28. —, Distributions with complex structure. Kodai Math. J., 1978, 1, № 2, 264—276 (РЖМат, 1979, 4A731)
29. *Ki U-Hang, Pak Jin Suk.* Generic submanifolds of an even-dimensional Euclidean space. J. Different. Geom., 1981, 16, № 2, 293—303 (РЖМат, 1982, 7A729)
30. *Mishra R. S.*, Structures in submanifolds of an almost Hermite manifold. Tensor, 1981, 35, № 2, 105—110 (РЖМат, 1982, 1A883)
31. —, Almost complex and almost contact submanifolds. Tensor, 1972, 25, 419—433 (РЖМат, 1974, 2A621)
32. *Nagai T., Kōjyō H.*, On some considerations of hypersurfaces in certain almost complex spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1965, Ser. I, 18, 114—123 (РЖМат, 1966, 6A437)
33. *Nagao Mitsugi.* Almost contact hypersurfaces in almost Hermitian manifolds. Sci. Repts Niigata Univ., 1968, Ser. A, N 6, 23—35 (РЖМат, 1969, 11A581)
34. —, Infinitesimal variation of hypersurfaces of an almost Tachibana manifold. Mem. Fac. Educ. Niigata Univ. Nat. Sci., 1979, 21, 1—5 (РЖМат, 1980, 11A734)
35. *Okumura M. B.*, Certain almost contact hypersurfaces in Euclidean spaces. Kōdai Math. Semin. Repts, 1964, 16, N 1, 44—54 (РЖМат, 1965, 2A670)
36. —, Cosymplectic hypersurfaces in Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature. Kodai Math. Semin. Repts., 1965, 17, N 2, 63—73 (РЖМат, 1966, 3A442)

37. —, Contact hypersurfaces in certain Kählerian manifolds. Tôhoku Math. J., 1966, 18, № 1, 74—102 (PЖMar, 1967, 4A527)
38. *Sasagawa Hirosho*, On submanifolds of a Kählerian manifold defined by concircular scalar fields. Res. Repts Nagaoka Techn. Coll., 1968, 4, N 2, 63—71 (PЖMar, 1969, 5A514)
39. *Sasaki S.*, On differential manifolds with certain structures with are closely related to almost contact structure. I. Tôhoku Math., J., 1960, 12, 459—476
40. *Sato Noriaki*, Certain anti-holomorphic submanifolds of almost Hermitian manifolds. Sci. Repts. Niigata Univ., 1982, A, № 18, 1—9 (PЖMar, 1983, 1A693)
41. *Singh Rathore M. P.*, *Mishra R. S.*, On a C -umbilical hypersurface of an almost Tachibana manifold with vanishing curvature tensors. Indian J. Pure and Appl. Math., 1975, 6, № 7, 755—764 (PЖMar, 1978, 8A706)
42. *Sinha B. B.*, *Singh I. J. P.*, On almost contact metric hypersurface of a Kähler manifold. Proc. Indian Acad. Sci., 1974, A80, № 6, 282—288 (PЖMar, 1975, 11A733)
43. *Suzuki Hideaki*, Notes on (f, U, V, u, v, λ) -structures. Kodai Math. Semin Repts., 1973, 25, 153—162 (PЖMar, 1974, 1A668)
44. *Takizawa S.*, On contact structures of real and complex manifolds. Tôhoku Math., J., 1963, 15, 227—252 (PЖMar, 1965, 3A512)
45. *Tashiro Y.*, On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds. I. Tôhoku Math. J., 1963, 15, 62—78 (PЖMar, 1964, 4A397)
46. —, On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds. II. Tôhoku Math. J., 1963, 15, 167—175 (PЖMar, 1964, 8A435)
47. —, On contact structures of tangent sphere bundles. Tôhoku Math. J., 1969, 21, № 1, 117—143 (PЖMar, 1970, 2A630)
48. —, *Tachibana S. S.*, On Fubinian and C -Fubinian manifold. Kodai Math. Semin. Repts, 1963, 15, 176—183 (PЖMar, 1965, 2A668)
49. *Toynari Toshitaka*, On C -umbilical hypersurface in an almost Tachibana manifold. TRU Math., 1970, 6, 13—16 (PЖMar, 1973, 2A596)
50. *Yamaguchi Seiichi*, On a C -umbilical hypersurface of a Kählerian manifold with vanishing Bochner curvature tensor. Tensor, 1969, 20, № 1, 95—99 (PЖMar, 1969, 11A585)
51. *Yano K.*, On there remarkable affine connexions in almost hermitian spaces. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 24—32; Indagations math., 1955, 17 (PЖMar, 1957, 1778)
52. —, Differential geometry on complex and almost complex spaces. Oxford — London, Pergamon Press, 1965, XII, 323 p. (PЖMar, 1965, 9A405K)
53. —, *Ishihara Shigeru*, Real hypersurfaces of a complex manifold and distributions with complex structure. Kōdai. Math. J., 1978, 1, № 2, 289—303 (PЖMar, 1979, 4A742)
54. —, —, Almost contact structures induced on hypersurfaces in complex and almost complex spaces. Kōdai Math. Semin. Repts, 1965, 17, № 3, 222—249 (PЖMar, 1966, 5A449)
55. —, —, The \tilde{f} -structure induced on submanifolds of complex and almost complex spaces. Kōdai Math. Semin. Repts., 1966, 18, № 2, 120—160 (PЖMar, 1967, 12A617)
56. —, *Kon Masahiro*, Generic submanifolds. Ann. mat. pura e appl., 1980, 123, 59—92 (PЖMar, 1981, 2A700)