В. В. Зайцев, Покоординатные оценки множества достижимости динамической системы,
Дифференц. уравнения, 1993, том 29, номер 4, 575–584

АПРЕЛЬ 1993 г., ТОМ 29, № 4

УДК 517.977

В. В. ЗАЙЦЕВ

ПОКООРДИНАТНЫЕ ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задача нахождения множеств достижимости и интегральной воронки динамической системы привлекает различных исследователей. В ряде работ [1—5] получены различные соотношения, определяющие границу множеств достижимости. Для нелинейных систем нахождение аналитического соотношения, описывающего искомую границу, сводится к решению уравнения в частных производных [1—3, 5], также существенно нелинейного. В общем случае такая задача конструктивно не решается. Поэтому многие исследователи рассматривают задачи оценки множества достижимости [6—9]. Если такие оценки получены, то строятся разнообразные оценки в различных задачах теории динамических систем, теории управления, теории стабилизации и устойчивости и др. [5, 6, 10, 11].

В работе [12] получено уравнение, определяющее опорные функции к множеству достижимости (уравнение в сопряженном пространстве). Аналитическое решение этого уравнения в частных производных возможно для линейных систем и в частных случаях. В [12] предлагается некоторый алгоритм приближенного решения этого уравнения.

Среди указанных методов построения оценок изучаемых множеств наиболее конструктивно эллипсоидальное оценивание [6]. Указанный метод строит оптимальные оценки для линейных систем. Для нелинейных систем точность оценок зависит от точности приближения правых частей к аппроксимирующим сверху и снизу линейным вектор-функциям. Поэтому построение все более точных оценок множества достижимости является актуальной задачей.

В рассматриваемой работе строятся гарантирующие двухсторонние оценки множества достижимости для динамических систем с управлением среди n-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям. В различных предположениях задача построения рассматриваемых оценок сведена к решению $2n$ задач Коши для построенных систем сравнения.

С использованием метода сравнения получены теоремы о построении оценок множества достижимости среди достаточно общих n-мерных тел. При фиксировании структуры границы этих тел конструктивно построены системы сравнения и оценки множеств достижимости. Рассматривается задача дальнейшего улучшения оценок множества достижимости.

1. Основные определения. Постановка задачи. Рассмотрим систему вида

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(x,u)=h(x)+g(x,u),\ x\in R^n;\ u\in U\subset R^m;\\ u=u(x);\ f(x,u):R^n\times R^m\to R^1;\ f\in C(R^n\times R^m),\end{gathered}\tag{1.1}$$

где x — вектор фазового состояния системы, u — управление, U — ограничения на управление.

Будем предполагать класс допустимых управлений и вектор-функцию f такими, что система (1.1) динамическая при любом допустимом управлении. Это предположение выполнено, если функции h_i и g_i, $u_i = u_i(x)$ $(\forall i)$ локально удовлетворяют условию Липшица. Также предположим ограниченность функций $f_i(x, u)$ $(\forall i)$ на произвольном компактном множестве при любом допустимом управлении $u \in U$. Далее воспользуемся следующими обозначениями: $x(t, x_0, u)$ — решение задачи Коши для системы (1.1) при начальном условии $x(t_0) = x_0$ и управлении u, mes_{R^n} — мера Лебега в R^n, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, x_i — координата вектора x, e_i — координатные орты, θ — начало координат R^n, X_i — координатные оси в R^n, $f_t^u(G) = \{y \mid y = x(t, x_0, u) \wedge x_0 \in G\}$, $(\forall i : i \in I_n)$ $D_i = \{x \mid x \in R^n \wedge x_i \geqslant 0\}$, $(\forall i : i \in I_{2n} \setminus I_n)$ $D_i = \{x \mid x \in R^n \wedge x_i \leqslant 0\}$.

Рассмотрим ограничения U как замкнутое множество, ограниченное симметричным многогранником в R^m, содержащим внутри начало координат R^m.

Также предположим, что задано множество начальных условий — множество $G : G \subset R^n$, $\mathrm{mes}_{R^n} G > 0$, $\theta \in \mathrm{int}\, G$, и множество G является ограниченным, замкнутым, строго выпуклым множеством. Границу ∂G предполагаем гладкой.

Воспользуемся также следующими обозначениями: $a_i = \max\limits_{x \in G} x_i$, $b_i = \min\limits_{x \in G} x_i$, $a^i = \arg\max\limits_{x \in G} x_i$, $b^i = \arg\min\limits_{x \in G} x_i$.

Требуется в каждый момент времени t из некоторого интервала $\mathscr{T}$ найти оценку множества достижимости (далее будем обозначать ее $C_t(G)$), определяемого как множество концов траекторий $x(t, x_0, u)$ при всех допустимых $u \in U$ и $x_0 \in G$.

2. Построение оценок множества достижимости по некоторым координатам. Рассмотрим оценки множества достижимости среди n-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, а также функции $f_i(x, u)$ $(\forall i)$ и допустимые управления $u_i = u_i(x)$ среди непрерывно дифференцируемых функций.

Предположим выполнение условия

$$(\forall i : i \in I_{2n}) \quad (\forall t : t \in \mathscr{T}) \quad \mathrm{mes}_{R^n}(C_t(G) \cap D_i) > 0. \tag{2.1}$$

Это условие выполнено для конечного интервала времени $\mathscr{T}$, если во множестве G существует инвариантное подмножество $S : S \subset \mathrm{int}\, G \wedge \theta \in S$ системы (1.1) для всех допустимых управлений. Если $(\forall i : i \in I_{2n})$ $\mathrm{mes}_{R^n}(S \cap D_i) > 0$, то интервал $\mathscr{T}$ может рассматриваться бесконечным: $\mathscr{T} = [t_0, \infty)$.

Условие (2.1) также выполнено, если существуют допустимые управления ω^i, w^i, $i \in I_n$, для которых

$$(\forall i : i \in I_n) \quad (\forall x : x \in D_i) \quad f_i(x, \omega^i) \geqslant 0,$$
$$(\forall j : j \in I_n) \quad (\forall x : x \in D_{n+j}) \quad f_j(x, w^j) \leqslant 0.$$

Введем управления u^i, v^i при помощи соотношений

$$(\forall i : i \in I_n) \quad (\forall x : x \in D_i) \quad u^i = \arg\max_{u \in U} f_i(x, u), \tag{2.2}$$

$$(\forall j : j \in I_n) \quad (\forall x : x \in D_{n+j}) \quad v^j = \arg\min_{u \in U} f_j(x, u), \tag{2.3}$$

предполагая существование управлений u^i, v^i среди допустимых. По формулам (2.2), (2.3) векторы u^i, v^i могут быть определены не полностью. Так, например, в случае $f_i(x, u) = f_i(x, u_i)$ формулы (2.2), (2.3) могут определять лишь i-ю компоненту векторов u^i, v^i. При некоторых функциях $f_i(x, u)$ и ограничениях формулы (2.2), (2.3) могут задавать лишь соотношение в виде равенства на компоненты вектора u.

Далее векторы u^i, v^i будут использоваться в функциях $f_i(x, u^i)$, $f_i(x, v^i)$. Значение этих функций в соответствии с (2.2), (2.3) определено.

На каждой гиперплоскости $\{x|x_i=c\}$, которая может быть достигнута траекториями системы (1.1), определим множества A^i, B^i:

$$A^i=\bigcup_c \{x|\arg \max_{y\in\{y|y_i=c\}\cap D_i} f_i(y, u^i)\}, \tag{2.4}$$

$$B^i=\bigcup_c \{x|\arg \min_{y\in\{y|y_i=c\}\cap D_{i+n}} f_i(y, v^i)\}.$$

Предположим, что множества A^i, B^i являются некоторыми гладкими кривыми, проходящими через множество G и пересекающими каждую гиперплоскость $\{x|x_i=c\}$ только в одной точке. Обозначим касательный орт к кривой A^i как $n^i(c)$.

Введем векторы, параллельные $\nabla f_i(x, u^i)$, по формулам

$$F^i(x)=\nabla f_i(x, u^i)|f_i(x, u^i)|/(\dot{\nabla} f_i(x, u^i), e_i), \tag{2.5}$$

$$\Phi^i(x)=\nabla f_i(x, v^i)|f_i(x, v^i)|/(\nabla f_i(x, v^i), e_i). \tag{2.6}$$

Теорема 1. *Если справедливы вышеописанные предположения и существуют допустимые управления u^i, v^i, $i\in I_n$, а также выполнены неравенства*

$$(\forall i:i\in I_n)\ (\forall x:x\in D_i\cap A^i)\ (\nabla f_i(x, u^i), e_i)>0, \tag{2.7}$$

$$(\forall i:i\in I_n)(\forall x:x\in D_{i+n}\cap B^i)\ (\nabla f_i(x, v^i), e_i)<0, \tag{2.8}$$

то множество достижимости $C_t(G)$ для системы (1.1) может быть оценено в виде

$$(\forall t:t\in\mathcal{T})\ (\forall x_0:x_0\in G)\ (\forall u:u\in U)$$

$$z_i^i(t, z_0)\leqslant x_i(t, x_0, u)\leqslant y_i^i(t, y_0), \tag{2.9}$$

где $y_i^i(t, y_0)$, $z_i^i(t, z_0)$ — i-тые компоненты интегральных кривых $y^i(t, y_0)$, $z^i(t, z_0)$ следующих систем:

$$\dot{y}_j^i=F_j^i(y),\ j\in I_n, \tag{2.10}$$

$$\dot{z}_j^i=\Phi_j^i(z) \tag{2.11}$$

для $y_0\in A^i\cap\partial G$, $z_0\in B^i\cap\partial G$.

Доказательство. Докажем правое из неравенств (2.9). В каждой точке гиперплоскости $\{x|x_i=c\}$ ни одна кривая системы (1.1) не может иметь i-ую координату скорости больше, чем $f_i(x^1, u^i)$, где $x^1\in\{x|x_i=$ $=c\}\cap A^i$. В соответствии с (2.5) имеем

$$F_i^i(x)=(\nabla f_i(x, u^i), e_i)f_i(x, u^i)/(\nabla f_i(x, u^i), e_i)=f_i(x, u^i).$$

Согласно условиям (2.5), (2.7), вектор $F^i(x)$ параллелен вектору $\nabla f_i(x, u^i)$. С учетом (2.7) при возрастании t координата $y_i^i(t, y_0)$ возрастает и, кроме того, $n^i=\nabla f_i(x, u^i)/|\nabla f_i(x, u^i)|$.

Покажем, что проекция вектора $F^i(x)$ на направление вектора $\nabla f_i(x, u^i)$ не меньше проекции любого из векторов $f(x, u)$ на направление $\nabla f_i(x, u^i)$ при разных u. Вектор $F^i(x)$ параллелен $\nabla f_i(x, u^i)$ и имеет проекцию на ось X_i, равную $f_i(x, u^i)$. С учетом (2.2) получим

$$\max_{u\in U}(f(x, u), \nabla f_i(x, u^i)/|\nabla f_i(x, u^i)|)\leqslant|F^i(x)|.$$

Поэтому ни одна интегральная кривая не может иметь скорость в каждой точке множества A^i больше, чем интегральная кривая $y^i(t, y_0)$. В соответствии с определением множества A^i по формуле (2.4) получим справедливость неравенства (2.9).

Замечания. 1°. Если непрерывные функции $F_j^i(y)$, $\Phi_j^i(z)$ не удовлетворяют условиям Липшица, то можно в формуле (2.9) вместо координат интегральных кривых $y^i(t, y_0)$, $z^i(t, z_0)$ рассматривать выражения $\inf z_i^i(t, z_0)$, $\sup y_i^i(t, z_0)$, где inf и sup берутся среди интегральных кривых, начинающихся в точках z_0, y_0.

2°. Если вместо неравенств (2.7), (2.8) имеют место противоположные неравенства, то в (2.5), (2.6) достаточно рассмотреть вместо вектора $\nabla f_i(x, u^i)$ вектор $-\nabla f_i(x, u^i)$.

3°. Если кривые A^i, B^i не проходят через множество G, но существуют допустимые управления u^i, v^i, то оценка (2.11) справедлива при начальных условиях:

$$y_0 = A^i \cap \{x \mid x_i = a_i\}, \quad z_0 = B^i \cap \{x \mid x_i = b_i\}.$$

4°. Если для системы (1.1) можно доопределить компоненты вектора u^i таким образом, что векторы $f(x, u^i)$, $\nabla f_i(x, u^i)$ параллельны и $u^i = \arg\max\limits_{u \in U} (\nabla f_i(x, u), f(x, u)) / |\nabla f_i(x, u)|$, то правая оценка (2.9), (2.10) является неулучшаемой среди n-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и множество $C_t(G)$ соприкасается с рассматриваемыми параллелепипедами в точках кривых A^i, B^i при различных t.

5°. Если координаты управления u^i можно определить указанным в замечании 4 образом и множество $C_t(G)$ является строго выпуклым, то можно показать справедливость следующих оценок для множества $C_t(G)$:

$$(\forall t : t \in \mathcal{T}) \quad (\forall x_0 : x_0 \in G) \quad (\forall u : u \in U) \quad x_i(t, x_0, u) \leqslant \max_{x_0 \in \partial G} y_i(t, x_0)$$

для интегральных кривых $y(t, x_0)$ системы $\dot{y} = f(y, u^i)$.

Рассмотрим частные случаи, при которых оценки области достижимости являются неулучшаемыми в некотором классе параллелепипедов. Пусть система имеет вид

$$\dot{x}_i = h_i(x) + g_i(x) l_i(u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \tag{2.12}$$

Предположим выполнение для функций h_i, g_i $(\forall i)$ следующих условий:

$$(\forall x_i : x_i \neq 0) \operatorname{sign} h_i(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) = \operatorname{sign} x_i, \tag{2.13}$$

$$(\forall j : j \neq i) \quad h_j(0, 0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0) = 0, \tag{2.14}$$

$$(\forall x : x \notin X_i) \operatorname{sign} x_i h_i(x) \leqslant h_i(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \operatorname{sign} x_i. \tag{2.15}$$

В (2.13)—(2.15) вектор $(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$ принадлежит оси X_i.

Примером функций, удовлетворяющих условиям (2.13), (2.14), может служить функция $h_i(x) = p(x) x_i^{r_i}$; $(\forall x)$ $p_i(x) > 0$, $i \in I_n$, $r_i > 0$, а условию (2.15) — функция $h_i(x) = \exp(-s(x)) x_i^{r_i}$; $s(x) = \sum\limits_{j : j \neq i} x_j^2$.

Условия (2.13), (2.14) гарантируют существование интегральных кривых систем (2.12) вдоль осей X_i. Условие (2.15) эквивалентно включениям A^i, $B^i \subset X_i$ для системы (2.12) и гарантирует, что вдоль этих кривых координаты x_i возрастают наибыстрейшим образом:

$$\begin{gathered}(\forall t : t \in \mathcal{T}) \quad (\forall x_0 : x_0 \in G) \quad (\forall u : u \in U) \\ z_i(t, z_0) \leqslant x_i(t, x_0, u) \leqslant y_i(t, y_0),\end{gathered} \tag{2.16}$$

где $y_i(t, y_0)$, $z_i(t, z_0)$ — кривые систем

$$\dot{y}_i = h_i(0, 0, \ldots, 0, y_i, 0, 0, \ldots, 0) + g_i(0, 0, \ldots, y_i, 0, \ldots, 0) l_i(u^i), \tag{2.17}$$

$$\dot{z}_i = h_i(0, 0, \ldots, 0, z_i, 0, 0, \ldots, 0) + g_i(0, 0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0) l_i(v^i) \tag{2.18}$$

для начальных условий $y_0 = (0, 0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0)$, $z_0 = (0, 0, \ldots, 0, b_i, 0, \ldots, 0)$.

Рассмотрим теперь систему (2.12) для строго монотонных функций h_i, g_i, т. е. функций со следующими свойствами: $(\forall i{:}i\in I_n)$ $(\forall x^1, x^2{:}x^1_j\leqslant x^2_j(\forall j{:}j\in I_n))$ $h_i(x^1)\leqslant h_i(x^2)\wedge(\exists k)$, $x^1_k<x^2_k\Rightarrow h_i(x^1)<h_i(x^2)$, и множества G следующего вида:

$$G=\{x\,|\,b_i\leqslant x_i\leqslant a_i\},\ a_i>0,\ b_i<0.$$

Следствие 1. *Если существуют допустимые управления* u^i, v^i *для системы (2.12) при функциях* $l_i(u)=l_i(u_i)$, *зависящих от аргумента* u_i, *и строго монотонных функциях* h_i, g_i $(\forall i{:}i\in I_n)$, *то оценка множества достижимости* $C_t(G)$ *может быть записана в виде*

$$(\forall t{:}t\in\mathscr{F})\ \ (\forall x_0{:}x_0\in G)\ \ (\forall v{:}v\in U)\ \ (\forall i{:}i\in I_n)$$

$$z_i(t, b^i)\leqslant x_i(t, x_0, v)\leqslant y_i(t, a^i)$$

для кривых $z(t, b^i)$, $y(t, a^i)$ *систем*

$$\dot{y}_i=f_i(y, u^i),\ i\in I_n,$$

$$\dot{z}_i=f_i(z, v^i).$$

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы 1 с учетом свойства монотонности функций.

3. Сведение оценки множества достижимости к интегрированию систем сравнения.

Теорема 2. *Если множество* $C_t(G)$ $(\forall t{:}t\in\mathscr{F})$ *ограничено некоторым компактным множеством* Q^i_t *и существуют допустимые управления* u^i, v^i, *определяемые формулами (2.2), (2.3), то множество достижимости для системы (1.1) может быть оценено следующим образом:*

$$(\forall t{:}t\in\mathscr{F})(\forall x_0{:}x_0\in G)\ \ (\forall u{:}u\in U)(\forall i{:}i\in I_n)$$

$$z_i(t, b^i)\leqslant x_i(t, x_0, u)\leqslant y_i(t, a^i), \tag{3.1}$$

где $y(t, a^i)$, $z(t, b^i)$ — *интегральные кривые систем*

$$\dot{y}_i=R_i(y_i),\ i\in I_n, \tag{3.2}$$

$$\dot{z}_i=P_i(z_i), \tag{3.3}$$

а функции R_i, P_i, $i\in I_n$, *выбираются как функции, удовлетворяющие условию Липшица и неравенствам*

$$\max_{x\in\{x|x_i=c\}\cap Q^i_t} f_i(x,\ u^i)\leqslant R_i(c), \tag{3.4}$$

$$\min_{x\in\{x|x_i=c\}\cap Q^i_t} f_i(x, v^i)\geqslant P_i(c). \tag{3.5}$$

Доказательство. Докажем правое из неравенств (3.1). Для каждой точки $x=x(t, x_0, u)$ $(\forall u{:}u\in U)$ координата $x_i(t, x_0, u)$ на множестве $\{x|x_i=c\}\cap Q^i_t$ не может возрастать быстрее, чем вдоль векторного поля, ортогонального к гиперплоскости $x_i=c$, каждый вектор которого равен $R_i(c)$. Но это и задает систему (3.2).

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}_i=f_i(x)\cos\vartheta_i,\ 0\leqslant\vartheta_i<2\pi, \tag{3.6}$$

при функциях $f_i(x)$, удовлетворяющих условиям (2.13) — (2.15). Управлением, при котором справедливы оценки (3.1) множества $C_t(G)$, являются векторы $u^i=v^i=(\pi/2,\ \pi/2, \dots, \pi/2,\ 0,\ \pi/2, \dots, \pi/2)$. Указанная оценка множества $C_t(G)$ для системы (3.6) будет являться неулучшаемой среди рассматриваемых параллелепипедов. Системы сравнения (3.2), (3.3) в этом случае имеют вид

$$\dot{y}_i = f_i(0, 0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0),$$

$$\dot{z}_i = f_i(0, 0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0).$$

Теорема 3. *Предположим для всех $t : t \in \mathcal{T}$ ограниченность множества $C_t(G)$ и существование допустимых управлений u^i, v^i, определяемых соотношениями (2.2), (2.3), тогда множество достижимости для системы (1.1) может быть оценено следующим образом:*

$$(\forall t : t \in \mathcal{T})\ (\forall x_0 : x_0 \in G)\ (\forall u : u \in U)\ (\forall i : i \in I_n)$$

$$z_i(t, b^i) \leqslant x_i(t, x_0, u) \leqslant y_i(t, a^i) \tag{3.7}$$

для интегральных кривых $z(t, b^i)$, $y(t, a^i)$ системы

$$\dot{z} = l(z, y), \quad z, y \in R^n, \tag{3.8}$$

$$\dot{y} = p(z, y), \tag{3.9}$$

для функций l_i, $p_i : R^n \times R^n \to R^1$ $(\forall i : i \in I_n)$, удовлетворяющих условию Липшица и неравенствам

$$\max_{x \in B_i(z, y)} f_i(x, u^i) \leqslant p_i(z, y), \tag{3.10}$$

$$\min_{x \in C_i(z, y)} f_i(x, v^i) \geqslant l_i(z, y), \tag{3.11}$$

где множества B_i, $C_i \subset R^n$ имеют вид

$$B_i(z, y) = \{x \mid (\forall j : j \neq i) z_j \leqslant x_j \leqslant y_j \wedge x_i = y_i\},$$

$$C_i(z, y) = \{x \mid (\forall j : j \neq i) z_j \leqslant x_j \leqslant y_j \wedge x_i = z_i\}.$$

Доказательство. Для любого допустимого управления $u \in U$ и произвольного x справедливы неравенства

$$l_i(z_i, y_i) \leqslant f_i(x, u) \leqslant p_i(z_i, y_i)$$

при любых z_i, y_i, таких, что $z_i \leqslant x_i \leqslant y_i$. Скорость возрастания и убывания по каждой координате x_i для интегральной кривой $x(t, x_0, u)$, $x_0 \in G$, не более чем соответствующая скорость у интегральных кривых $y(\tau, a^i)$, $z(\tau, b^i)$ при прохождении одних и тех же гиперплоскостей $\{x \mid x_i = c\}$. В начальный момент времени имеем $(\forall x : x \in G)$ $b_i^i \leqslant x_i \leqslant a_i^i$, что и завершает доказательство теоремы.

Теоремы 2, 3 применимы и для систем (1.1) без предположения (2.1), поэтому справедливы и для случая, когда все интегральные кривые под воздействием любого допустимого управления покидают множество G. В этом случае управления u^i, v^i следует определять на всей области возможных движений.

В работе [8, с. 145] рассматриваются системы сравнения, подобные системам (3.8), (3.9). В этой работе максимумы и минимумы в (3.10), (3.11) берутся не на множествах B_i, C_i, а на оценках множества достижимости. Во многих задачах такие системы сравнения приводят к быстро возрастающей по времени оценке множества достижимости вне зависимости от истинного изменения множества достижимости по времени. Оценка (3.7) заведомо не хуже обсуждаемой оценки.

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 справедливо следующее включение:*

$$(\forall t : t \in \mathcal{T}) \{x \mid z_i(t, b^i) \leqslant x_i \leqslant y_i(t, a^i)\} \subset C_t(G)$$

для интегральных кривых $z(t, b^i)$, $y(t, a^i)$ системы

$$\dot{z} = p^1(z, y), \quad \dot{y} = p^2(z, y), \quad z, y \in R^n,$$

для вектор-функций p^1, p^2 с компонентами. удовлетворяющими условию Липшица, и неравенствами

$$\min_{x\in B_i(z,y)} f_i(x, u^i) \geqslant p_i^1(z,y),$$

$$\max_{x\in C_i(z,y)} f_i(x, v^i) \leqslant p_i^2(z,y),$$

где множества B_i, C_i определены соотношениями (3.12), (3.13).

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 6°. Если управления, определяемые формулами (2.2), (2.3), не существуют среди допустимых, то можно рассматривать системы (3.8), (3.9) при функциях $R_i(z, y)$, $W_i(z, y)$, удовлетворяющих условиям Липшица локально по своим аргументам $z\times y$ и неравенствам

$$\sup_{x\in B_i}\sup_{u\in U} f_i(x, u) \leqslant R_i(z, y); \quad \inf_{x\in C_i}\inf_{u\in U} f_i(x, u) \geqslant W_i(z, y).$$

При построении систем сравнения (3.2), (3.3), (3.7)—(3.11) можно использовать численные методы и алгоритмы. Так, например, возможно применение численных методов оптимизации для построения функций l_i, p_i на каждом шаге интегрирования без построения аналитического вида функций l_i, p_i.

На основании теоремы 2 можно оценить множество $C_t(G)$ следующим образом. Вначале выберем в качестве множества Q_t^i для некоторого i какое-либо множество S, заведомо содержащее множество $C_t(G)$. После применения теоремы 2 получим оценку множества $C_t(G)$ как некоторого множества S_t^1. До некоторого момента времени $\tau_1:\tau_1 > t_0$ справедливо включение $S_t^1 \subset \operatorname{int} S$. Выберем далее в качестве Q_t^i $(\forall t)$ множество $S\cap S_t^1$. Снова применяя теорему 2, получим оценку множества $C_t(G)$ как множество S_t^2. В соответствии с принципом расширения [8] получим включение $S_t^2 \subset Q_t^i$ хотя бы при временах $t:t\leqslant\tau_2$. Подобную процедуру можно повторять до тех пор, пока оценки множества $C_t(G)$ будут улучшаться. Далее можно поменять координату i и повторить процедуру.

Теорема 1 накладывает более жесткие ограничения как для существования неулучшаемых оценок, так и для возможности их применения (непрерывная дифференцируемость правых частей и управлений). Вместе с тем построение оценок (2.4)—(2.11) требует меньшего объема вычислений по сравнению с построением оценок (3.7)—(3.11).

В случае существования кривых A^i, B^i или соответствующих отрезков кривых, оговариваемых условиями теоремы 1 только по некоторым координатам, можно, применяя сочетание теорем 1, 3, уменьшить размерность систем сравнения (3.8), (3.9).

4. Применение метода сравнения для построения оценок множества достижимости. Построение систем сравнения в п. 3 может быть перенесено на случай достаточно общей выбранной структуры множеств, среди которых можно проводить оценивание множества достижимости динамической системы. А именно вместо n-мерных параллелепипедов можно рассмотреть n-мерные многогранники и более общие фигуры в R^n.

Введем обозначение области значений функций V_i как D_{V_i}.

В каждый момент времени $t:t\in\mathscr{T}$ будем оценивать множество $C_t(G)$ среди множеств вида $\bigcap_{i\in I_s}\{x \mid V_i(x)\leqslant c_i\}$ для некоторого s и функций V_i, $i\in I_s$, $V_i:R^n\to R^1$, $V_i\in C^1(R^n)$, удовлетворяющих условиям:

$$(\forall i: i\in I_s)\quad (\forall c_2, c_1: c_1, c_2\in D_{V_i})\ \text{множество}\ \{x \mid V_i(x)=c_1\}\ \text{диффеоморфно множеству}\ \{x \mid V_i(x)=c_2\}, \tag{4.1}$$

$$(\forall i: i\in I_s)\quad (\forall c_i: c_i\in D_{V_i}) \operatorname{mes}_{R^n}[x \mid V_i(x)=c_i\}=0. \tag{4.2}$$

Будем говорить, что функции V_i, $i\in I_s$, и подмножество значений $\Omega\subset D_{V_1}\times D_{V_2}\times\ldots\times D_{V_s}$ этих функций удовлетворяют условию (А), если

$(\forall y : y \in \Omega)$ множество $\{x \mid (\forall i : i \in I_s)\, V_i(x) \leqslant y_i\}$ является односвязным и граница этого множества не может быть описана как подмножество $\bigcup_{i \in I} \{x \mid V_i(x) = y_i\}$, если множество I не совпадает с I_s.

Отметим, что при выборе функций V_i при $x_i \geqslant 0$ в виде $V_i = x_i$, $i \in I_n$, и $V_i = -x_i$, $i \in I_{2n} \setminus I_n$, при $x_i \leqslant 0$ условия (А) выполнены на всей области значений функций V_i. Эти же условия справедливы и для многих различных функций V_i при $s = 2n$. Укажем на некоторые частные случаи таких функций.

1. Оценка при n-мерных параллелепипедах, не обязательно параллельных координатным осям. В этом случае можно выбрать функции V_i в виде $(\forall i : i \in I_n)\, V_i = \Sigma a_{ij} x_j$; $(\forall i : i \in I_{2n} \setminus I_n)$ $V_i = -\Sigma a_{ij} x_j$ и при таких коэффициентах a_{ij}, что справедливы условия: $\Sigma a_{ij}^2 = 1$ (нормировка), $\Sigma a_{ij} a_{rj} = 0$ $\forall i, r : i \neq r$ (линейная независимость функций V_i, V_r).

2. Опишем функции V_i следующим образом: $V_i = h(x_i)$, $i \in I_n$, где $h : R^1 \to R^1$ является монотонной дифференцируемой функцией и $(\forall i : i \in I_{2n} \setminus I_n)$ $V_i = -h(x_i)$.

Последний класс функций можно обобщить, рассматривая функции $V_i = h_i(x_i)$ и $V_i = \Sigma a_{ij} h(x_j)$ для коэффициентов a_{ij}, удовлетворяющих тем же условиям, что и в первом примере.

Будем далее говорить, что для функций V_i, $i \in I_s$, при множестве значений Ω, удовлетворяющих условию (А), справедливы условия (Б), если

1) $(\forall y : y \in \Omega)$ множество $\bigcap_{i \in I_s} \{x \mid V_i(x) \leqslant y_i\}$ гомеоморфно ∂G;

2) функции V_i монотонны в следующем смысле: для любого компакта $G (\forall i : i \in I_n)$ $(\forall c_1, c_2 : c_1, c_2 \in D_{V_i} \wedge c_1 > c_2)$ $(\forall r : r \in \Omega)$ $\mathrm{int}\{x \mid (\forall j : j \in I_s \setminus i)$ $V_j(x) \leqslant r_j \wedge V_i(x) \leqslant c_1 \wedge x \in G\} \supset \{x \mid (\forall j : j \in I_s \setminus i)\, V_j(x) \leqslant r_j \wedge V_i(x) \leqslant c_2 \wedge \wedge x \in G\}$.

Отметим, что далее первое свойство (Б) и условие (4.1) не используются, но свойства (Б) и (4.1), (4.2) задают определенные геометрические свойства множеств, среди которых проводятся оценки. Многие исследователи, например [6, 7, 12], задавали более жесткие условия на функции, определяющие оценки исследуемых множеств.

Далее приводятся теоремы, с помощью которых строятся системы сравнения, определяющие оценки сверху для функций $V_i(x(t, x_0, u))$ при таких значениях этих функций, при которых выполнены условия (А). Если эти условия нарушаются при построении оценок, то далее описываются различные способы проведения оценок.

Выбор функций V_i, $i \in I_s$, может быть сделан до построения оценок в каждой конкретной задаче, поэтому функции V_i, $i \in I_s$, могут быть выбраны удовлетворяющими условиям (Б) и (4.1), (4.2), что и предполагается всюду далее.

Введем следующие обозначения: $c^i = \max_{x \in \partial G} V_i(x)$, $i \in I_s$, $c = (c^1, c^2, \ldots$ $\ldots, c^s)$, и будем далее предполагать, что значения $c^1, c^2, \ldots, c^s$ для функций V_i, $i \in I_s$, таковы, что условия (А) справедливы.

Теорема 4. *Пусть функции V_i, $i \in I_s$, удовлетворяют указанным выше условиям, а производные $\dot V_i$, $i \in I_s$, для системы (1.1) и произвольном допустимом управлении $u : u \in U$ ограничены на любом компактном множестве. Предположим существование непрерывных управлений u^i, определенных соотношениями*

$$u^i = \arg \max_{u \in U} \dot V_i(x) \mid_u,$$

а также непрерывность функций $\varphi_i(y) : R^s \to R^1$, определяемых равенствами

$$\varphi_i(y) = \max_{x \in M^i(y)} \dot V_i(x) \mid_{u^i} \tag{4.3}$$

на множестве M^i следующего вида: $M^i(y) = \{x \mid (\forall j : j \neq i \wedge j \in I_s),$

$V_j(x) \leqslant y_j \wedge V_i(x)=y_i\}$, при этом если $M^i(y)=\varnothing$ для некоторого y, то считаем, что $\varphi_i(y)=0$, тогда множество достижимости $C_t(G)$ для системы (1.1) может быть оценено в виде

$$(\forall t{:}t\in\mathcal{T})\ (\forall x_0{:}x_0\in G)\ (\forall u{:}u\in U)\ (\forall i{:}i\in I_s)$$
$$V_i(x(t,x_0,u))\leqslant y_i(t,c^i), \tag{4.4}$$

где $y(t,c)$ — максимальное решение системы сравнения

$$\dot{y}=\varphi(y),\ y\in R^s, \tag{4.5}$$

если $(\forall\tau{:}t_0\leqslant\tau\leqslant t)$ при значениях функций $V_i{:}y_1(t,c^1),\ y_2(t,c^2),\ldots$ $\ldots, y_s(t,c^s)$ справедливы условия (А).

Доказательство. Если условия (А) выполняются для указанных в условии теоремы значений функций V_i и вектор-функции φ удовлетворяют условию Важевского, то доказательство теоремы следует из обобщения теоремы Важевского [13, с. 47]. В самом деле, при указанных предположениях для любого допустимого управления $u{:}u\in U$ рассмотрим систему (1.1). В соответствии с леммой сравнения [13] справедливо неравенство (4.4) при выбранном управлении u. В силу произвольности u получим утверждение теоремы. В заключение доказательства отметим, что из второго условия (Б) следует условие Важевского.

Рассмотрим вопрос о построении оценок в соответствии с теоремой 4, если начиная с некоторого момента τ условия (А) не справедливы. Это означает, что одна из поверхностей $\{x\mid V_i(x)=y_i\}$ в момент τ является опорной поверхностью к множеству $\bigcap\limits_{j\in I_s\setminus i}\{x\mid V_j(x)=y_j\}$ для соответствующих значений y_j, равных $y_i(\tau,c^j)$.

Если при $t>\tau$ пересечение множеств $\{x\mid V_i(x)=y_i\}$ и $\bigcap\limits_{j\in I_s\setminus i}\{x\mid V_j(x)=$ $=y_j\}$ является пустым множеством, то соответствующая функция $\varphi_i(y)$ равна нулю. Таким образом, после $t>\tau$ функция $\varphi_i(y)$ не возрастает и оценка множества $C_t(G)$ не ухудшается. Если множество достижимости $C_t(G)$ при дальнейшем возрастании t расширяется в направлении нормали к поверхности $\{x\mid V(x)=y_i\}$, то далее следует ожидать, что координата y_i будет также существенна для оценки множества $C_t(G)$ (отметим, что случай, когда поверхность $\{x\mid V(x)=y_i\}$ является опорной для всех t к изменяющемуся множеству $\bigcap\limits_{j\in I_s\setminus i}\{x\mid V_j(x)=y_j\}$, представляется экзотичным при исследовании конкретных систем, хотя конечно возможным). Таким образом, для многих систем нарушение условий (А) не приводит к необходимости рассмотрения систем сравнения меньшей размерности (как правило, на единицу).

Возможны другие подходы к построению оценок при нарушении условий (А) для вектор-функции V (например, использование нескольких вектор-функций V^i).

Рассмотрим построение оценок множества достижимости для динамических и разрывных систем сравнения.

Следствие 3. *Если функции V_i, $\dot{V}_i$, u^i, $i\in I_s$, для системы (1.1) удовлетворяют условиям теоремы 4 и существует непрерывная вектор-функция $R{:}R^s\times R^s\to R^1$, удовлетворяющая условиям: 1) для вектор-функции R справедливо условие Важевского; 2) для компонент R_i локально выполняется условие Липшица; 3) справедливо следующее неравенство при функциях φ_i, $i\in I_s$, определенных соотношениями (4.3), $(\forall y)\ R_i(y)\geqslant\varphi_i(y)$, тогда справедлива следующая ниже оценка множества достижимости для системы (1.1):*

$$(\forall x_0{:}x_0\in G)\ (\forall u{:}u\in U)\ (\forall i{:}i\in I_s)\ V_i(x(t,x_0,u))\leqslant y_i(t,c^i),$$

где $y(t,c)$ — кривые системы сравнения

$$\dot{y}=R(y),\ y\in R^n,$$

если $(\forall\tau{:}t_0\leqslant\tau\leqslant t)$ *при значениях функций* V_i, *равных* $y_1(t, c^1)$, $y_2(t, c^2), \dots, y_s(t, c^s)$, *справедливы условия* (A).

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы 4.

Следствие 4. *Если функции* V_i, $\dot{V}_i$, u^i *для системы (1.1) удовлетворяют условиям теоремы 4 и существуют измеримые ограниченные функции* $\varphi_i(x)$, $i\in I_s$, *на любой замкнутой области, то* $(\forall\tau{:}t_0\leqslant\tau\leqslant t)$ *при значениях функций* V_i, $i\in I_s$, *равных* $y_1(t, c^1)$, $y_2(t, c^2), \dots, y_s(t, c^s)$, *справедливы условия* (A), *где* $y(t, c)$ — *максимальные решения системы сравнения (4.5) при рассматриваемых функциях* φ_i, *и справедливо соответствующее неравенство (4.4).*

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы 4. Соответствующее обобщение теоремы Важевского при $s=1$ приведено в работе [14, с. 113]. При выполнений условий Важевского последний результат может быть перенесен на любое s.

Замечание 7°. При увеличении s может быть показано, что оценки множества $C_t(G)$ могут улучшаться, а при $s\to\infty$ и некоторых условиях (в частности, при выпуклости множества $C_t(G)$) можно показать стремление оценок к множеству $G_t(G)$. Здесь не приводится доказательство этого утверждения в силу конечности вычислений на ЭВМ.

В работе [12, с. 243] предложены численные методы построения опорных функций (уравнение в сопряженном пространстве), используя которые можно получить некоторые оценки (не обязательно гарантирующие) множества достижимости, применимые в жестких предположениях (ограниченность множества достижимости, выпуклость множества достижимости, гладкость границы множества достижимости, возможность представления границы множества достижимости однородными функциями определенного класса, проблемы выбора этого класса функций и особенности численного метода).

В отличие от указанного метода построение гарантирующих оценок в соответствии с рассматриваемыми теоремами не требует таких условий, но также сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим, что аналогично следствию 2 могут быть получены оценки множества достижимости снизу.

Литература

1. Панасюк А. И. // Автоматика и телемеханика. 1982. № 5. С. 67—78.
2. Панасюк А. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 11. С. 1894—1904.
3. Толстоногов А. А. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 258—360.
4. Хрусталев М. М. // Автоматика и телемеханика. 1988. № 5. С. 62—70.
5. Бутковский А. Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. М., 1985.
6. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М., 1988.
7. Гурман В. И., Константинов Г. Н. // Устойчивость движения. Новосибирск, 1985. С. 220—223.
8. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М., 1985.
9. Vinter A. A. // SIAM J. of Control and Optimization. 1980. Vol. 18, N 6. P. 595—610.
10. Барбашин Е. А. // Уч. зап. МГУ. 1949. № 136. С. 110—133.
11. Румянцев В. В. // Механика в СССР за 50 лет. М., 1968. Т. I. С. 7—66.
12. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Мн., 1986.
13. Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А. и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М., 1987.
14. Филиппов А. Ф. // Мат. сб. 1960. Т. 51, № 1. С. 99—128.

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию 13 декабря 1991 г.