Ю. Я. Поляк, Б. М. Чистосердов, К теории вольтамперной характеристики одномерного газового разряда с поперечным теплоотводом, *ТВТ*, 1967, том 5, выпуск 6, 1111–1113

УДК 537.52

К ТЕОРИИ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМЕРНОГО ГАЗОВОГО РАЗРЯДА С ПОПЕРЕЧНЫМ ТЕПЛООТВОДОМ

Ю. Я. Полян, Б. М. Чистосердов

В работе [1] рассматривалась вольтамперная характеристика одномерного проводника с произвольно зависящими от температуры коэффициентами теплопроводности $k(T)$ и электропроводности $\sigma(T)$ в предположении, что выделяющееся при прохождении тока джоулево тепло отводится через концы проводника, на которых заданы те или иные граничные условия (продольный теплоотвод). В настоящей работе рассмотрен случай поперечного теплоотвода — джоулево тепло отводится только через боковую поверхность проводника, который представляет собой плоскую пластину или цилиндр, причем в последнем случае ток может быть направлен или вдоль оси цилиндра, или по азимуту.

Для плоской задачи уравнение теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+\sigma E^2=0 \tag{1}$$

можно проинтегрировать при любых $k(T)$ и $\sigma(T)$. Поскольку ток через стенки идти не должен, можно использовать граничные условия

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad T|_{x=h-0}=T_1,\quad T|_{x=h+0}=T_0,\quad -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=h-0}=\lambda(T_1-T_0), \tag{2}$$

где $2h$ — толщина проводника; T_0 — температура окружающей среды, λ — коэффициент внешней теплоотдачи. Решение уравнения (1) вместе с условиями (2) запишем в виде

$$Eh=\int\limits_{T_1}^{T_m}\frac{kdT}{\sqrt{2\int\limits_{T_1}^{T_m}k\sigma dT}},\qquad j=\sqrt{8\int\limits_{T_1}^{T_m}k\sigma dT},\qquad 2\lambda(T_1-T_0)=Ej, \tag{3}$$

где $j=2E\int\limits_0^h\sigma dx$. Отсюда для вольтамперной характеристики имеем

$$\frac{dE}{dj}=\frac{1}{2h\sigma(T_1)}\left\{1-\left(1+\frac{2k(T_1)\sigma(T_1)E}{\lambda j}\right)\frac{j\sigma(T_1)}{2}\int\limits_{T_1}^{T_m}\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial T}\frac{dT}{\sqrt{2\int\limits_{T}^{T_m}k\sigma dT}}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{jk(T_1)\sigma(T_1)}{2\lambda h}\int\limits_{T_1}^{T_m}\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial T}\frac{dT}{\sqrt{2\int\limits_{T}^{T_m}k\sigma kT}}\right\}^{-1}. \tag{4}$$

Из (4) видно, что при $\partial\sigma/\partial T>0$ возможно насыщение по напряжению, а при $\partial\sigma/\partial T<0$ — насыщение по току. Чтобы перейти к более жестким граничным условиям, когда на внутренней поверхности стенок поддерживается заданная температура, достаточно положить $1/\lambda=T_1-T_0=0$. При этом стоящая в знаменателе фигурная скобка превращается в единицу, и насыщение по току становится невозможным. Таким образом, если в случае продольного теплоотвода при фиксированных на концах проводника температурах возможно только насыщение по току (если $\partial\sigma/\partial E<0$), то в случае поперечной теплоотдачи при тех же граничных условиях возможно только насыщение по напряжению (если $\partial\sigma/\partial T>0$). При менее жестких граничных условиях (2) в обеих задачах возможно насыщение как по току (если $\partial\sigma/\partial T<0$), так и по напряжению (если $\partial\sigma/\partial T>0$). Заметим, что в работе [1] в формулах (7)—(9) достаточно положить $T_2=T_1$, $m=0$, чтобы получить граничные условия (2) настоящей работы как частный случай.

В случае цилиндрической симметрии и продольного тока ($E_z=E=\text{const}$) при произвольных $k(T)$ и $\sigma(T)$ задачу нельзя свести к квадратурам. Однако для модели $\partial\sigma/\partial T=\pm\alpha^2k(T)$, где $\alpha=\text{const}$ (в частности, $\sigma\sim T$, $k=\text{const}$), уравнение теплопроводности сводится к уравнению Бесселя [2]

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\sigma}{dr}\right)\pm\alpha^2E^2\sigma=0.$$

Решение этого уравнения с граничными условиями на поверхности сплошного цилиндра радиуса R, аналогичными (2), дает

$$j=\frac{2\pi R\sigma(T_1)}{\alpha}\frac{J_1(R\alpha E)}{J_0(R\alpha E)},\quad \sigma(T_1)\frac{E}{\alpha}\frac{J_1(R\alpha E)}{J_0(R\alpha E)}=\lambda(T_1-T_0)\qquad(\partial\sigma/\partial T>0),\tag{5}$$

$$j=\frac{2\pi R\sigma(T_1)}{\alpha}\frac{I_1(R\alpha E)}{I_0(R\alpha E)},\quad \sigma(T_1)\frac{E}{\alpha}\frac{I_1(R\alpha E)}{I_0(R\alpha E)}=\lambda(T_1-T_0)\qquad(\partial\sigma/\partial T<0),\tag{6}$$

Отсюда для $dj\,/\,dE$ получим

$$\frac{dj}{dE}=\left\{2\pi R^2\sigma(T_1)\frac{d}{d(R\alpha E)}\left[\frac{J_1(R\alpha E)}{J_0(R\alpha E)}\right]+\frac{\alpha kj}{\lambda}\frac{J_1(R\alpha E)}{J_0(R\alpha E)}\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{\alpha kE}{\lambda}\frac{J_1(R\alpha E)}{J_0(R\alpha E)}\right\}^{-1}\qquad(\partial\sigma/\partial T>0),\tag{7}$$

$$\frac{dj}{dE}=\left\{2\pi R^2\sigma(T_1)\frac{d}{d(R\alpha E)}\left[\frac{I_1(R\alpha E)}{I_0(R\alpha E)}\right]-\frac{\alpha kj}{\lambda}\frac{I_1(R\alpha E)}{I_0(R\alpha E)}\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{\alpha kE}{\lambda}\frac{I_1(R\alpha E)}{I_0(R\alpha E)}\right\}^{-1}\qquad(\partial\sigma/\partial T<0).\tag{8}$$

Из (7), (8) видно, что, как и в плоской задаче, при $\partial\sigma\,/\,\partial T>0$ возможно насыщение по напряжению, а при $\partial\sigma\,/\,\partial T<0$ — насыщение по току. Из (5), (7) следует также, что для $\partial\sigma\,/\,\partial T>0$ максимальное поле E_0 достигается при $j=\infty$, если $\partial^2\sigma\,/\,\partial T^2<0$, когда $T=\infty$, и при конечных j, если $\partial^2\sigma\,/\,\partial T^2>0$, когда $T=\infty$ (в последнем случае максимальное поле меньше E_0, и для $j=\infty$ имеем $E=0$, $\partial j\,/\,\partial E=-\infty$). Из (6), (8) следует, что максимальный ток достигается при $E=\infty$, если $\sigma T=\infty$ (или const), когда $T=\infty$, и при конечных E, если $\sigma T=0$, когда $T=\infty$. Для модели $\sigma(T)\sim T^{3/4}\exp(-T_i\,/\,T)$, в частности, $dE\,/\,dj=0$ при двух конечных значениях E, j (максимум и минимум) и при $j=\infty$ и $E=E_0$ ($J_0(R\alpha E_0)=0$), причем первый максимум меньше E_0.

Введем радиальную плотность тока $i(r)$ с помощью соотношения $j=\int\limits_0^R i(r)\,dr$.

При $\partial\sigma\,/\,\partial T>0$

$$i(r)=2\pi\sigma(T_1)E\frac{rJ_0(r\alpha E)}{J_0(R\alpha E)},$$

причем $i(r)$ имеет максимум при $r=r_0$, где r_0 является решением уравнения

$$J_0(r_0\alpha E)\;-r_0\alpha EJ_1(r_0\alpha E)=0.$$

Видно, что $r_0>R$ при малых E, т. е. цилиндрический слой с максимальной радиальной плотностью тока $i(r_0)$ лежит вне цилиндра, а при E_0, определенном формулой $J_0(RE_{\text{макс}}\alpha)=0$, достигается наименьшее значение $r_0\,/\,R\approx0{,}5$.

Переходя далее к азимутальному току, укажем на два практически интересных случая: $E\sim r$ и $E\sim1\,/\,r$. В первом случае э.д.с. индукции пропорциональна r^2 (сплошной цилиндрический проводник радиуса R внутри соленоида, создающего переменное магнитное поле). Во втором — проводник ограничен двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1, R_2, причем переменный во времени магнитный поток сосредоточен в магнитопроводе, которым является внутренний цилиндр, так что э.д.с. индукции не зависит от r (в задачах с переменным магнитным полем и азимутальным потоком, разумеется, пренебрегаем скин-эффектом, и член σE^2 усредняем по времени). Будем искать зависимость от E для джоулева тепла, выделяющегося в проводнике на единицу длины

$$W=2\pi R\lambda(T_1-T_0),\quad W=2\pi\lambda[R_1(T_1-T_0)+R_2(T_2-T_0)].\tag{9}$$

Для сплошного цилиндра, полагая $E=\varphi r\,/\,2\pi R^2$, где φ — усредненная по времени э.д.с. индукции для кольцевого проводника радиуса R, которая является параметром задачи, и $\partial\sigma / \partial T = \pm\alpha^2 k(T)$, получим граничные условия

$$\frac{\sigma(T_1)\varphi}{2\pi R a} \frac{J_1\left(\frac{\alpha\varphi}{4\pi}\right)}{J_0\left(\frac{\alpha\varphi}{4\pi}\right)} = \lambda(T_1 - T_0) \qquad (\partial\sigma/\partial T > 0),$$

$$\frac{\sigma(T_1)\varphi}{2\pi R a} \frac{I_1\left(\frac{\alpha\varphi}{4\pi}\right)}{I_0\left(\frac{\alpha\varphi}{4\pi}\right)} = \lambda(T_1 - T_0) \qquad (\partial\sigma/\partial T < 0), \tag{10}$$

откуда совместно с (9) следует, что при $\partial\sigma / \partial T > 0$ возможно $dW / d\varphi = \pm\infty$, но $dW / d\varphi > 0$, если $\partial\sigma / \partial T < 0$. Справедливы также замечания относительно знака $\partial^2\sigma / \partial T^2$ при $T = \infty$.

Для проводника между коаксиальными цилиндрами уравнение теплопроводности интегрируется при произвольных $k(T)$, $\sigma(T)$. Из полученных весьма громоздких формул следует, что $dW/d\varphi > 0$, если $\partial\sigma/\partial T < 0$, а при $\partial\sigma/\partial T > 0$ возможно $dW/d\varphi = \pm\infty$ и $dW / d\varphi = 0$. Отметим, что для проводника между коаксиальными цилиндрами при наличии поля $E = \varphi / 2\pi r$ джоулево тепло и полный ток $j = \int\limits_{R_1}^{R} \sigma E dr$ связаны простой формулой $W = j\varphi$. При этом для $\partial\sigma / \partial T > 0$ возможно $dj / d\varphi = \pm\infty$ и $dj/d\varphi = 0$, а для $\partial\sigma/\partial T < 0$ возможно $dj/d\varphi = 0$. При жестких граничных условиях $1 / \lambda = 0$, $T_1 = T_2 = T_0$ возможно $dj / d\varphi = \pm\infty$ для $\partial\sigma / \partial T < 0$, но $dj / d\varphi > 0$ для $\partial\sigma / \partial T < 0$.

Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 4 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Я. Поляк. Теплофизика высоких температур, 4, № 1, 166, 1966.
2. H. Maecker. Z. Phys., 157, № 1, 1959 (русск. пер. в сб. «Движущая плазма». ИЛ, М., 1961).

УДК 533.9.072,537.52—96

ЗАВИСИМОСТЬ РАДИУСА ТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ ОТ МОЩНОСТИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СТЕНОК

Л. Е. Белоусова

Проблема практического использования плазмы, в том числе и высокочастотной, связана с вопросами термозащиты стенок при больших мощностях разряда. В работах [1—3], использующих каналовую модель термически равновесного плазменного столба, рассматривалась зависимость радиуса проводящей зоны от мощности в зависимости от условий охлаждения без учета влияния стенок. Аналогичное рассмотрение в случае сферической геометрии разряда было проведено в [4].

Рассмотрим более общую задачу, учитывая влияние толщины и материала стенок на радиус проводящей зоны разряда. Будем пренебрегать потерями на излучения, а также ограничимся рассмотрением стационарной и симметричной задач. Уравнения баланса энергии для внутренней, энергосодержащей $(0 \leqslant r \leqslant r_i)$ и периферийной $(r_i \leqslant r \leqslant a)$ зон, а также для стенки $(a \leqslant r \leqslant b)$ при принятых допущениях имеют соответственно вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi\frac{dT_1}{dr}\right) = -q(r), \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi\frac{dT_2}{dr}\right) = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\lambda\frac{dT_3}{dr}\right) = 0. \tag{2}$$