Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. Dorichenko, XXX Турнир городов,
Kvant, 2009, Number 4, 49–50

https://www.mathnet.ru/eng/kvant2634

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 20, 2026, 05:07:12

XXX Турнир городов

Задачи весеннего тура

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1 (3)[1]. В выпуклом 2009-угольнике проведены все диагонали. Прямая пересекает 2009-угольник, но не проходит через его вершины. Докажите, что прямая пересекает четное число диагоналей.

Г.Гальперин

2 (4). См. задачу М2131 «Задачника «Кванта».

3 (4). Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани каждого кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему для этого хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании не превращаются друг в друга.)

В.Замятин

4 (4). Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться ровно на 10%?

А.Шаповалов

5 (5). В ромбе $ABCD$ угол A равен 120°. На сторонах BC и CD взяты точки M и N так, что угол NAM равен 30°. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника NAM, лежит на диагонали ромба.

Р.Женодаров

10–11 классы

1 (3). См. задачу М2131 «Задачника «Кванта».

2 (4). См. задачу М2132 «Задачника «Кванта».

3. Для каждого натурального числа n обозначим через $O(n)$ его наибольший нечетный делитель. Даны произвольные натуральные числа $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Построим бесконечную последовательность натуральных чисел по правилу: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, где $n = 3, 4, \ldots$

а) (2) Докажите, что, начиная с некоторого места, все числа в последовательности будут равны одному и тому же числу.

б) (2) Как найти это число, зная числа a и b?

Г.Гальперин

4 (4). В ряд выписаны несколько нулей и единиц. Рассмотрим пары цифр в этом ряду (не только соседних), где левая цифра равна 1, а правая 0. Пусть среди этих пар ровно M таких, что между единицей и нулем этой пары стоит четное число цифр (возможно, ни одной), и ровно N таких, что между единицей и нулем этой пары стоит нечетное число цифр. Докажите, что $M \geq N$.

В.Ясинский

5 (4). Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

С.Маркелов

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ[2]

8–9 классы

1 (3). Вася и Петя играют в следующую игру. На доске написаны два числа: $1/2009$ и $1/2008$. На каждом ходу Вася называет любое число x, а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на x. Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?

Д.Баранов

2. а) (2) Докажите, что найдется многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую – в отношении 1 : 2.

б) (3) Найдется ли выпуклый многоугольник с таким свойством?

С.Маркелов

3 (5). В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Шахматная фигура «машина» может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машина попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли так расставить знаки, чтобы машина не могла попасть в дом?

А.Чеботарёв

4 (5). Дана бесконечная последовательность различных натуральных чисел. Известно, что каждый член этой последовательности (кроме первого) – либо среднее арифметическое, либо среднее геометрическое двух соседних с ним членов. Обязательно ли все члены этой последовательности, начиная с некоторого, – только средние арифметические либо только средние геометрические своих соседей?

А.Перепечко

5 (6). См. задачу М2133 «Задачника «Кванта».

6 (7). Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° (рис.1) Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали на боковые стороны. В резуль-

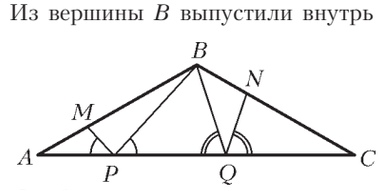

Рис. 1

[1] *Здесь и далее в скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

[2] *В Турнире городов сложный вариант весеннего тура назначается на тот же день, когда проходит Московская математическая олимпиада, поэтому в Москве весенний тур турнира (сложный вариант) не проводится. Такая система сложилась потому, что сам Турнир городов замышлялся как распространение Московской математической олимпиады по другим городам. Поскольку оба соревнования проходят в один день, жюри имеют возможность использовать некоторые задачи и для турнира, и для олимпиады.*

тате исходный треугольник разделился на 5 меньших треугольников. Рассмотрим те три из них, которые примыкают к стороне AC. Докажите, что площадь среднего треугольника равна сумме площадей крайних треугольников.

В.Произволов

7 (9). См. задачу М2136 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1 (4). Прямоугольник разбили на несколько меньших прямоугольников. Могло ли оказаться, что для каждой пары полученных прямоугольников отрезок, соединяющий их центры, пересекает еще какой-нибудь прямоугольник?

М.Мурашкин

2 (4). См. задачу 4 для 8–9 классов.

3 (6). На каждой клетке доски 10×10 стоит фишка. Разрешается выбрать диагональ, на которой стоит четное число фишек, и снять с нее любую фишку. Какое наибольшее число фишек можно убрать с доски такими операциями?

М.Мурашкин

4 (6). См. задачу М2134 «Задачника «Кванта».

5 (8). См. задачу М2136 «Задачника «Кванта».

6 (9). Дано целое число $n > 1$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый – красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше – тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков – ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл противник?

А.Шаповалов

7 (9). См. задачу М2138 «Задачника «Кванта».

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. На доске написаны числа 1, 2, …, 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

И.Богданов

2. Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$ (рис. 2). Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$? (Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

А.Толпыго

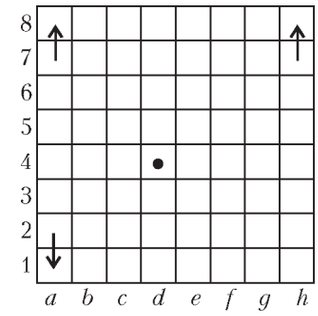

Рис. 2

3. Даны n цветов с номерами от 1 до n. Для каждого k от 1 до n пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до n в первые k цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что

$$\left|f_1(n) - f_2(n) + f_3(n) - f_4(n) + f_5(n) - f_6(n) + \ldots\right| = 1 .$$

(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2) = 1$ и $f_2(2) = 2$.)

М.Берштейн, Г.Мерзон

4. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра, кроме ребра AB.

В.Произволов

5. Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального n найдется такое натуральное k, что $P\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа c и m, что $P(x) = cx^m$.

С.Спиридонов

6. Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1\times1\times2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

А.Шаповалов

Публикацию подготовил С.Дориченко

Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады

1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырехзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова? (6)

И.Раскина

2. Разрежьте фигуру на рисунке 1 на 8 одинаковых частей. (6)

Фольклор

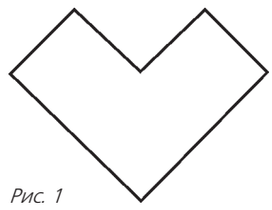
Рис. 1

3. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кле-

В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась.