О цѣлой функціи равной произведенію двухъ гипергеометрическихъ рядовъ.

А. А. Маркова.

(Извлеченіе изъ письма къ К. А. Андрееву).

Въ первой замѣткѣ „О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда", публикованной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества" за 1886 годъ, мною были опредѣлены всѣ случаи, когда произведеніе нѣкоторыхъ двухъ функцій y, удовлетворяющихъ дифференціальному уравненію гипергеометрическаго ряда

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0\,,$$

приводится къ цѣлой функціи

$$L_0+L_1x+L_2x^2+\ldots+L_nx^n$$

отъ x.

Не давая окончательнаго выраженія для этой цѣлой функціи, я ограничился тогда уравненіями первой степени, посредствомъ которыхъ можно въ каждомъ частномъ случаѣ опредѣлить отношенія ея коэффиціентовъ

$$L_0,\quad L_1,\quad L_2,\ldots,L_n$$

другъ къ другу.

Въ настоящее время замѣчательная теорема Клейна о нуляхъ гипергеометрическаго ряда (Mathematische Annalen, Band 37. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe) побудила меня снова заняться тѣмъ же вопросомъ.

И я нашелъ, что въ наиболѣе интересномъ случаѣ, когда $-\alpha-\beta=n$, цѣлое положительное число, $-\gamma+\frac{1}{2}=k$, цѣлое положительное число меньшее или равное n и $\alpha-\beta=\triangle$, число не цѣлое, дѣлая коэффиціентъ L_0 равнымъ единицѣ, мы можемъ представить искомую цѣлую функцію во первыхъ въ видѣ произведенія:

$$Lx^n F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right) F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1.\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

и во вторыхъ [1]) въ видѣ суммы:

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \gamma-\frac{1}{2},\ \gamma,\ 2\gamma-1,\ x\right)+$$

$$+A_1x^2F\left(2\alpha+2,\ 2\beta+2,\ \gamma+\frac{1}{2},\ \gamma+2,\ 2\gamma+1,\ x\right)+$$

$$+A_2x^4F\left(2\alpha+4,\ 2\beta+4,\ \gamma+\frac{3}{2},\ \gamma+4,\ 2\gamma+3,\ x\right)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+A_lx^{2l}F\left(2\alpha+2l,\ 2\beta+2l,\ \gamma+l-\frac{1}{2},\ \gamma+2l,\ 2\gamma+2l-1,\ x\right).$$

Здѣсь

$$F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right) \text{ и } F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right)$$

обыкновенные гипергеометрическіе ряды, расположенные по возрастающимъ степенямъ $\frac{1}{x}$, а выраженія вида

$$F(\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varrho,\ \sigma,\ x),$$

означаютъ гипергеометрическіе ряды высшаго порядка

$$1+\frac{\lambda\mu\nu}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\lambda(\lambda+1)\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\ldots$$

Число l равно $n-k$ и коэффиціенты

$$A_1,\quad A_2,\ldots,A_l$$

вычисляются по формуламъ

---

[1]) При $k \geqq \frac{n}{2}$.

$$A_1 = \frac{\alpha\beta\left(n+\gamma-\frac{1}{2}\right)}{1.\gamma(\gamma+1)2\gamma}\, A_0 = \frac{\alpha\beta\left(n+\gamma-\frac{1}{2}\right)}{1.\gamma(\gamma+1)2\gamma},$$

$$A_2 = \frac{3(\alpha+1)(\beta+1)\left(n+\gamma-\frac{3}{2}\right)}{2(\gamma+1)(\gamma+3)(2\gamma+2)}\, A_1,$$

$$A_3 = \frac{5(\alpha+2)(\beta+2)\left(n+\gamma-\frac{5}{2}\right)}{3(\gamma+4)(\gamma+5)(2\gamma+4)}\, A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_l = \frac{(2l-1)(\alpha+l-1)(\beta+l-1)\left(n+\gamma-l+\frac{1}{2}\right)}{l(\gamma+2l-2)(\gamma+2l-1)(2\gamma+2l-2)}\, A_{l-1},$$

наконецъ

$$L = \frac{(2\alpha+2l)(2\beta+2l)2\alpha+2l+1)(2\beta+2l+1)\ldots(2\alpha+n-1)(2\beta+n-1)(-1)^n}{(\gamma+2l)(\gamma+2l+1)\ldots(\gamma+n-1)(2\gamma+2l-1)(2\gamma+2l)\ldots(2\gamma+n-1)}\, A_l,$$

при чемъ я предполагаю $k \geqq \frac{n}{2}$.

Что же касается случаевъ, когда $k \leqq \frac{n}{2}$, то ихъ нетрудно привести къ случаямъ, когда $k \geqq n$, при помощи простой замѣны x на $1-x$ и γ на $\alpha+\beta+1-\gamma$.

Выводъ этихъ формулъ и нѣкоторыхъ другихъ интересныхъ свойствъ разсматриваемой мною цѣлой функціи я откладываю до другого раза. Теперь-же для поясненія общихъ формулъ частными примѣрами положимъ въ нихъ сначала

$$n=5, \quad k=4, \quad l=n-k=1$$

и затѣмъ

$$n=5, \quad k=3, \quad l=n-k=2.$$

Въ первомъ случаѣ мы получимъ цѣлую функцію

$$\varphi(x) = 1 - \frac{25-\Delta^2}{7}x +$$

$$+\frac{(25-\Delta^2)(47-3\Delta^2)}{245}x^2 - \frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(29-2\Delta^2)}{2205}x^3 +$$

$$+\frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(4-\Delta^2)(10-\Delta^2)}{11025}x^4 -$$

$$-\frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(4-\Delta^2)(1-\Delta^2)}{11025}x^5 =$$

$$Lx^5F = \left(\frac{-5+\Delta}{2},\ \frac{4+\Delta}{2},\ \Delta+1,\ \frac{1}{x}\right)F\left(\frac{-5-\Delta}{2},\ \frac{4-\Delta}{2},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$L = -\frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(4-\Delta^2)(1-\Delta^2)}{11025}.$$

Во второмъ-же случаѣ мы получимъ такую цѣлую функцію

$$\psi(x) = 1 - \frac{25-\Delta^2}{5}x +$$

$$+\frac{(25-\Delta^2)(30-2\Delta^2)}{75}x^2 - \frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(10-\Delta^2)}{225}x^3 +$$

$$+\frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(5-2\Delta^2)}{225}x^4 - \frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(1-\Delta^2)}{225}x^5 =$$

$$= Lx^5 F\left(\frac{-5+\Delta}{2},\ \frac{2+\Delta}{2},\ 1+\Delta,\ \frac{1}{x}\right) F\left(\frac{-5-\Delta}{2},\ \frac{2-\Delta}{2},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$L = -\frac{(25-\Delta^2)(9-\Delta^2)(1-\Delta^2)}{225}.$$

По величинѣ Δ нетрудно судить, на основаніи теоремы Клейна, о числѣ вещественныхъ корней, какъ уравненія

$$\varphi(x) = 0,$$

такъ и уравненія

$$\psi(x) = 0.$$

Интересно было бы сдѣлать тоже самое независимо отъ теоремы Клейна.

Пользуюсь случаемъ, чтобы дополнить и вторую мою замѣтку съ тѣмъ же заглавіемъ.

Дѣло въ томъ, что окончательный ея выводъ можно формулировать въ слѣдующей простой формѣ.

Дифференціальное уравненіе

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

допускаетъ интегралъ вида

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0,$$

гдѣ X, Y, Z цѣлыя функціи отъ x, тогда и только тогда, когда одно изъ выраженій

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\gamma,$$

число цѣлое или же два изъ выраженій

$$\gamma+\frac{1}{2}, \quad \alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}, \quad \beta-\alpha+\frac{1}{2}$$

одновременно числа цѣлыя.

Всѣ эти случаи, какъ оказывается, совпадаютъ съ тѣми, для которыхъ еще Пфаффъ (Disquisitiones analyticae) показалъ возможность интегрированія уравненія

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

въ конечномъ видѣ.

Пфаффъ разсматривалъ уравненіе болѣе общаго вида, которое легко сводится однако къ дифференціальному уравненію гипергеометрическаго ряда.

Въ тѣхъ-же случаяхъ и ни въ какихъ другихъ между функціями y, удовлетворяющими уравненію

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0,$$

можно найти такія двѣ y_1 и y_2, что логарифмическая производная

$$\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}$$

по x отъ ихъ произведенія y_1y_2 будетъ раціональною функціею отъ x.