N. S. Ustinov, On the Constancy of the Extremal Function in the Embedding Theorem of Fractional Order,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 4, 85–97

https://www.mathnet.ru/eng/faa3828

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 4, с. 85–97

УДК 517.9

О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка[1]

© 2020. Н. С. Устинов

В работе рассматривается вопрос о постоянстве минимайзера в теореме вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ для липшицевой области Ω в зависимости от размера области. Для семейства областей $\varepsilon\Omega$ доказано, что при малых коэффициентах гомотетии ε единственный минимайзер — константа, а при больших ε константа не является даже локальным минимайзером. Также обсуждается вопрос о том, является ли константа — локальный минимайзер глобальным минимайзером.

DOI: https://doi.org/10.1134/faa3828

§ 1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, — ограниченная область с липшицевой границей. Пусть $s \in (0,1)$, и пусть

$$q \in \begin{cases} [1, 2_s^*] & \text{при } n \geqslant 2 \text{ или } n = 1,\ s < 1/2, \\ [1, \infty) & \text{при } n = 1,\ s = 1/2, \\ [1, \infty] & \text{при } n = 1,\ s > 1/2 \end{cases}$$

(здесь и далее $2_s^* := 2n/(n-2s)$). Рассмотрим теорему вложения пространства Соболева–Слободецкого $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (см. [9] и [10, §2.3.3]) в $L_q(\Omega)$:

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,q}^{\Omega}[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega)}} > 0. \tag{1}$$

При $q \in [1, 2_s^*)$ это вложение компактно, поэтому экстремаль (минимайзер функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\Omega}[u]$) существует, и точная константа в (1) достигается. Более того, при $n \geqslant 3$ и $q = 2_s^*$ было показано (см. [11]), что экстремаль в (1) существует, если $2s > 1$ и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$.

Очевидно, что свойства экстремали в (1) зависят от формы области Ω, от ее размера и выбора нормы в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Положим

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)} := \langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{2}$$

где квадратичная форма $\langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle$ определяется соотношением

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \cdot (u, \phi_j)^2_{L_2(\Omega)}. \tag{3}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00630А.

Здесь λ_j и ϕ_j — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа соответственно (мы считаем, что $\lambda_0 = 0$ для собственной функции $\phi_0 = C$).

Таким образом, оператор $(-\Delta)^s_{Sp}$, порождаемый квадратичной формой (3), является s-й степенью оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Он называется *спектральным дробным лапласианом Неймана*.

Область определения формы $\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle$ совпадает с пространством $\mathcal{H}^s(\Omega)$, а норма (2) эквивалентна стандартной норме в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (доказательство этих фактов аналогично доказательству леммы 1 в [2]).

В дальнейшем будем считать, что область Ω имеет единичный объем, и рассмотрим вложение (1) в семействе областей $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon x : x \in \Omega\}$. Положим $u_\varepsilon(y) := u(\varepsilon^{-1}y)$; тогда

$$\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u] := \frac{\mathcal{I}^{\Omega_\varepsilon}_{s,q}[u_\varepsilon]}{\varepsilon^{n-2s-2n/q}} = \frac{\varepsilon^{n-2s}\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle + \varepsilon^n \|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\varepsilon^{n-2s-2n/q}\varepsilon^{2n/q}\|u\|^2_{L_q(\Omega)}}$$
$$= \frac{\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle + \varepsilon^{2s}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega)}}. \tag{4}$$

Функционалы $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$ и $\mathcal{I}^\Omega_{s,q}[u]$ инвариантны относительно домножений u на константу. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что минимайзер удовлетворяет условию нормировки $\|u\|^2_{L_q(\Omega)} = 1$.

В локальном случае $s = 1$ про минимайзер функционала (4) известно следующее (здесь $\mathcal{H}^1(\Omega)$ — обычное пространство Соболева $W^1_2(\Omega)$, а норма (2) совпадает со стандартной):

1. Если $q \in [1, 2]$, то при любом $\varepsilon > 0$ функция $\mathbf{1}$ (тождественно равная единице) является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{1,q}[u]$.

2. Если же $q \in (2, 2^*_1]$, а λ_1 — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω, то

• при $\varepsilon > \varepsilon_1(q) := \sqrt{\lambda_1/(q-2)}$ функция $\mathbf{1}$ не является *локальным* (а значит, и *глобальным*) минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{1,q}[u]$ (см. [8, предложение 3.1]);

• при $\varepsilon < \varepsilon_1(q)$ функция $\mathbf{1}$ дает *локальный* минимум функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{1,q}[u]$ (см. [8, предложение 3.2]);

• существует такое $\mathcal{E}_1(q) > 0$, что при $\varepsilon \leqslant \mathcal{E}_1(q)$ функция $\mathbf{1}$ дает *глобальный* минимум функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{1,q}[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_1(q)$ не дает (см. [8, предложения 3.5–3.7]);

• функция $\mathcal{E}_1(q)$ непрерывна и монотонно убывает (см. [8, теорема 3.8]); при $n = 1$ имеем $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. [7], а также [6]), а при $n \geqslant 2$ существуют как примеры областей с $\mathcal{E}_1(q) < \varepsilon_1(q)$ (см. [8, следствие 3.4] и [8, (3.6)]), так и примеры областей с $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. [12, теорема 3.1]).

В данной работе мы будем изучать аналогичные вопросы для функционала (4) в нелокальном случае при условии существования его минимайзера. Отдельно отметим, что при $q < \infty$ минимайзер (если он существует) после домножения на подходящую константу является обобщенным решением задачи

$$(-\Delta)^s_{Sp}u + u = |u|^{q-2}u, \qquad u \in \mathcal{H}^s(\Omega). \tag{5}$$

Замечание 1. Из определения (3) следует, что $(-\Delta)^s_{Sp}\mathbf{1} = 0$ и $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1}] = \varepsilon^{2s}$. Таким образом, функция $u = \mathbf{1}$ всегда является решением задачи (5).

Замечание 2. При $q \in [1,2]$ из неравенства Гёльдера следует, что $\|u\|^2_{L_q(\Omega)} \leqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$; поэтому $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u] \geqslant \varepsilon^{2s} = \mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1}]$. Из того факта, что для непостоянной функции u неравенство Гёльдера будет строгим, получаем, что константа является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$ при любом $s \in (0,1]$.

Замечание 3. Минимайзер функционала (4) можно считать неотрицательным, поскольку для знакопеременной функции u замена $u \to |u|$ уменьшает значение функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$: от такой замены нормы в L_2 и L_q не меняются, а квадратичная форма уменьшается (см. доказательство теоремы 3 в [3]):

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle > \langle(-\Delta)^s_{Sp}|u|, |u|\rangle.$$

Далее мы будем считать, что $q > 2$, а все минимайзеры функционалов $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$ неотрицательны.

Через C мы будем обозначать положительные константы, точное значение которых для нас несущественно. Дополнительные параметры, от которых зависит константа, мы будем указывать в скобках; зависимость C от области Ω мы будем опускать.

§ 2. Основной результат

Определим вспомогательный функционал

$$\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u] := \|u\|^2_{L_q(\Omega)} \cdot (\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u] - \mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1}]) = \langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle + \varepsilon^{2s}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \varepsilon^{2s}\|u\|^2_{L_q(\Omega)};$$

из построения следует, что функция $\mathbf{1}$ является минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$ тогда и только тогда, когда функционал $\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u]$ неотрицателен (очевидно, что $\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1}] = 0$).

Исследуем неотрицательность функционала $\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u]$. Его первый дифференциал равен

$$\mathbf{D}\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u;h] = 2\left(\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, h\rangle + \varepsilon^{2s}\int_\Omega uh\,dx - \varepsilon^{2s}\|u\|^{2-q}_{L_q(\Omega)}\int_\Omega u^{q-1}h\,dx\right).$$

Легко видеть, что $\mathbf{D}\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1};h] \equiv 0$. Подсчитаем второй дифференциал:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u;h,h] = 2\langle(-\Delta)^s_{Sp}h, h\rangle &+ 2\varepsilon^{2s}\|h\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &+ 2(q-2)\varepsilon^{2s}\|u\|^{2(1-q)}_{L_q(\Omega)}\left(\int_\Omega u^{q-1}h\,dx\right)^2 \\ &- 2(q-1)\varepsilon^{2s}\|u\|^{2-q}_{L_q(\Omega)}\int_\Omega u^{q-2}h^2\,dx.\end{aligned} \tag{6}$$

Разложим приращение h в сумму ортогональных в $L_2(\Omega)$ слагаемых:

$$h(x) = \int_\Omega h\,dx + \widehat{h}, \qquad \int_\Omega \widehat{h}\,dx = 0; \tag{7}$$

тогда при $u = \mathbf{1}$ формула (6) записывается в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1}; h, h] &= 2\langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{h}, \widehat{h}\rangle - 2(q-2)\varepsilon^{2s}\|\widehat{h}\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= 2\sum_{j=1}^\infty(\lambda_j^s - (q-2)\varepsilon^{2s})(\widehat{h}, \phi_j)^2_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Положим $\varepsilon_s(q) := (\lambda_1^s/(q-2))^{1/(2s)}$ ($\varepsilon_s(q) = \varepsilon_1(q)$ при $s = 1$).

Теорема 1. 1. *Пусть $\varepsilon > \varepsilon_s(q)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является локальным (а следовательно, и глобальным) минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$. Это утверждение выполнено и при $q = \infty$ (в этом случае $\varepsilon_s(q) = 0$).*

2. *Пусть $\varepsilon < \varepsilon_s(q)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$.*

3. *Пусть $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ и $\int_\Omega \phi_1^3\,dx \neq 0$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_s}_{s,q}[u]$. Более того, существует $\breve{\varepsilon}(q) < \varepsilon_s(q)$, такое, что при $\varepsilon \in (\breve{\varepsilon}(q), \varepsilon_s(q)]$ функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$ (хотя дает локальный минимум).*

Доказательство. 1. Это утверждение следует из неравенства $\mathbf{D}^2\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[\mathbf{1}; \phi_1, \phi_1] < 0$.

2. Пусть $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, $\|u - \mathbf{1}\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)} < 1/2$. Воспользуемся разложением (7): имеем $u = c + \widehat{u}$ с константой c, $1/2 < c < 3/2$, и выполнено равенство

$$\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u] = \langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle + \varepsilon^{2s}\|\widehat{u}\|^2_{L_2(\Omega)} + c^2\varepsilon^{2s} - c^2\varepsilon^{2s}\|\mathbf{1} + \widehat{u}/c\|^2_{L_q(\Omega)}.$$

В [8, (3.5)] было показано, что

$$\|\mathbf{1} + \widehat{u}/c\|^2_{L_q(\Omega)} \leqslant 1 + (q-1)\|\widehat{u}/c\|^2_{L_2(\Omega)} + C(q)\|\widehat{u}\|^{\min(q,3)}_{L_q(\Omega)},$$

откуда получаем неравенство

$$\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u] \geqslant \langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle - (q-2)\varepsilon^{2s}\|\widehat{u}\|^2_{L_2(\Omega)} - C(q)\varepsilon^{2s}\|\widehat{u}\|^{\min(q,3)}_{L_q(\Omega)}.$$

Поскольку $(\widehat{u}, \phi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$, из (3) следует, что $\langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle \geqslant \lambda_1^s\|\widehat{u}\|^2_{L_2(\Omega)}$; поэтому из ограниченности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u] &\geqslant (\lambda_1^s - (q-2)\varepsilon^{2s})\lambda_1^{-s}\langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle - C(q)\varepsilon^{2s}\|\widehat{u}\|^{\min(q,3)}_{L_q(\Omega)} \\ &\geqslant [(\lambda_1^s - (q-2)\varepsilon^{2s})\lambda_1^{-s} - C(s,q)\varepsilon^{2s}\langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle^{\min(q-2,1)/2}]\langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

Выражение в квадратных скобках можно сделать положительным выбором малой окрестности функции $\mathbf{1}$ (здесь $C(s,q)$ совпадает с константой из (8)):

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp}\widehat{u}, \widehat{u}\rangle \leqslant \|u - \mathbf{1}\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)} \leqslant \min\left[\frac{1}{2}, \left(\frac{\lambda_1^s - (q-2)\varepsilon^{2s}}{2C(s,q)\lambda_1^s\varepsilon^{2s}}\right)^{2/\min(q-2,1)}\right]. \tag{9}$$

В этой окрестности $\mathcal{J}^\varepsilon_{s,q}[u] > 0$, и утверждение п. 2 доказано!

3. При $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ имеет место равенство $\mathbf{D}^2\mathcal{J}^{\varepsilon_s}_{s,q}[\mathbf{1};\phi_1,\phi_1] = 0$. Подсчитаем третий дифференциал: $(\phi_1,\phi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$, поэтому

$$\mathbf{D}^3\mathcal{J}^{\varepsilon_s}_{s,q}[\mathbf{1};\phi_1,\phi_1,\phi_1] = -2(q-1)(q-2)\varepsilon^{2s}\int_\Omega \phi_1^3\,dx \neq 0.$$

Отсюда получаем, что функция $\mathbf{1}$ не дает локального минимума, а потому не является и глобальным минимумом. Существование $\breve{\varepsilon}(q)$ следует из непрерывной зависимости функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$ от параметра ε. □

Замечание 4. В работе [4] было показано, что условие $\int_\Omega \phi_1^3\,dx \neq 0$ выполнено для асимметричной области общего положения.

Следующее утверждение является дробным аналогом предложения 3.4 из [8]:

Предложение 1. *Пусть $s < n/2$ (это ограничение существенно только в случае $n = 1$), $q = 2^*_s$ и $\varepsilon = \varepsilon_s(2^*_s)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_s}_{s,2^*_s}[u]$ в кубе $(0,1)^n$.*

Доказательство. Известно, что для куба $(0,1)^n$ имеет место равенство $\lambda_1 = \pi^2$; поэтому

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_s}_{s,2^*_s}[\mathbf{1}] = \varepsilon_s^{2s}(2^*_s) = \frac{\pi^{2s}(n-2s)}{4s}\,.$$

Построим последовательность, на которой значение функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_s}_{s,2^*_s}[u]$ будет меньше. Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ справедливо дробное неравенство Соболева (см. [5, теорема 1.2, (22)]):

$$\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} := \min \frac{\langle(-\Delta)^s u, u\rangle}{\|u\|^2_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}} > 0$$

(здесь $(-\Delta)^s$ — это стандартный дробный лапласиан в $\mathbb{R}^n$, а минимум берется по всем функциям, где числитель и знаменатель конечны) и минимум достигается (см. [1]) на единственной функции (с точностью до гомотетий, домножений на константу и переносов)

$$\Phi_{s,a}(x) := (a^2+|x|^2)^{(2s-n)/2} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} = 2^{2s}\pi^s\frac{\Gamma(n/2+s)}{\Gamma(n/2-s)}\left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\right]^{2s/n}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 4 из [11], можно получить соотношение

$$\lim_{a\to 0}\mathcal{I}^{\varepsilon_s,(0,1)^n}_{s,2^*_s}[\Phi_{s,a}] = 2^{-2s}\lim_{a\to 0}\mathcal{I}^{\varepsilon_s,(-1,1)^n}_{s,2^*_s}[\Phi_{s,a}] = 2^{-2s}\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n},$$

и для завершения доказательства достаточно показать, что выполнено неравенство

$$\frac{\pi^{2s}(n-2s)}{4s} > 2^{-2s}\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} = \pi^s\frac{\Gamma((n+2s)/2)}{\Gamma((n-2s)/2)}\left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\right]^{2s/n}, \qquad (10)$$

справедливость которого доказывается в §3.

Замечание 5. Поскольку функционал $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$ непрерывно зависит от параметров q и ε, при q, близких к 2^*_s снизу, и ε, близких к $\varepsilon_s(q)$ снизу, функция $\mathbf{1}$ не дает глобального минимума этого функционала в кубе $(0,1)^n$ (хотя дает локальный минимум).

Изучим теперь условия, при которых функция $\mathbf{1}$ дает глобальный минимум функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$.

Теорема 2. 1. *При любом $q \in (2, 2^*_s]$ существует такое $\breve{\varepsilon}(q) > 0$, что для всех $\varepsilon < \breve{\varepsilon}(q)$ функция $\mathbf{1}$ является единственным глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$. Если $n = 1$ и $s \geqslant 1/2$, то утверждение выполнено для всех $q \in (2, \infty)$.*

2. *При любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\check{q}(\varepsilon) \in (2, 2^*_s]$, что для всех $q < \check{q}(\varepsilon)$ функция $\mathbf{1}$ является единственным глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$. Если $n = 1$ и $s \geqslant 1/2$, то $\check{q}(\varepsilon) < \infty$.*

3. *Пусть для пары (ε_0, q_0) функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u]$. Тогда при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ и $q \geqslant q_0$ функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$.*

Доказательство. 1. Предположим обратное: пусть при некотором q существуют последовательность $\breve{\varepsilon}_n \downarrow 0$ и последовательность непостоянных функций $\{u_n : \|u_n\|_{L_q(\Omega)} = 1\}$, для которых

$$\mathcal{I}^{\breve{\varepsilon}_n}_{s,q}[u_n] \leqslant \breve{\varepsilon}_n^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle(-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle \leqslant \breve{\varepsilon}_n^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1. \tag{11}$$

Из (11) следует, что u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и в силу компактности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ имеем $u_n \to u$ в $L_2(\Omega)$. Поскольку норма в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ слабо полунепрерывна снизу, получаем

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

поэтому $\langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle = 0$, функция u постоянна и $u_n \to u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Так как $\|u\|_{L_q(\Omega)} = 1$, то $u = \mathbf{1}$.

Таким образом, в сколь угодно малой окрестности функции $\mathbf{1}$ существует непостоянный минимайзер u_n функционала $\mathcal{I}^{\breve{\varepsilon}_n}_{s,q}[u]$. При малых $\breve{\varepsilon}_n$ оценка радиуса окрестности (9) равномерна по n и u_n попадают в эту окрестность. Неравенство (8) влечет за собой $\mathcal{J}^{\breve{\varepsilon}_n}_{s,q}[u_n] > 0$, что противоречит неравенству (11).

2. Предположим обратное: пусть при $\varepsilon > 0$ существуют последовательность $\check{q}_n \downarrow 2$ и последовательность непостоянных функций $\{u_n : \|u_n\|_{L_{\check{q}_n}(\Omega)} = 1\}$, для которых

$$\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,\check{q}_n}[u_n] \leqslant \varepsilon^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle(-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle \leqslant \varepsilon^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1.$$

Как и в предыдущем пункте, u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Зафиксируем некоторое $q \in (2, 2^*_s)$; в силу компактности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ имеем $u_n \to u$ в $L_q(\Omega)$. Поскольку с некоторого места

$\check{q}_n < q$, в силу неравенства Гёльдера $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geqslant \|u_n\|_{L_{\check{q}_n}(\Omega)}$, откуда следует, что

$$\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u_n] \leqslant \mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,\check{q}_n}[u_n] \leqslant \varepsilon^{2s} = \mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,\check{q}_n}[\mathbf{1}] = \mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[\mathbf{1}]. \tag{12}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle(-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle \leqslant \varepsilon^{2s} \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{L_q(\Omega)} - \varepsilon^{2s} \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \\ = \varepsilon^{2s}(\|u\|^2_{L_q(\Omega)} - \|u\|^2_{L_2(\Omega)}),\end{aligned}$$

и, переходя к пределу по $q \downarrow 2$ в правой части, получаем $\langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle = 0$. Поэтому, как и в предыдущем пункте, $u_n \to u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, откуда следует, что $u = \mathbf{1}$. Выбирая q близким к 2, имеем $\varepsilon < \varepsilon_s(q)$, и в этом случае неравенство (12) противоречит неравенству (8).

3. Поскольку функция $\mathbf{1}$ не является минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u]$, существует непостоянная функция u, для которой $\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u] < \varepsilon_0^{2s}$. Требуемое утверждение следует из неравенств Гёльдера:

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[u] \leqslant \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u] < \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[\mathbf{1}],$$

$$\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u] = \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[u] + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s})\frac{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega)}} < \varepsilon_0^{2s} + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) = \mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[\mathbf{1}]. \qquad \square$$

Благодаря теореме 2 для каждого $q \in (2, 2^*_s]$ можно определить показатель $\mathcal{E}_s(q)$: при $\varepsilon \leqslant \mathcal{E}_s(q)$ функция $\mathbf{1}$ дает глобальный минимум в $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_s(q)$ не дает. Очевидно, что $\varepsilon_s(q) \geqslant \mathcal{E}_s(q)$, а из теоремы 2 также следует, что $\mathcal{E}_s(q) > 0$, $\mathcal{E}_s(q)$ не возрастает и $\mathcal{E}_s(q) \to \infty$ при $q \downarrow 2$. Наконец, если $n = 1$ и $s \geqslant 1/2$, то $\mathcal{E}_s(q) \to 0$ при $q \to \infty$.

Теорема 3. *Функция $\mathcal{E}_s(q)$ непрерывна на $(2, 2^*_s]$ (на $(2, \infty)$ в случае $n = 1$ и $s \geqslant 1/2$) и строго убывает.*

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для $s < n/2$. Для случая $n = 1$ и $s \geqslant 1/2$ доказательство проходит без изменений.

1. Сначала покажем, что $\mathcal{E}_s(q)$ строго убывает. Действительно, рассмотрим точку (q_0, ε_0) на кривой $\varepsilon = \mathcal{E}_s(q)$, $q_0 \in (2, 2^*_s)$. По построению для любых $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon_0$ минимайзеры u_n функционалов $\mathcal{I}^{\varepsilon_n}_{s,q_0}[u]$ непостоянны. Нормируем эти минимайзеры условием $\|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$. Для них выполнены неравенства

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_n}_{s,q_0}[u_n] < \varepsilon_n^{2s}, \quad \text{а значит,} \ \langle(-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle < \varepsilon_n^{2s} \ \text{ и } \ \|u_n\|_{L_2(\Omega)} < 1. \tag{13}$$

Как и ранее, u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, существует слабый предел $u_n \rightharpoonup u_0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и $u_n \to u_0$ в $L_{q_0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Из слабой полунепрерывности снизу нормы в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ вытекает, что

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u_0] \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}^{\varepsilon_n}_{s,q_0}[u_n] \leqslant \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^{2s} = \varepsilon_0^{2s}.$$

Возможны два случая: $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $u_0 = \mathbf{1}$.

Разберем первый случай: при $q > q_0$ имеем $\|u_0\|_{L_q(\Omega)} > \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$; поэтому

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[u_0] < \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u_0] \leqslant \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[\mathbf{1}].$$

Отсюда следует, что при $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $q > q_0$ функция $\mathbf{1}$ не дает глобального минимума функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[u]$, поэтому $\mathcal{E}_s(q) < \varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$.

Покажем, что во втором случае невозможно неравенство $\varepsilon_0 < \varepsilon_s(q_0)$: при больших n имеем $\varepsilon_0 < \varepsilon_n < \varepsilon_s(q_0)$ и, согласно п. 2 теоремы 1, функция $\mathbf{1}$ является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_n}_{s,q_0}[u]$. Более того,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle (-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle &\leqslant \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^{2s}(\|u_n\|^2_{L_{q_0}(\Omega)} - \|u_n\|^2_{L_2(\Omega)})\\ &= \varepsilon_0^{2s}(\|\mathbf{1}\|^2_{L_{q_0}(\Omega)} - \|\mathbf{1}\|^2_{L_2(\Omega)}) = 0;\end{aligned}$$

поэтому $\langle (-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle = 0$ и $u_n \to \mathbf{1}$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Вместе с (13) это дает противоречие, как и при доказательстве п. 1 теоремы 2.

Поскольку $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0) \leqslant \varepsilon_s(q_0)$, остается единственная возможность $\varepsilon_0 = \varepsilon_s(q_0)$, и строгая монотонность следует из цепочки

$$\mathcal{E}_s(q) \leqslant \varepsilon_s(q) < \varepsilon_s(q_0) = \varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0).$$

2. В качестве второго шага покажем, что монотонная функция $\mathcal{E}_s(q)$ непрерывна слева. Для этого опять рассмотрим точку (q_0, ε_0) на кривой $\varepsilon = \mathcal{E}_s(q)$, $q_0 \in (2, 2^*_s]$: при $\varepsilon > \varepsilon_0$ функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q_0}[u]$. Поскольку L_q-норма непрерывно зависит от q, получаем, что для достаточно близких снизу к q_0 показателей q функция $\mathbf{1}$ также не является минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$, что и дает непрерывность слева.

3. Остается показать непрерывность функции $\mathcal{E}_s(q)$ справа. Пусть $q_0 \in (2, 2^*_s)$ и $\varepsilon_0 = \lim_{q\downarrow q_0} \mathcal{E}_s(q)$. Ввиду монотонности функции $\mathcal{E}_s(q)$ для любых $q_n \downarrow q_0$ минимайзеры u_n функционалов $\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_n}[u]$ непостоянны. Как и ранее, нормируем их условием $\|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1$, и имеют место неравенства

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_n}[u_n] < \varepsilon_0^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle (-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle < \varepsilon_0^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1.$$

Повторим рассуждение из доказательства п. 2 теоремы 2: u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и существует слабый предел $u_n \rightharpoonup u_0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. При любом $q < 2^*_s$ имеем $u_n \to u_0$ в $L_q(\Omega)$, а из неравенства Гёльдера при $q_0 < q_n \leqslant q$ следует, что $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geqslant \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1$; поэтому

$$\begin{aligned}\langle (-\Delta)^s_{Sp} u_0, u_0\rangle &\leqslant \lim_{n\to\infty} \langle (-\Delta)^s_{Sp} u_n, u_n\rangle\\ &\leqslant \varepsilon_0^{2s} \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{L_q(\Omega)} - \varepsilon_0^{2s} \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{L_2(\Omega)}\\ &= \varepsilon_0^{2s}(\|u_0\|^2_{L_q(\Omega)} - \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}),\end{aligned}$$

откуда предельным переходом по $q \downarrow q_0$ получаем $\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u_0] \leqslant \varepsilon_0^{2s}$. Более того, поскольку

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L_q(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geqslant \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1,\\ \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1,\end{aligned}$$

предельным переходом по $q \downarrow q_0$ получаем $\|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$. Здесь, как и в доказательстве строгой монотонности функции $\mathcal{E}_s(q)$, возможны два случая: $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $u_0 = \mathbf{1}$.

В первом случае при любом $\varepsilon > \varepsilon_0$ из оценки $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} < \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$ получаем

$$\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q_0}[u_0] = \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_0}[u_0] + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s})\frac{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u_0\|^2_{L_{q_0}(\Omega)}} < \varepsilon_0^{2s} + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) = \mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q_0}[\mathbf{1}],$$

откуда следует, что $\varepsilon_0 \geqslant \mathcal{E}_s(q_0)$. Так как функция $\mathcal{E}_s(q)$ убывает, то $\varepsilon_0 \leqslant \mathcal{E}_s(q_0)$, а следовательно, $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$.

Во втором случае $u_n \to \mathbf{1}$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, а при $q > q_0$ из $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geqslant \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)}$ получаем

$$\mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[u_n] \leqslant \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_n}[u_n] < \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q_n}[\mathbf{1}] = \mathcal{I}^{\varepsilon_0}_{s,q}[\mathbf{1}],$$

откуда следует, что $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_s(q)$. Переходя к пределу по $q \downarrow q_0$, получаем $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_s(q_0) \geqslant \mathcal{E}_s(q_0)$, что, как и в первом случае, ввиду убывания функции $\mathcal{E}_s(q)$ дает $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$. □

Замечание 6. В работе [7] было показано, что в случае $n = 1$ при $s \geqslant 1$ выполнено равенство $\varepsilon_s(q) = \mathcal{E}_s(q)$ для всех $q > 2$, а также была выдвинута гипотеза, что результат остается верным при $s \geqslant 1/2$. Эта гипотеза остается открытой, однако предложение 1 показывает, что при $s < 1/2$ равенство $\varepsilon_s(q) = \mathcal{E}_s(q)$ не выполняется при q, близких к 2^*_s снизу.

§ 3. Доказательство неравенства (10)

Доказательство. Напомним, что $n > 2s$, и перепишем неравенство (10) в виде

$$\mathcal{A}_n := \frac{2s\Gamma((n+2s)/2)}{\Gamma((n-2s+2)/2)}\left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\right]^{2s/n} < \pi^s. \tag{14}$$

Докажем, что $\mathcal{A}_{n+2} < \mathcal{A}_n$, т. е.

$$\frac{\mathcal{A}_{n+2}}{\mathcal{A}_n} = \frac{n+2s}{n-2s+2}\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)[2(n+1)]^{n/2}}\right]^{4s/(n(n+2))} < 1.$$

Возведением в степень получаем эквивалентное неравенство

$$\left[\frac{n+2s}{n-2s+2}\right]^{n(n+2)/(4s)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)[2(n+1)]^{n/2}} < 1. \tag{15}$$

Покажем, что функция $f(s) = \left[\frac{n+2s}{n-2s+2}\right]^{n(n+2)/(4s)}$ монотонно возрастает при $s \in [0,1]$. Ее логарифмическая производная равна

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\ln\left(\frac{n+2s}{n-2s+2}\right)\right] &= -\frac{1}{s^2}\ln\left(\frac{n+2s}{n-2s+2}\right) + \frac{2(n-2s+2)(2n+2)}{s(n+2s)(n-2s+2)^2} \\ &= \frac{1}{s}\left[\frac{4n+4}{(n+2s)(n-2s+2)} - \frac{1}{s}\ln\left(\frac{n+2s}{n-2s+2}\right)\right] \\ &\geqslant \frac{1}{s}\left[\frac{4n+4}{(n+2s)(n-2s+2)} - \frac{4s-2}{s(n-2s+2)}\right] \\ &= \frac{2}{s(n-2s+2)}\left[\frac{2n+2}{n+2s} - \frac{2s-1}{s}\right] \\ &= \frac{2n+8s-8s^2}{s^2(n-2s+2)(n+2s)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (15) при $s = 1$, т.е. неравенство

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\left[2(n+1)\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n+2)/2}\right]^{n/2} > 1.$$

При $n = 1$ это неравенство очевидно. При $n \geqslant 2$ докажем более сильное неравенство

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\left[2(n+1)\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n+2)/2}\right]^{n/2} \geqslant 1 + \frac{2}{n+2},$$

которое эквивалентно неравенству

$$\mathcal{B}_n := \frac{(n+2)\Gamma(n/2)}{(n+4)\Gamma(n)}\left[2(n+1)\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n+2)/2}\right]^{n/2} \geqslant 1. \tag{16}$$

Прямые вычисления показывают, что $\mathcal{B}_2 = 1$ и $\mathcal{B}_3 \geqslant 1{,}05$. Подсчитаем отношение $\mathcal{B}_{n+2}/\mathcal{B}_n$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{B}_{n+2}}{\mathcal{B}_n} &= \frac{(n+4)^2}{2(n+1)(n+2)(n+6)}\left[2(n+3)\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{(n+4)/2}\right]^{(n+2)/2} \\ &\qquad\times\left[2(n+1)\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n+2)/2}\right]^{-n/2} \\ &= \frac{(n+4)^2}{(n+2)(n+6)}\left[\frac{(n+3)(n+2)^2}{(n+1)(n+4)^2}\left(\frac{(n+2)^2}{n^2+4n}\right)^{n/2}\right]^{(n+2)/2} =: g(n).\end{aligned}$$

Покажем, что функция $g(x)$ монотонно убывает при $x \geqslant 2$. Ее логарифмическая производная равна

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} :&= \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{(x+4)^2}{(x+2)(x+6)}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{x+2}{2}\left[\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)-2\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)+\frac{x}{2}\ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2+4x}\right)\right]\right]\\
&= -\frac{8}{(x+2)(x+4)(x+6)}+\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{2}{(x+1)(x+4)}\right)-\ln\left(1+\frac{2}{x+2}\right)\right]\\
&\quad+\frac{x+1}{2}\ln\left(1+\frac{4}{x^2+4x}\right)-\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}.
\end{aligned}$$

Поскольку при $t \in (0,1)$ выполнены оценки

$$t > t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3} > \ln(1+t) > t-\frac{t^2}{2},$$

при $x \geqslant 2$ имеем (положим $y := x-2$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &\leqslant -\frac{8}{(x+2)(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+1)(x+4)}-\frac{x+1}{(x+2)^2}\\
&\quad+\frac{x+1}{2}\left(\frac{4}{x^2+4x}-\frac{8}{(x^2+4x)^2}+\frac{64}{3(x^2+4x)^3}\right)-\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}\\
&= -\frac{18x^8+219x^7+910x^6+1236x^5-968x^4-4080x^3-5024x^2-4608x-2304}{3x^3(x+1)(x+2)^2(x+3)(x+4)^3(x+6)}\\
&= -\frac{18y^8+507y^7+5992y^6+38616y^5+147472y^4+338112y^3+443968y^2+285504y+50688}{3(y+5)^3(y+6)(y+7)^2(y+8)(y+9)^3(y+10)}\\
&< 0.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Бернулли $(1+t)^m \geqslant 1+mt$ при $t > -1$, получаем

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(n+2)^2}{n^2+4n}\right)^{n/2} &= \left(1+\frac{4}{n^2+4n}\right)^{n/2} \geqslant \frac{n+6}{n+4},\\
\left[\frac{(n+3)(n+2)^2(n+6)}{(n+1)(n+4)^3}\right]^{(n+2)/2} &= \left[1-\frac{2(n^2+2n-4)}{(n+1)(n+4)^3}\right]^{(n+2)/2}\\
&\geqslant 1-\frac{(n^2+2n-4)(n+2)}{(n+1)(n+4)^3},
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g(n) &\geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^2}{(n+2)(n+6)}\left[\frac{(n+3)(n+2)^2(n+6)}{(n+1)(n+4)^3}\right]^{(n+2)/2}\\
&\geqslant \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{(n^2+2n-4)(n+2)}{(n+1)(n+4)^3}\right] = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $g(n)$ монотонно убывает к единице и потому $g(n) > 1$. Это доказывает неравенство (16), из которого следует неравенство (15), а следовательно, $\mathcal{A}_{n+2} < \mathcal{A}_n$.

Для завершения доказательства остается показать, что неравенство (14) справедливо при $n \leqslant 3$ (в случае $n = 1$ есть дополнительное ограничение $2s < 1$, поэтому его для $n = 3$ и $2s \geqslant 1$ нужно проверять отдельно). При $n = 1$ неравенство (14) принимает вид (поскольку $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

$$\frac{2s\Gamma((1+2s)/2)}{\Gamma((3-2s)/2)} < 1.$$

Справедливость этого неравенства следует из оценки $\Gamma((3+2s)/2) \leqslant \Gamma(2) \leqslant \Gamma((5-2s)/2)$:

$$\frac{2s\Gamma((1+2s)/2)}{\Gamma((3-2s)/2)} = \frac{2s(3-2s)\Gamma((3+2s)/2)}{(1+2s)\Gamma((5-2s)/2)} = \left(1 - \frac{(1-2s)^2}{1+2s}\right)\frac{\Gamma((3+2s)/2)}{\Gamma((5-2s)/2)} < 1.$$

При $n = 2$ неравенство (14) записывается в виде

$$\frac{2s\Gamma(1+s)}{\Gamma(2-s)} < \pi^s.$$

Используя формулу дополнения Эйлера $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ при нецелых z, получаем

$$2\Gamma^2(1+s)\sin(\pi s) < \pi^{1+s}(1-s),$$

и это неравенство следует из двух цепочек неравенств (поскольку $\Gamma(1+s) \leqslant 1$):

$$\begin{gathered} 2\Gamma^2(1+s)\sin(\pi s) < 2 < \pi^{1+s}(1-s) \quad \text{при } s \in (0, 0{,}7], \\ 2\Gamma^2(1+s)\sin(\pi s) < 2\sin(\pi(1-s)) < 2\pi(1-s) < \pi^{1+s}(1-s) \quad \text{при } s \in [0{,}7, 1). \end{gathered}$$

При $n = 3$ неравенство (14) записывается в виде

$$\frac{2s\Gamma((3+2s)/2)}{\Gamma((5-2s)/2)}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right]^{2s/3} < \pi^s,$$

или, после избавления от знаменателя,

$$2s\Gamma((3+2s)/2) < (4\pi)^{2s/3}\Gamma((5-2s)/2).$$

Справедливость этого неравенства следует из цепочки оценок

$$\begin{aligned} 2s\Gamma((3+2s)/2) &< 2s\Gamma(5/2) = 3s\Gamma(3/2) \\ &< (4\pi)^{2s/3}\Gamma(3/2) < (4\pi)^{2s/3}\Gamma((5-2s)/2). \qquad \square \end{aligned}$$

Автор благодарит А. И. Назарова за постановку задачи и ценные обсуждения результатов, а также А. П. Щеглову за полезные замечания, позволившие улучшить текст работы.

Литература

[1] A. Cotsiolis, N. K. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl., **295**:1 (2004), 225–236.

[2] R. Musina, A. I. Nazarov, *On fractional Laplacians*, Comm. Partial Differential Equations, **39**:9 (2014), 1780–1790.

[3] R. Musina, A. I. Nazarov, *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian*, Nonlinear Anal.: Theory Methods Appl., **121** (2015), 123–129.

[4] A. L. Pereira, M. C. Pereira, *A generic property for the eigenfunctions of the Laplacian*, Topol. Methods Nonlinear. Anal., **20**:2 (2002), 283–313.

[5] В. П. Ильин, *Некоторые интегральные неравенства и их применения в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Матем. сб., **54(96)**:3 (1961), 331–380.

[6] А. И. Назаров, *О точной константе в одномерной теореме вложения*, Проблемы мат. анализа, т. 19, Научн. кн., Новосибирск, 1999, 149–163.

[7] А. И. Назаров, *О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка*, в кн.: *Вопросы современной теории аппроксимации*, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2004, 146–158.

[8] А. И. Назаров, А. П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева*, Проблемы мат. анализа, т. 27, Т. Рожковская, Новосибирск, 2004, 109–136.

[9] Л. Н. Слободецкий, *Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных*, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **197** (1958), 54–112.

[10] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

[11] Н. С. Устинов, *О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью*, Алгебра и анализ (в печати).

[12] А. П. Щеглова, *Задача Неймана для полулинейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **348** (2007), 272–302.

Н. С. Устинов
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ustinns@yandex.ru

Поступила в редакцию
12 августа 2020 г.
После доработки
12 августа 2020 г.
Принята к публикации
23 августа 2020 г.