РЕЦЕНЗИИ

Гамильтонов подход в теории солитонов. *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* М.: Наука, 1986. 528 с.

Солитоны – специальные локализованные в пространстве решения нелинейных эволюционных уравнений в частных производных, которые сохраняют свою форму при распространении. Существуют также решения, которые при $t \sim -\infty$ можно рассматривать как суперпозицию n-солитонных решений, так что при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ происходит столкновение солитонов, после которого сохраняется их число и индивидуальные скорости. Эволюционные уравнения такого типа возникли в различных областях физики, связанных с волновыми процессами. Уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) в гидродинамике

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x, \quad u(x, t) \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

нелинейное уравнение Шредингера в физике плазмы и нелинейной оптике

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2c|\psi|^2\psi, \quad \psi(x, t) \in \mathbf{C}, \tag{2}$$

уравнение синус-Гордон в сверхпроводимости

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi = 0, \quad \varphi(x, t) \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

уравнение магнетика Гейзенберга в теории магнетизма

$$\vec{s}_t = \vec{s} \times \vec{s}_{xx}, \quad \vec{s}^{\,2}(x, t) = 1 \tag{4}$$

и целый ряд других важных в приложениях уравнений интегрируются методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Начало методу положила работа американских математиков Гарднера, Грина, Миуры [1], в которой задача Коши для нелинейного уравнения (1) сводилась к решению линейных задач теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)y(x, \lambda) = \lambda^2 y(x, \lambda). \tag{5}$$

Объяснение связи нелинейного уравнения КдФ и линейной задачи (5) было дано в работе Лакса [2], где предъявлена линейная задача, определяющая зависимость $y\ (x, \lambda)$ от времени $y_t = Ay$, A – дифференциальный оператор третьего порядка, и уравнение КдФ возникало как условие совместности этих двух задач (L-A пара Лакса). После появления работы Захарова и Шабата [3] об интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера (НШ) (2) стало ясно, что возник мощный метод интегрирования класса нелинейных уравнений. Большое влияние на становление метода и, в частности, на его проникновение в теоретическую физику оказала обнаруженная Захаровым и Фаддеевым [4] гамильтонова интерпретация МОЗР как канонического преобразования в динамической системе с бесконечным числом степеней свободы от исходных переменных $u(x)$ к переменным „действие–угол".

Десятилетнее развитие МОЗР, вклад в которое внесли математики различных специальностей, привело к обилию фактического материала и появлению монографий, излагающих основы МОЗР [5–8].

Новая монография в быстро развивающейся области всегда играет очень важную роль. Она сообщает структуру складывающейся научной дисциплине, выделяет в ней главное, формирует и ограничивает основное ядро этой дисциплины. Авторы монографии, которые и сами внесли существенный вклад в исследование солитонных уравнений, уделяют в плане и изложении своей книги большое внимание этой задаче. Основная идея — последовательное изложение всего материала, с точки зрения гамильтонова подхода, вынесена в заглавие.

Далее, вся первая половина книги посвящена изложению модели НШ (2). На этом примере иллюстрируются все основные методы исследования нелинейных эволюционных уравнений, и к этому примеру читатель будет отсылаться за всеми деталями доказательств при рассмотрении общего метода и ряда других примеров во второй части. Вспомогательной линейной задачей для НШ является каноническая система первого порядка

$$\left(i\sigma_3 \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & c\psi \\ \bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}\right) f(x, \lambda) = \lambda f(x, \lambda). \tag{6}$$

Спектральные свойства этой системы подробно исследуются на конечном интервале $x \in (-l, l)$ в квазипериодическом случае $\psi(x+l) = e^{i\Theta}\psi(x)$. Затем вместо $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ вводятся новые динамические переменные — элементы матрицы монодромии

$$T_l(\lambda) = P\exp\left(i\int_{-l}^{l} U(x, \lambda)\,dx\right), \; U = \sigma_3\lambda + \begin{pmatrix} 0 & c\psi \\ -\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Поскольку решения нелинейного уравнения в частных производных существенно зависят от выбранных граничных условий, в книге рассматриваются два основных случая: быстроубывающий $|\psi(x)| \to 0$ при $|x| \to \infty$ и случай конечной плотности $|\psi(x)| \to \rho$ при $|x| \to \infty$, $\rho > 0$. Отличие между этими случаями проявляется в большинстве свойств НШ и формул. Солитоны имеются в первом случае при притяжении ($c < 0$ в (2)), а во втором случае при отталкивании ($c > 0$).

В основу обратной задачи рассеяния — восстановления коэффициентных функций (потенциалов) вспомогательной линейной задачи по данным рассеяния — положена матричная задача факторизации Римана. Приводится связь метода задачи Римана с формализмом интегральных уравнений Гельфанда—Левитана—Марченко.

Центральную роль в изложении свойств НШ как гамильтоновой системы с бесконечным числом степеней свободы играет классическая r матрица. Этот объект был открыт в результате развития квантового аналога МОЗР и оказал значительное влияние на развитие классического метода обратной задачи. r-Матрица позволила наряду с теоретико-групповым подходом унифицировать многие формулы гамильтонова подхода к МОЗР независимо от нелинейных интегрируемых уравнений и вспомогательных линейных задач (как правило, матричных дифференциальных систем первого порядка). Особенно ярко это проявляется во второй части монографии, содержащей изложение общей теории интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений. В качестве основных примеров для иллюстрации общих свойств интегрируемых систем выбраны: магнетик Гейзенберга (4), уравнение синус-Гордон (3), анизотропный магнетик (модель Ландау—Лифшица), для которой естественная зависимость вспомогательной линейной задачи от спектрального параметра λ выражается через эллиптические функции, многокомпонентное уравнение НШ, а также модели на одномерной решетке. Наиболее известной из последних является цепочка Тоды, описывающая нелинейные колебания,

$$\frac{d^2}{dt^2} q_n = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}, \quad q_{N+n} = q_n + c. \tag{8}$$

Каждая из упомянутых нами моделей и значительное число их обобщений детально анализируются. Это включает в себя исследование прямой и обратной задач теории рассеяния для вспомогательной линейной задачи, вычисление скобок Пуассона элементов матрицы монодромии (методом классической r-матрицы)

$$\left\{T_l(\lambda) \otimes T_l(\nu)\right\} = [r(\lambda,\nu),\, T_l(\lambda) \otimes T_l(\nu)]\,, \tag{9}$$

предельный переход от конечного отрезка ко всей прямой, построение переменных „действие–угол", вычисление солитонных решений. Книга содержит много явных формул для конкретных моделей и может служить хорошим справочником в области МОЗР. Способствует этому и наличие в конце каждой главы комментариев и литературных указаний, выделенных в отдельные параграфы, содержащие богатый фактический материал.

В последней главе излагается теоретико-групповой подход к интегрируемым системам, позволяющий, в частности, объяснить возможность гамильтоновой интерпретации интегрируемых МОЗР нелинейных эволюционных уравнений наличием естественной симплектической формы на орбитах групп Ли (в данном контексте – бесконечномерных). Находит свое естественное место в этой схеме и классическая r-матрица, определяющая в ней разбиение используемой алгебры на две подалгебры. Иллюстрируя положение общей схемы на конкретном примере НШ, воспроизводя хорошо известные читателю по первой части формулы, авторы как бы завершают обход обширной территории, занятой живым, растущим материалом МОЗР.

Книга вышла на английском языке в издательстве „Шпрингер" практически одновременно с русским изданием [9].

Мы надеемся, что вторая часть, обещанная нам, которая будет посвящена квантовому методу обратной задачи сыграет не меньшую роль во внесении структуры и порядка в новую важнейшую отрасль математической физики.

Литература

[1] **Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.** // Phys. Rev. Let. **1967.** Vol. 19, N 19. P. 1095–1097.

[2] **Lax P. D.** // Com. Pure Appl. Math. **1968.** Vol. 21. N 5. P. 457–490.

[3] **Захаров В. Е., Шабат А. Б.** // ЖЭТФ. **1971.** Т. 61, № 1. С. 118–134.

[4] **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.** Функцион. анализ и его прил. **1971.** Т. 5, № 4. С. 18–27.

[5] **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л.П.** Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, **1980.** 421 с.

[6] **Ablowitz M. J., Segur H.** Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, **1981.** 445 p.

[7] **Calogero F., Degasperis A.** Spectral Transform and Solitons. Amsterdam: North-Holland, **1982.** 378 p.

[8] **Newell A.** Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia: SIAM, **1986.** 250 p.

[9] **Faddeev L. D., Takhtajan L. A.** Hamiltonian method in the Theory of Solitons. Amsterdam: Springer, **1987.** 498 p.

В. Е. Захаров, М. К. Поливанов