5. М у ш т а р и Д.Х., Ш е р с т н е в А.Н. О способах введения топологии в случайных метрических пространствах // Изв.вузов. Матем. 1966. № 6. С.99 – 108.

6. С у л т а н б е к о в Ф.Ф. Об одном классе функций треугольника в системе аксиом случайных метрических пространств // Изв. вузов. Матем. 1981. № 3. С.60 – 66.

7. С у л т а н б е к о в Ф.Ф. Случайные метрические пространства / Казан. ун-т. – Казань, 1986. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.08. 1986, № 5964-В86.

8. С у л т а н б е к о в Ф.Ф. Линейные пространства со случайной нормой / Казан. ун-т. – Казань, 1986. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.08.1986, № 6057-В86.

О.Е.Тихонов

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ, И ФУНКЦИЯ ИНФОРМАЦИИ

Введение

Данная работа выполнена в рамках подхода, при котором состояния квантовой системы описываются как элементы некоторого выпуклого множества (см., напр., [9]).

В § 1 вводится банахово пространство V с конусом V^+, базой которого служит множество состояний K. Отметим, что аналогичные конструкции рассматривались в работах многих авторов и большинство результатов этого параграфа являются в той или иной степени известными [13] – [15].

В § 2 для каждого состояния ρ из K мы вводим пространство $\mathcal{L}_\rho$ того же типа, как и рассмотренное в § 1. Заметим, что если в качестве K взять множество нормальных состояний на алгебре Неймана, то базу в пространстве $\mathcal{L}_\rho$ образуют состояния, почти доминируемые [11] состоянием ρ, что показывает существенность отсутствия в § 1 требования замкнутости конуса V^+.

Центральное место в работе занимает § 3. В нем для произволь –

ной вещественной выпуклой функции f вводится выпуклый функционал $E f$ на $\mathcal{L}_\rho$, являющийся аналогом выражения $\int_\Omega f\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$, если в качестве K взять множество вероятностных мер на некотором измеримом пространстве Ω, а в качестве выделенного состояния ρ – вероятностную меру μ. Результаты этого параграфа применяются далее для построения некоторого аналога шкалы пространств $\mathcal{L}_p (1\leqslant p\leqslant\infty)$ в § 4 и аналога разделяющей информации по Кульбаку в § 5.

В § 6 разбираются два примера: нормальные состояния на алгебре Неймана и множество состояний, изоморфное единичному шару банахова пространства.

§ I. Пространство состояний

Пусть V – линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, V^+ – порождающий конус в V, K – база V^+, т.е. для тройки (V, V^+, K) выполнены следующие предположения (S 1): $V = V^+ - V^+$, K – выпуклое подмножество V^+, $\alpha K \cap K = \emptyset$, если $\alpha \neq 1$ и $V^+ = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}^+} \alpha K$.

Для $\varphi \in V$ положим

$$\|\varphi\| = \inf\left\{\lambda_1 + \lambda_2 \mid \varphi = \lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2\,;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+;\ \rho_1, \rho_2 \in K\right\}.$$

Непосредственно из определения следует, что $\|\cdot\|$ – полунорма на V, являющаяся функционалом Минковского множества $\operatorname{conv}(K \cup -K)$.

Л е м м а I.I. Пусть $\tilde{T}$ – аффинное отображение из K в некоторое линейное пространство $\mathcal{L}$. Тогда существует единственное продолжение $\tilde{T}$ до линейного отображения $T: V \to \mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in V$, тогда $\varphi = \lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$; $\rho_1, \rho_2 \in K$. Положим

$$T\varphi = \lambda_1 \tilde{T}\rho_1 - \lambda_2 \tilde{T}\rho_2$$

и докажем корректность этого определения. Пусть $\varphi = \mu_1 \sigma_1 - \mu \sigma_2$; $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^+$; $\sigma_1, \sigma_2 \in K$. Тогда

$$\lambda_1\rho_1 + \mu_2\sigma_2 = \lambda_2\rho_2 + \mu_1\sigma_1 .$$

Если $\lambda_1=\mu_2=0$, то $\lambda_2=\mu_1=0$ и

$$\lambda_1\tilde{T}\rho_1-\lambda_2\tilde{T}\rho_2=0=\mu_1\tilde{T}\sigma_1-\mu_2\tilde{T}\sigma_2 .$$

Если же $\lambda_1+\mu_2\neq 0$, то $\lambda_2+\mu_1\neq 0$ и

$$(\lambda_1+\mu_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}\rho_1+\frac{\mu_2}{\lambda_1+\mu_2}\sigma_2\right)=(\lambda_2+\mu_1)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_1}\rho_2+\frac{\mu_1}{\lambda_2+\mu_1}\sigma_1\right),$$

откуда $\lambda_1+\mu_2=\lambda_2+\mu_1$ и

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}\tilde{T}\rho_1+\frac{\mu_2}{\lambda_1+\mu_2}\tilde{T}\sigma_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_1}\tilde{T}\rho_2+\frac{\mu_1}{\lambda_2+\mu_1}\tilde{T}\sigma_1 .$$

Следовательно, и в этом случае

$$\lambda_1\tilde{T}\rho_1-\lambda_2\tilde{T}\rho_2=\mu_1\tilde{T}\sigma_1-\mu_2\tilde{T}\sigma_2 .$$

Линейность введенного отображения T очевидна.

Л е м м а I.2. Если в условиях леммы I.I пространство $\mathcal{L}$ нормировано, то отображение T непрерывно тогда и только тогда, когда $\tilde{T}$ ограничено, причем $\|T\|=\sup\limits_{\rho\in K}\|\tilde{T}\rho\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T непрерывно и $\rho\in K$, тогда

$$\|\tilde{T}\rho\|=\|T\rho\|\leqslant\|T\|.$$

Пусть, с другой стороны, $\tilde{T}$ ограничено, $c=\sup\limits_{\rho\in K}\|\tilde{T}\rho\|$ и $\varphi=\lambda_1\rho_1-\lambda_2\rho_2$, где $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^+$; $\rho_1,\rho_2\in K$. Тогда

$$\|T\varphi\|=\|\lambda_1\tilde{T}\rho_1-\lambda_2\tilde{T}\rho_2\|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_1\|\tilde{T}\rho_1\|+\lambda_2\|\tilde{T}\rho_2\|\leqslant c(\lambda_1+\lambda_2),$$

откуда $\|T\|\leqslant c$.

В соответствии с терминологией, принятой в квантовой теории измерений (см., напр., [9]), элементы множества K будем называть состояними, а аффинные отображения из K в множество вероятностных мер на некотором измеримом пространстве - измерениями.

Через $\tilde{\mathcal{F}}_0$ будем далее обозначать функционал на K, тождественно равный 1, а через $\mathfrak{F}_0$ – его продолжение на V. Отметим, что $\|\varphi\| = \mathfrak{F}_0(\varphi)$ для $\varphi \in V^+$.

Предложение I.I. Эквивалентны следующие условия: (i) $\|.\|$ – норма на V; (ii) существует разделяющее семейство ограниченных аффинных функционалов на K; (iii) для K существует разделяющее семейство измерений.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Следует из теоремы Хана-Банаха и леммы I.2.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Пусть $\|\varphi\| = 0$, тогда в соответствии с леммами I.I и I.2 $\mathfrak{F}(\varphi) = 0$ для любого ограниченного аффинного функционала $\tilde{\mathfrak{F}}$ на K. Пусть $\varphi = \lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$; $\rho_1, \rho_2 \in K$. Для функционала $\tilde{\mathfrak{F}}_0$ имеем $0 = \mathfrak{F}_0(\varphi) = \lambda_1 - \lambda_2$, откуда $\lambda_1 = \lambda_2$. Для функционала $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ такого, что $\tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho_1) \neq \tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho_2)$, имеем $0 = \mathfrak{F}_1(\varphi) = \lambda_1(\tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho_1) - \tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho_2))$, откуда $\lambda_1 = 0$ и, следовательно, $\varphi = 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in K$, $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ – ограниченный аффинный функционал на K такой, что $\tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho_1) \neq \tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho_2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \leqslant \tilde{\mathfrak{F}}_1 \leqslant 1$. Рассмотрим двуточечное множество $\Omega = \{x_1, x_2\}$ и измерение S, задаваемое равенством

$$S(\rho)(\{x_1\}) = \tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho) \qquad (\rho \in K).$$

Тогда $S(\rho_1) \neq S(\rho_2)$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$. Пусть S – измерение со значениями в множестве вероятностных мер на некотором измеримом пространстве Ω и $S(\rho_1) \neq S(\rho_2)$. Возьмем измеримое подмножество $\Omega' \subset \Omega$, для которого $S(\rho_1)(\Omega_1) \neq S(\rho_2)(\Omega_1)$. Тогда равенство

$$\tilde{\mathfrak{F}}_1(\rho) = S(\rho)(\Omega_1) \qquad (\rho \in K)$$

задает ограниченный аффинный функционал $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ на K, разделяющий ρ_1 и ρ_2.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что тройка (V, V^+, K) такова, что выполнено условие ($S2$): существует разделяющее семейство ограниченных аффинных функционалов на K.

Далее нам понадобятся некоторые утверждения о свойствах подпространств V.

<u>Предложение I.2</u>. Пусть V_1 - подпространство V с порождающим конусом V_1^+ таким, что его базой является некоторое подмножество K_1 множества K. Тогда

I) норма

$$\|\varphi\|_1 = \inf\{\lambda_1+\lambda_2 \mid \varphi=\lambda_1\rho_1-\lambda_2\rho_2 ;\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^+;\ \rho_1,\rho_2\in K_1\}$$

на V_1 удовлетворяет неравенству $\|\varphi\|_1 \geq \|\varphi\|$ и $\|\varphi\|_1=\|\varphi\|=\mathcal{F}_0(\varphi)$ для $\varphi\in V_1^+$;

2) K_1 плотно в K тогда и только тогда, когда V_1^+ плотно в V^+, и в этом случае V_1 плотно в V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Непосредственно следует из определения норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$.

2) Пусть K_1 плотно в K и $\varphi\in V^+$. Тогда $\varphi=\lambda\rho$ для некоторых $\lambda\in\mathbb{R}^+$, $\rho\in K$ и, если $\rho_n\to\rho$ $(\rho_n\in K_1)$, то $\lambda\rho_n\in V_1^+$ и $\lambda\rho_n\to\lambda\rho=\varphi$ $(n\to\infty)$.

Пусть V_1^+ плотно в V^+, $\rho\in K$ и пусть $\varphi_n\to\rho$ ($\varphi_n\in V_1^+$). Тогда $\|\varphi_n\|\to\|\rho\|=1$, $\varphi_n/\|\varphi_n\|\in K_1$ и $\varphi_n/\|\varphi_n\|\to\rho$ ($n\to\infty$).

Плотность V_1 в V следует из того, что конусы V_1^+ и V^+ порождающие.

В дальнейшем будем предполагать, что для тройки (V, V^+, K), кроме условий (S1) и (S2), выполнено еще и условие (S3): K идеально выпукло [I], т.е., если $\alpha_i\in\mathbb{R}^+$, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=1$, $\rho_i\in K$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\rho_i$ сходится по норме к некоторому элементу из K.

Отметим, что при сделанных предположениях конус V^+ не будет, вообще говоря, замкнутым.

Предложение I.3. Пусть последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из V монотонно возрастает и ограничена по норме, тогда она сходится к некоторому элементу φ из V (т.е. в терминологии [I] конус V^+ является вполне правильным). Кроме того, $\varphi \geqslant \varphi_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_i \geqslant 0$. (Действительно, если это не так, то перейдем к последовательности $\varphi_i' = \varphi_i - \varphi_1$.). Пусть, кроме того, $\varphi_i \neq \varphi_j$ при $i \neq j$. Тогда последовательность $\{\|\varphi_i\|\} = \{\mathcal{F}_0(\varphi_i)\}$ возрастает ограничена и

$$\|\varphi_i - \varphi_j\| = \mathcal{F}_0(\varphi_i - \varphi_j) = \|\varphi_i\| - \|\varphi_j\|$$

при $i \geqslant j$. Отсюда следует, что последовательность $\{\varphi_i\}$ фундаментальна. Положим $\varphi_{i_0} = 0$ и выберем подпоследовательность $\{\varphi_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{i_k} - \varphi_{i_{k-1}}\| < \infty$. Пусть $\psi_k = \varphi_{i_k} - \varphi_{i_{k-1}}$ и $c = \sum_{k=1}^{\infty} \|\psi_k\|$. Из сделанных ранее предположений следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\|\psi_k\|/c)(\psi_k/\|\psi_k\|)$ сходится к некоторому состоянию ρ из K. Но $\varphi_{i_n} = \sum_{k=1}^{n} \psi_k$, следовательно, $\varphi_{i_n} \to c\rho \in V^+$ при при $n \to \infty$. Остается заметить, что из фундаментальности последовательности $\{\varphi_i\}$ и сходимости ее подпоследовательности $\{\varphi_{i_n}\}$ следует сходимость и самой последовательности $\{\varphi_i\}$.

Следствие I.I. Если $\varphi = \sum \varphi_i$, $\varphi_i \in V^+$ $(i \in \mathbb{N})$, то $\varphi \geqslant 0$.

Следствие I.2. Пусть $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$, $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \psi_i$, $\varphi_i \geqslant \psi_i$ $(i \in \mathbb{N})$ Тогда $\varphi \geqslant \psi$.

Доказательство. $\varphi - \psi = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \psi_i) \geqslant 0$ согласно предыдущему предложению.

Теорема I.I. Пространство V с нормой $\|.\|$ банахово.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность. Положим $\varphi_0 = 0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|<\infty$.

Обозначим $\psi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$. Из определения нормы $\|.\|$ следует, что для любого $i\in\mathbb{N}$ существуют $\psi_i^+,\psi_i^-\in V^+$ такие, что $\psi_i=$ $=\psi_i^+-\psi_i^-$ и $\|\psi_i^+\|+\|\psi_i^-\|\leq\|\psi_i\|+2^{-i}$. Согласно предложению I.3, ряды $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^+$ и $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^-$ сходятся, следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i$ сходится, т.е. сходится последовательность $\{\varphi_i\}$.

<u>Замечание I.I</u>. Условия ($S1$) - ($S3$) выполнены, в частности, если V - полное пространство с базовой нормой в смысле [I0].

§ 2. Пространство с базой, ассоциированное с состоянием

<u>Определение 2.I</u>. Пусть ρ - состояние из K, $\varphi\in V$. Будем говорить, что $\varphi\in\mathcal{L}_\rho$, если существует представление

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\alpha_i\rho_i\ , \tag{2.I}$$

где $\rho_i\in K$, $\alpha_i\in\mathbb{R}^+$, $\sum\alpha_i=1$, $\sum\alpha_i\rho_i=\rho$, $\beta_i\in\mathbb{R}$, $\sum|\beta_i|\alpha_i<\infty$ $(i\in\mathbb{N})$.

Если в представлении (2.I) можно взять $\beta_i\in\mathbb{R}^+$, то будем говорить, что $\varphi\in\mathcal{L}_\rho^+$. Через K_ρ обозначим $\mathcal{L}_\rho^+\cap K$.

<u>Замечание 2.I</u>. Для $\varphi\in\mathcal{L}_\rho$ величина $\sum\beta_i\alpha_i$ в определении не зависит от представления φ и равна $\mathcal{F}_0(\varphi)$.

<u>Замечание 2.2</u>. Принадлежность φ множеству $\mathcal{L}_\rho$ эквивалентна существованию представления

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\psi_i\ , \tag{2.2}$$

где $\psi_i\in V^+$, $\sum\psi_i=\rho$, $\beta_i\in\mathbb{R}$, $\sum|\beta_i|\|\psi_i\|<\infty$ $(i\in\mathbb{N})$.

Принадлежность φ множеству $\mathcal{L}_\rho^+$ эквивалентна существованию представления вида (2.2) с $\beta_i\in\mathbb{R}^+$ $(i\in\mathbb{N})$.

<u>Замечание 2.3</u>. Как следует из результатов Н.В.Трунова [6], если V - пространство эрмитовых нормальных функционалов на алгеб-

ре Неймана, K – множество нормальных состояний на ней, то $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^+$ тогда и только тогда, когда ρ почти доминирует φ в смысле монографии Диксмье [II, гл.I, § 4, упр.8].

Отметим некоторые элементарные свойства введенных множеств.

Предложение 2.I. I) $\mathcal{L}_\rho^+ \subset V^+$ и $\varphi \in K_\rho$ тогда и только тогда, когда в представлении φ вида (2.I) можно выбрать $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^+$ такие, что $\sum \alpha_i \beta_i = 1$;

2) $\mathcal{L}_\rho$ – линейное пространство с порождающим конусом $\mathcal{L}_\rho^+$, K_ρ – база $\mathcal{L}_\rho^+$;

3) если $\varphi_j \in \mathcal{L}_\rho^+$ $(j \in \mathbb{N})$ и $\sum \varphi_j = \varphi \in V$, то $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^+$.

Доказательство. Докажем 3). Пусть $\varphi_j = \sum_{i=1}^\infty \beta_{ji} \psi_{ji}$ – представления вида (2.2) с $\beta_{ji} \in \mathbb{R}^+$. Тогда $\varphi = \sum_{ij} (2^j \beta_{ji})(2^{-j} \psi_{ji})$ и $\sum_{ij} 2^{-j} \psi_{ji} = \sum_j 2^{-j} \rho = \rho$, т.е. $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^+$.

Теорема 2.I. Для любого состояния ρ из K тройка $(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}_\rho^+, K_\rho)$ удовлетворяет условиям (S1) – (S3) § I и, следовательно, $\mathcal{L}_\rho$ с нормой

$$\|\varphi\|_\rho = \inf\left\{\lambda_1 + \lambda_2 \mid \varphi = \lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 \ ; \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ ; \rho_1, \rho_2 \in K_\rho\right\}$$

является банаховым пространством.

Доказательство. Выполнение (S1) утверждается в п.2 предыдущего предложения. Так как $K_\rho \subset K$, то выполнено (S2) (предложение I.2). Проверим (S3).

Пусть $\rho_i \in K_\rho$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ $(i \in \mathbb{N})$ и $\sum \alpha_i = 1$. Тогда $\sigma = \sum \alpha_i \rho_i \in K$ и из п.3 предложения 2.I $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^+$, следовательно, $\sigma \in K_\rho$ и $\| \sigma - \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i \|_\rho = \| \sum_{i=n+1}^\infty \alpha_i \rho_i \|_\rho = \sum_{i=n+1}^\infty \alpha_i \to 0$ при $n \to \infty$.

Предложение 2.2. Если $\mathcal{L}_\rho = V$, тогда

I) нормы $\|.\|$ и $\|.\|_\rho$ эквивалентны;

2) эквивалентны следующие условия:

(i) $\|.\| = \|.\|_\rho$,

(ii) K_ρ плотно в K,

(iii) $\mathcal{L}_\rho^+$ плотно в V^+.

Доказательство. 1) Как уже было отмечено, $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\rho$. Эквивалентность двух норм следует теперь из теоремы Банаха об обратном отображении.

2) $(i) \Longrightarrow (ii)$. Пусть $\sigma \in K$. Так как $\|\sigma\|_\rho = \|\sigma\| = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\rho_1, \rho_2 \in K_\rho$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ такие, что $\sigma = \lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1 + \varepsilon$. Тогда $\lambda_1 \geqslant 1$ и

$$\|\sigma - \rho_1\| \leqslant \|\sigma - \lambda_1\rho_1\| + \|(\lambda_1 - 1)\rho_1\| =$$
$$= \lambda_2\|\rho_2\| + (\lambda_1 - 1)\|\rho_1\| = \lambda_1 + \lambda_2 - 1 \leqslant \varepsilon.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Пусть $\sigma \in K$, $\varepsilon > 0$ и ρ_1 – такое состояние из K_ρ, что $\|\sigma - \rho_1\|_\rho < \varepsilon$. Тогда

$$\|\sigma\|_\rho \leqslant \|\sigma - \rho_1\|_\rho + \|\rho_1\|_\rho \leqslant 1 + \varepsilon,$$

откуда $\|\sigma\|_\rho \leqslant 1 = \|\sigma\|$. Следовательно, $\operatorname{conv}(K \cup -K)$ содержится в $Ш_{1,\|\cdot\|_\rho}$ – единичном шаре пространства $\mathcal{L}_\rho$, и для $\varphi \in V$

$$\|\varphi\| = \inf\{\lambda > 0 \mid \varphi \in \operatorname{conv}(K \cup -K)\} \geqslant$$
$$\geqslant \inf\{\lambda > 0 \mid \varphi \in Ш_{1,\|\cdot\|_\rho}\} = \|\varphi\|_\rho.$$

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. Следует из предложения 1.2.

Изучим теперь связи между введенным для состояния ρ пространством $\mathcal{L}_\rho$ и порядковым идеалом $I_\rho = \{\varphi \in V \mid -\lambda\rho \leqslant \varphi \leqslant \lambda\rho$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}^+\}$. Обозначим $I_\rho^+ = I_\rho \cap V^+$, $\mathfrak{I}_\rho = I_\rho \cap K$.

<u>Предложение 2.3.</u> 1) $I_\rho \subset \mathcal{L}_\rho$, $I_\rho^+ \subset \mathcal{L}_\rho^+$, $\mathfrak{I}_\rho \subset K_\rho$;

2) если $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^+$, то существует последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов I_ρ^+, возрастая сходящаяся к φ;

3) I_ρ плотно в $\mathcal{L}_\rho$, I_ρ^+ плотно в $\mathcal{L}_\rho^+$, $\mathfrak{I}_\rho$ плотно в K_ρ.

Доказательство. 1) Если $\varphi \in \mathfrak{I}_\rho$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \lambda\rho$, то

$$\rho = \frac{\|\lambda\rho - \varphi\|}{\lambda} \cdot \frac{\lambda\rho - \varphi}{\|\lambda\rho - \varphi\|} + \frac{\|\varphi\|}{\lambda} \cdot \frac{\varphi}{\|\varphi\|},$$

$$\varphi = 0 \cdot \frac{\|\lambda\rho - \varphi\|}{\lambda} \cdot \frac{\lambda\rho - \varphi}{\|\lambda\rho - \varphi\|} + \lambda \cdot \frac{\|\varphi\|}{\lambda} \cdot \frac{\varphi}{\|\varphi\|},$$

откуда ясно, что $\varphi \in K_\rho$. Остальные включения следуют из того,что $\mathcal{J}_\rho$ – база конуса I_ρ^+, порождающего I_ρ;

2) пусть $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \psi_i$ – представление вида (2.2) с $\beta_i \in \mathbb{R}^+$. Введем $\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i$. Тогда последовательность $\{\varphi_n\}$ возрастает, сходится к φ и

$$0 \leqslant \varphi_n \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \{\beta_i\} \sum_{i=1}^{n} \psi_i \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \{\beta_i\} \rho ;$$

3) плотность I_ρ^+ в $\mathcal{L}_\rho^+$ непосредственно следует из п.2 и, согласно предложению I.2, $\mathcal{J}_\rho$ плотно в K_ρ, I_ρ плотно в $\mathcal{L}_\rho$.

Предложение 2.4. Если ρ, σ – состояния из K, $\sigma \in I_\rho$, то

$$\mathcal{L}_\sigma \subset \mathcal{L}_\rho , \quad \mathcal{L}_\sigma^+ \subset \mathcal{L}_\rho^+ , \quad K_\sigma \subset K_\rho \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_\rho \leqslant \|\varphi\|_\sigma$$

для $\varphi \in \mathcal{L}_\sigma$.

Доказательство. Пусть $\sigma \leqslant \lambda\rho$, $\varphi \in \mathcal{L}_\sigma^+$, $\sigma = \sum \psi_i$, $\varphi = \sum \beta_i \psi_i$, где $\psi_i \in V^+$, $\beta_i \in \mathbb{R}^+$ $(i \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\rho = \frac{\sigma}{\lambda} + \left(\rho - \frac{\sigma}{\lambda}\right) = \sum \frac{\psi_i}{\lambda} + \left(\rho - \frac{\sigma}{\lambda}\right) ,$$

$$\varphi = \sum \lambda\beta_i \frac{\psi_i}{\lambda} + 0 \cdot \left(\rho - \frac{\sigma}{\lambda}\right) ,$$

откуда $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^+$. Таким образом, $\mathcal{L}_\sigma^+ \subset \mathcal{L}_\rho^+$, откуда легко следуют и остальные утверждения предложения.

Следствие 2.I. Если ρ, σ – состояния из K, $\sigma \in I_\rho$, $\rho \in I_\sigma$, то $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_\rho$, $\mathcal{L}_\sigma^+ = \mathcal{L}_\rho^+$, $K_\sigma = K_\rho$ и $\|\varphi\|_\rho = \|\varphi\|_\sigma$ для $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$.

§ 3. Функционалы, связанные с выпуклыми функциями

Определение 3.I. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выпукла, $\rho \in K$ и $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$. Обозначим

$$Ef(\varphi/\rho) = \inf \sum f(\beta_i)\, \alpha_i ,$$

где $\inf$ берется по всем представлениям

$$\varphi = \sum \beta_i \alpha_i \rho_i$$

вида (2.I).

Замечание 3.I. Выражение $\sum f(\beta_i)\alpha_i$ в предыдущем определении корректно определено со значением в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, так как ряд $\sum \beta_i \alpha_i$ сходится абсолютно, а функция f минорируется линейной функцией.

Замечание 3.2. В обозначениях определения 3.I

$$Ef(\varphi/\rho) = \inf \sum f(\beta_i)\, \|\Psi_i\|,$$

где $\inf$ берется по всем представлениям $\varphi = \sum \beta_i \Psi_i$ вида (2.2).

Из неравенства Иенсена непосредственно получается следующее утверждение.

Предложение 3.I. В обозначениях определения 3.I

$$Ef(\varphi/\rho) \geqslant f\left(\sum \beta_i \alpha_i\right) = f(\mathcal{F}_0(\varphi)).$$

Предложение 3.2. Если $\rho_j \in K$, $\varphi_j \in \mathcal{L}_{\rho_j}$ $(j=1,2)$, $0<\lambda<1$, то

$$Ef((\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2)/(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda Ef(\varphi_1/\rho_1) + (1-\lambda)\, Ef(\varphi_2/\rho_2).$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что ρ_1, $\rho_2 \in I_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}$, поэтому, согласно предложению 2.4, $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in \mathcal{L}_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}$.

Пусть $\rho_j = \sum_i \alpha_{ji}\rho_{ji}$, $\varphi_j = \sum_i \beta_{ji}\alpha_{ji}\rho_{ji}$ $(j=1,2)$ с соответствующими α_{ji}, β_{ji}, ρ_{ji} – представления вида (2.I). Тогда

$$\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 = \sum_i (\lambda\alpha_{1i})\rho_{1i} + \sum_i ((1-\lambda)\alpha_{2i})\rho_{2i},$$

$$\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 = \sum_i \beta_{1i}(\lambda\alpha_{1i})\rho_{1i} + \sum_i \beta_{2i}((1-\lambda)\alpha_{2i})\rho_{2i},$$

$$\sum_i f(\beta_{1i})(\lambda\alpha_{1i}) + \sum_i f(\beta_{2i})((1-\lambda)\alpha_{2i}) =$$

$$= \lambda \sum_i f(\beta_{1i})\alpha_{1i} + (1-\lambda)\sum_i f(\beta_{2i})\alpha_{2i}$$

и, переходя к $\inf$, получим требуемое неравенство.

Предложение 3.3. Пусть V – пространство σ-аддитивных вещественных мер на некотором измеримом пространстве Ω, K – множество вероятностных мер на нем и $\rho \in K$. Мера φ из V принадлежит $\mathcal{L}_\rho$ тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна относительно ρ, и в этом случае, если f – выпуклая функция, то

$$E f(\varphi/\rho) = \int_\Omega f\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right) d\rho .$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$, $\varphi = \sum \beta_i \alpha_i \rho_i$ – представление вида (2.1) и пусть $\alpha_i \neq 0$ $(i \in \mathbb{N})$. Тогда все вероятностные меры ρ_i, а следовательно, и мера φ абсолютно непрерывны относительно ρ. Обозначим через $\xi_i = d\rho_i/d\rho$, $\xi = d\varphi/d\rho$ производные Радона-Никодима и будем в дальнейшем писать равенства и неравенства для функций на Ω с точностью до ρ почти наверное. С этими соглашениями имеем

$$1 = \sum \alpha_i \xi_i \quad , \quad \xi = \sum \beta_i \alpha_i \xi_i$$

и, воспользовавшись неравенством Иенсена, получаем

$$f(\xi) = f\left(\sum \beta_i \alpha_i \xi_i\right) \leq \sum f(\beta_i) \alpha_i \xi_i \quad ,$$

откуда

$$\int_\Omega f(\xi)\, d\rho \leq \sum f(\beta_i)\, \alpha_i \int_\Omega \xi_i\, d\rho = \sum f(\beta_i)\, \alpha_i .$$

Таким образом,

$$\int_\Omega f\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right) d\rho \leq E f(\varphi/\rho) .$$

Пусть теперь мера φ абсолютно непрерывна относительно ρ, $\xi = d\varphi/d\rho$. Некоторые детали нашего дальнейшего доказательства зависят от вида выпуклой функции f. Мы здесь рассмотрим только следующий случай:

$$a \leq \xi < b \quad (a \in \mathbb{R}^+, \quad b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}),$$

$$[a,b)\subset \operatorname{dom} f=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<\infty\},$$

$$f(x)\to+\infty\ (x\to b-),\quad \int_\Omega f(\xi)\,d\rho<\infty$$

и построим последовательность представлений $\varphi=\sum_i \beta_i^{(k)}\alpha_i^{(k)}\rho_i^{(k)}$ вида (2.I) такую, что

$$\sum_i f(\beta_i^{(k)})\alpha_i^{(k)}\longrightarrow\int_\Omega f(\xi)\,d\rho\quad (k\to\infty).$$

Остальные случаи либо тривиальны, либо разбираются аналогично.

Рассмотрим последовательность точек $y_0<y_1<y_2<\ldots$ такую, что $y_0=a$, $f(y)$ возрастает при $y>y_1$, $f(y_1)>0$, $y_m<b$, $y_m\to b-$ при $m\to\infty$ и $f(y_m)<2f(y_{m-1})$ при $m=2,3,\ldots$. Через $\{x_i^{(k)}\}_{i=0}^\infty$ обозначим последовательность точек, получающихся при разбиении каждого из отрезков $[y_m,y_{m+1}]$ на k равных частей, причем $x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}<\ldots$ Введем функции $\xi_i^{(k)}$ на Ω:

$$\xi_i^{(k)}(\omega)=\begin{cases}(x_{i+1}^{(k)}-\xi(\omega))/(x_{i+1}^{(k)}-x_i^{(k)}), & \text{если } \xi(\omega)\in[x_i^{(k)},x_{i+1}^{(k)}],\\ (\xi(\omega)-x_i^{(k)})/(x_i^{(k)}-x_{i-1}^{(k)}), & \text{если } \xi(\omega)\in[x_{i-1}^{(k)},x_i^{(k)}],\\ 0, & \text{если } \xi(\omega)\notin[x_{i-1}^{(k)},x_{i+1}^{(k)}].\end{cases}$$

Пусть $I^{(k)}=\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\mid \int_\Omega \xi_i^{(k)}\,d\rho=\alpha_i^{(k)}>0\}$, $\int\xi_i^{(k)}\,d\rho$ – неопределенные интегралы от функций $\xi_i^{(k)}$ и $\rho_i^{(k)}=(\alpha_i^{(k)})^{-1}\int\xi_i^{(k)}\,d\rho$ $(i\in I^{(k)})$. Тогда имеем

$$\sum_{i\in I^{(k)}}\alpha_i^{(k)}\rho_i^{(k)}=\sum_{i\in I^{(k)}}\int\xi_i^{(k)}\,d\rho=\int\Big(\sum_{i=0}^\infty\xi_i^{(k)}\Big)d\rho=\int 1\,d\rho=\rho,$$

$$\sum_{i\in I^{(k)}}x_i^{(k)}\alpha_i^{(k)}=\int_\Omega\Big(\sum_{i=0}^\infty x_i^{(k)}\xi_i^{(k)}\Big)d\rho=\int_\Omega\xi\,d\rho<\infty,$$

$$\sum_{i\in I^{(k)}} x_i^{(k)} \alpha_i^{(k)} \rho_i^{(k)} = {\sum}'^{\infty}_{i=0} x_i^{(k)} \int \xi_i^{(k)} d\rho = \int \xi \, d\rho = \varphi .$$

Обозначим

$$\eta_k(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i^{(k)})\, \xi_i^{(k)}(\omega) .$$

Для $\omega \in \Omega$ через $x_\ell^{(k)}(\omega)$ и $x_r^{(k)}(\omega)$ обозначим ближайшие к $\xi(\omega)$ точки из $\{x_i^{(k)}\}$, удовлетворяющие условию

$$x_\ell^{(k)}(\omega) \leq \xi(\omega) \leq x_r^{(k)}(\omega).$$

Пусть $\omega \in \Omega$. Оценим $|\eta_k(\omega)|$. Если $\xi(\omega) \in [y_0, y_1]$ и $\xi(\omega) \neq x_i^{(k)}$ ни для какого i, то

$$|\eta_k(\omega)| = |f(x_\ell^{(k)}(\omega))\,(x_r^{(k)}(\omega) - \xi(\omega))/(x_r^{(k)}(\omega) - x_\ell^{(k)}(\omega)) +$$

$$+ f(x_r^{(k)}(\omega))\,(\xi(\omega) - x_\ell^{(k)}(\omega))/(x_r^{(k)}(\omega) - x_\ell^{(k)}(\omega))| \leq \sup_{a \leq x \leq y_1} |f(x)|,$$

если же $\xi(\omega) = x_i^{(k)}$ для некоторого i, $y_0 \leq x_i^{(k)} \leq y_1$, то $\eta_k(\omega) = f(x_i^{(k)})$. Если $\xi(\omega) \in (y_1, b)$, то

$$|\eta_k(\omega)| \leq f(x_r^{(k)}(\omega)) \leq 2 f(\xi(\omega)).$$

Итак,

$$|\eta_k(\omega)| \leq \zeta(\omega) = \begin{cases} \sup\limits_{a \leq x \leq y_1} |f(x)| & , \text{ если } \xi(\omega) \in [a, y_1], \\ 2 f(\xi(\omega)) & , \text{ если } \xi(\omega) \in (y_1, b), \end{cases}$$

и функция $\zeta(\omega)$ интегрируема по мере ρ.

Так как $f(x)$ непрерывна на (a, b), то $\eta_k(\omega) \to f(\xi(\omega))$ при $k \to \infty$, если $\xi(\omega) \in (a, b)$. Если же $\xi(\omega) = a$, то $\eta_k(\omega) = f(a) = f(\xi(\omega))$. Воспользовавшись теоремой Лебега о мажорированной сходимости, имеем

$$\sum_{i\in I^{(k)}} f(x_i^{(k)})\,\alpha_i^{(k)} = \sum_{i\in I^{(k)}} f(x_i^{(k)}) \int_{\Omega} \xi_i^{(k)}(\omega)\, d\rho =$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i^{(k)})\,\xi_i^{(k)}(\omega)\right) d\rho = \int_\Omega \eta_k(\omega)\, d\rho \to$$

$$\to \int_\Omega f(\xi(\omega))\, d\rho \qquad (k \to \infty).$$

Теорема 3.I. Пусть тройки (V, V^+, K) и (V_1, V_1^+, K_1) удовлетворяют условиям (S1) – (S3) § I, T – положительное линейное непрерывное отображение из V в V_1, $\rho \in K$ и $T\rho \in K_1$. Тогда $T\mathcal{L}_\rho \subset \mathcal{L}_{T\rho}$, $T\mathcal{L}_\rho^+ \subset \mathcal{L}_{T\rho}^+$. Если, кроме того, $\|T\| \le 1$ и функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выпукла, то

$$Ef(T\varphi / T\rho) \le Ef(\varphi/\rho).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^+$ и $\varphi = \sum \beta_i \psi_i$ – представление вида (2.2) с $\beta_i \in \mathbb{R}^+ (i \in \mathbb{N})$. Тогда из положительности и непрерывности T получаем

$$T\psi_i \in V_1^+, \quad T\rho = \sum T\psi_i,$$

$$\sum |\beta_i|\, \|T\psi_i\| < \infty, \quad T\varphi = \sum \beta_i T\psi_i,$$

откуда $T\varphi \in \mathcal{L}_{T\rho}^+$, т.е. $T\mathcal{L}_\rho^+ \subset \mathcal{L}_{T\rho}^+$ и, следовательно, $T\mathcal{L}_\rho \subset \mathcal{L}_{T\rho}$.

Пусть теперь $\|T\| \le 1$, $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$ и $\varphi = \sum \beta_i \alpha_i \rho_i$ – представление вида (2.I), причем, не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_i > 0$ $(i \in \mathbb{N})$. Так как $\rho = \sum \alpha_i \rho_i$, то $T\rho = \sum \alpha_i T\rho_i$ и $1 = \|T\rho\| = \sum \alpha_i \|T\rho_i\|$, откуда $\|T\rho_i\| = 1$, т.е. $T\rho_i \in K_1 (i \in \mathbb{N})$. Следовательно, $T\varphi = \sum \beta_i \alpha_i T\rho_i$ есть представление вида (2.I), значит,

$$Ef(T\varphi / T\rho) \le \sum f(\beta_i)\alpha_i$$

и, взяв $\inf$ по всем представлениям φ в виде (2.I), получим неравенство

$$Ef(T\varphi / T\rho) \le Ef(\varphi/\rho).$$

Следствие 3.I. Пусть S – измерение, действующее из K в множество вероятностных мер на измеримом пространстве

Ω ; ρ , $\sigma \in K$; $\sigma \in K_\rho$ и f – выпуклая функция. Тогда

$$E f(\sigma/\rho) \geq \int_\Omega f\left(\frac{dS\sigma}{dS\rho}\right) dS\rho .$$

§ 4. Пространства типа $\mathcal{L}_\rho$

Определение 4.I. Пусть ρ – состояние из K, $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$, $1 \leq p < \infty$ и $f_p(x) = |x|^p$ $(x \in \mathbb{R})$. Будем говорить, что $\varphi \in \mathcal{L}_p(\rho)$, если $E f_p(\varphi/\rho) < \infty$, и в этом случае обозначим

$$\|\varphi\|_{p,\rho} = [E f_p(\varphi/\rho)]^{1/p} .$$

Замечание 4.I. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}_1(\rho) = \mathcal{L}_\rho$ и $\|\cdot\|_{1,\rho} = \|\cdot\|_\rho$ на $\mathcal{L}_\rho$.

Теорема 4.I. Для $1 \leq p < \infty$ функция $\|.\|_{p,\rho}$ на $\mathcal{L}_p(\rho)$ является нормой, относительно которой пространство $\mathcal{L}_p(\rho)$ банахово.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathcal{L}_p(\rho)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то из определения легко получить, что $\lambda\varphi \in \mathcal{L}_p(\rho)$ и $\|\lambda\varphi\|_{p,\rho} = |\lambda| \|\varphi\|_{p,\rho}$. Неотрицательность функции $\|.\|_{p,\rho}$ на $\mathcal{L}_p(\rho)$ очевидна. Докажем выпуклость единичного шара. Тем самым будет установлена линейность пространства $\mathcal{L}_p(\rho)$ и то, что $\|.\|_{p,\rho}$ – полунорма.

Пусть $\varphi_j \in \mathcal{L}_p(\rho)$, $\|\varphi_j\|_{p,\rho} \leq 1$ $(j=1,2)$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда, согласно предложению 3.2 с $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, имеем

$$E f_p((\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2)/\rho) \leq \lambda \|\varphi_1\|^p_{p,\rho} + (1-\lambda)\|\varphi_2\|^p_{p,\rho} \leq 1 ,$$

откуда $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in \mathcal{L}_p(\rho)$ и $\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\|_{p,\rho} \leq 1$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{L}_p(\rho)$, $\varphi \neq 0$ и $\varphi = \sum \beta_i \alpha_i \rho_i$ – представление вида (2.I). Тогда

$$\left[\sum |\beta_i|^p \alpha_i\right]^{1/p} \geq \sum |\beta_i| \alpha_i \geq \|\varphi\|_{1,\rho} = \|\varphi\| > 0 ,$$

так как $\|.\|_\rho$ – норма (теорема 2.I) и $\sum \alpha_i = 1$. Из этого неравенства следует, что $\|.\|_{p,\rho}$ – норма на пространстве $\mathcal{L}_p(\rho)$. Докажем его банаховость.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная по норме $\|.\|_{p,\rho}$ последовательность элементов $\mathcal{L}_p(\rho), \varepsilon>0$. Положим $\varphi_0=0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|_{p,\rho}\leqslant 2^{-np-1} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Положим $\psi_n=\varphi_{n+1}-\varphi_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Существуют $\rho_{ni}\in K$, $\alpha_{ni}\in\mathbb{R}^+$, $\beta_{ni}\in\mathbb{R}$ $(n=0,1,2,\ldots;\ i=1,2,\ldots)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ni}=1, \quad \rho=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ni}\rho_{ni},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_{ni}|\alpha_{ni}<\infty, \quad \psi_n=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_{ni}\alpha_{ni}\rho_{ni}$$

для $n=0,1,2,\ldots$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_{ni}|^p\alpha_{ni}\leqslant 2\cdot 2^{-np-1}=2^{-np} \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_{0i}|^p\alpha_{0i}\leqslant\|\psi_0\|_{p,\rho}^p+\varepsilon.$$

Тогда имеем

$$\rho=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ni}\rho_{ni}\Big)=\sum_{n,i}2^{-n-1}\alpha_{ni}\rho_{ni},\ \sum_{n,i}2^{-n-1}\alpha_{ni}=1,$$

$$\sum_{n,i}|2^{n+1}\beta_{ni}|\cdot 2^{-n-1}\alpha_{ni}\leqslant\Big[\sum_{n,i}|2^{n+1}\beta_{ni}|^p\cdot 2^{-n-1}\alpha_{ni}\Big]^{1/p}=$$

$$=\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}2^{(p-1)(n+1)}|\beta_{ni}|^p\alpha_{ni}\Big]^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\Big[2^{p-1}(\|\psi_0\|_{p,\rho}^p+\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{p-n-1}\Big]^{1/p}=\Big[2^{p-1}(\|\psi_0\|_{p,\rho}^p+\varepsilon+1)\Big]^{1/p}.$$

Пусть

$$\varphi=\sum_{n,i}2^{n+1}\beta_{ni}\cdot 2^{-n-1}\alpha_{ni}\rho_{ni}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\beta_{ni}\alpha_{ni}\rho_{ni}.$$

Тогда

$$Ef_p(\varphi/\rho)\leqslant\sum_{n,i}|2^{n+1}\beta_{ni}|^p\cdot 2^{-n-1}\alpha_{ni}=2^{p-1}(\|\psi_0\|_{p,\rho}^p+\varepsilon+1).$$

Таким образом, $\varphi \in \mathcal{L}_p(\rho)$ и

$$\|\varphi-\varphi_k\|_{p,\rho}^p = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n+1} \beta_{ni} \cdot 2^{-n-1} \alpha_{ni} \rho_{ni} \right\|_{p,\rho}^p \leq$$

$$\leq 2^{p-1-k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

Замечание 4.2. Аналогично построенным для $1 \leq p < \infty$ пространствам $\mathcal{L}_p(\rho)$ можно ввести пространство $\mathcal{L}_\infty(\rho)$ следующим образом: будем говорить, что элемент φ из $\mathcal{L}_\rho$ принадлежит $\mathcal{L}_\infty(\rho)$, если существует представление $\varphi = \sum \beta_i \alpha_i \rho_i$ вида (2.I) такое, что $\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\beta_i| < \infty$, и в этом случае положим

$$\|\varphi\|_{\infty,\rho} = \inf \sup_{i \in \mathbb{N}} |\beta_i|,$$

где $\inf$ берется по всем представлениям φ вида (2.I). Нетрудно проверить, однако, что так определенное пространство $\mathcal{L}_\infty(\rho)$ совпадает с порядковым идеалом I_ρ (см. § 2) и

$$\|\varphi\|_{\infty,\rho} = \inf\{\lambda > 0 \mid -\lambda\rho \leq \varphi \leq \lambda\rho\}.$$

Аналогично теореме 4.I доказывается полнота этого пространства.

Используя обычные соотношения между $\mathcal{L}_p$ -пространствами относительно вероятностной меры, нетрудно получить следующее утверждение.

Предложение 4.I. Если $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то $\mathcal{L}_q(\rho) \subset \mathcal{L}_p(\rho)$ и $\|\varphi\|_{p,\rho} \leq \|\varphi\|_{q,\rho}$ для $\varphi \in \mathcal{L}_q(\rho)$.

Аналогично предложению 2.4 нетрудно доказать следующее его обобщение.

Предложение 4.2. Если ρ, σ – состояния из K, $\sigma \in I_\rho$, $\sigma \leq \lambda\rho$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\mathcal{L}_p(\sigma) \subset \mathcal{L}_p(\rho)$ и $\|\varphi\|_{p,\rho} \leq \lambda^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{p,\sigma}$ (полагаем $\frac{1}{\infty} = 0$).

Следствие 4.I. Если ρ, σ – состояния из K, $\sigma \in I_\rho$, $\rho \in I_\sigma$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\mathcal{L}_p(\rho) = \mathcal{L}_p(\sigma)$ и нормы $\|.\|_{p,\rho}$ и $\|.\|_{p,\sigma}$ на $\mathcal{L}_p(\rho)$ эквивалентны.

Предложение 4.3. Пусть тройки (V, V^+, K) и (V_1, V_1^+, K_1) удовлетворяют условиям (S1) – (S3) § I, T – положительное линейное отображение из V в V_1, $\|T\| \leq 1$, $\rho \in K$, $T\rho \in K_1$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда T действует из $\mathcal{L}_p(\rho)$ в $\mathcal{L}_p(T\rho)$ с нормой, не превышающей I.

Доказательство. Для $1 \leqslant p < \infty$ это утверждение непосредственно следует из теоремы 3.I. Если $\varphi \in I_\rho, -\lambda\rho \leqslant \varphi \leqslant \lambda\rho$, то $-\lambda T\rho \leqslant T\varphi \leqslant \lambda T\rho$, откуда следует справедливость утверждения и для $p = \infty$.

§ 5. Функция информации

Рассмотрим выпуклую функцию

$$i(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ +\infty, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Определение 5.I. Пусть ρ, σ – состояния из K. Назовем информацией между σ и ρ следующее выражение:

$$I(\sigma,\rho) = \begin{cases} E\, i(\sigma/\rho), & \text{если } \sigma \in \mathcal{L}_\rho, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 5.I. Функция информации обладает следующими свойствами:

(I 1) $I(\sigma,\rho) \geqslant 0$;

(I 2) $I(\sigma,\rho) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \rho$;

(I 3) если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то

$$I(\lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2, \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda I(\sigma_1, \rho_1) + (1-\lambda) I(\sigma_2, \rho_2);$$

(I 4) если $I(\sigma,\rho) < \infty$, то $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^+$;

(I 5) если $\sigma \in \mathfrak{I}_\rho$, $\sigma \leqslant \lambda\rho$, то $I(\sigma,\rho) \leqslant \ln\lambda$;

(I 6) пусть $\tilde{T}$ – аффинное отображение из K в K_1, где тройки (V, V^+, K) и (V_1, V_1^+, K_1) удовлетворяют условиям (S I) – (S 3) § I. Тогда

$$I(\tilde{T}\sigma, \tilde{T}\rho) \leqslant I(\sigma,\rho);$$

(I 7) пусть K – множество вероятностных мер на измеримом пространстве Ω, тогда

$$I(\sigma,\rho) = \int_\Omega i\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right) d\rho,$$

если σ абсолютно непрерывна относительно ρ;

(I 8) если S – измерение со значениями в множестве вероятностных мер на измеримом пространстве Ω, то

$$I(\sigma,\rho) \geq \int_{\Omega} i\left(\frac{dS\sigma}{dS\rho}\right) dS\rho ,$$

считая интеграл равным $+\infty$, если вероятностная мера $S\sigma$ не является абсолютно непрерывной относительно $S\rho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство (I 1) следует из предложения 3.I, свойство (I 3) – из предложения 3.2, свойство (I 6) – из теоремы 3.I с учетом леммы I.2, свойство (I 7) – из предложения 3.3., свойство (I 8) – из следствия 3.I.

Докажем (I 2). Очевидно, что $I(\rho,\rho)=0$. Если $\rho,\sigma\in K$ и $\sigma\neq\rho$, то, согласно предложению I.I, существует измерение S со значениями в пространстве вероятностных мер на некотором измеримом пространстве Ω такое, что $S\sigma \neq S\rho$. Тогда, учитывая (I 8),

$$I(\sigma,\rho) \geq \int_{\Omega} i\left(\frac{dS\sigma}{dS\rho}\right) dS\rho > 0 .$$

Свойство (I 4) очевидно из определения.

Если $\sigma \leq \lambda\rho$, то

$$\sigma = \lambda\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) + 0\cdot\left(\rho - \frac{\sigma}{\lambda}\right) ,$$

откуда

$$I(\sigma,\rho) \leq \lambda \ln\lambda \cdot \left\|\frac{\sigma}{\lambda}\right\| = \ln\lambda ,$$

т.е. выполнено (I 5).

§ 6. Примеры пространств состояний

Пример I. Нормальные состояния на алгебре Неймана. Пусть $V=\mathcal{M}_*^э$ – пространство эрмитовых ультраслабо непрерывных функционалов на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, $V^+ = \mathcal{M}_*^+$ – конус положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$, $K(\subset V^+)$ – множество нормальных состояний на $\mathcal{M}$. Через $\mathcal{M}^э$ обозначим множество эрмитовых операторов из $\mathcal{M}$ и пусть ρ –точное состояние из K . Ясно, что тройка (V , V^+, K) удовлетворяет условиям (S1) – (S3) § I, и, учитывая результаты работ [2],[3],[4],[6],[7],[I2] (см. также [8]), нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}_\rho = V$, нормы $\|.\|$ и $\|.\|_\rho$ на V совпадают, а пространство $\mathcal{L}_2(\rho)$ каноническим образом изоморфно вещественному гильбертову пространству, получаемому пополнением $\mathcal{M}^э$ по скалярному произведению $<A,B> = \frac{1}{2}\rho(AB+BA)$. Если, вдобавок, $\rho=\hat{\tau}$ – след, то $\mathcal{L}^+_{\tau} = V^+$, и для $\varphi\in V$ и выпуклой функции f

$$Ef(\varphi/\tau) = \hat{\tau}(f(A_\varphi)) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,d\hat{\tau}(E_\lambda),$$

где $A_\varphi = d\varphi/d\hat{\tau}$ – производная Радона-Никодима в смысле Сигала [16] интегрируемый относительно $\hat{\tau}$ самосопряженный оператор со спектральным разложением

$$A_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_\lambda .$$

В частности, построенные в § 4 пространства $\mathcal{L}_p(\hat{\tau})\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ каноническим образом изоморфны соответствующим пространствам интегрируемых со степенью p самосопряженных операторов (см., напр., [17]).

Пример 2. Множество состояний, изоморфное единичному шару банахова пространства.

Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство с сопряженным $\mathcal{X}^*$ и вторым сопряженным $\mathcal{X}^{**}$. Положим

$$V = \mathbb{R}\oplus\mathcal{X} = \{(\lambda,u)\mid \lambda\in\mathbb{R},\, u\in\mathcal{X}\},$$
$$V^+ = \{(\lambda,u)\in V \mid \lambda \geqslant \|u\|\},$$
$$K = \{(\lambda,u)\in V^+ \mid \lambda = 1\}.$$

Тройка (V , V^+, K) удовлетворяет условиям (S1) – (S3) § I, причем норма на V , связанная с K , задается равенством

$$\|(\lambda,u)\| = \max\{|\lambda|, \|u\|\}.$$

Пусть далее $\rho=(1,0)$ – состояние из K . Тогда, как нетрудно видеть, в обозначениях § 2 $I^+_\rho = \mathcal{L}^+_\rho = V^+$, поэтому $I_\rho = \mathcal{L}_\rho = V$, $\mathcal{J}_\rho = K_\rho = K$ и для $\varphi\in V$

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_\rho = \inf\{\lambda_1+\lambda_2 \mid \varphi = \lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2;\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^+;\ \rho_1,\rho_2\in\mathcal{J}_\rho\}.$$

Предложение 7.I. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ – выпуклая функция, $\varphi=(\lambda,u)\in V$. Тогда

$$Ef(\varphi/\rho) = \frac{1}{2}f(\lambda+\|u\|) + \frac{1}{2}f(\lambda-\|u\|). \quad (*)$$

Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству подобных утверждений в предыдущих работах автора [4], [5]. Принципиальными моментами в нем являются проверка равенства (*) для функции $f_1(x)=|x|$, что получается из соотношений

$$E f_1(\varphi/\rho)=\|\varphi\|=\max\{|\lambda|,\|u\|\}=\frac{1}{2}|\lambda+\|u\||+\frac{1}{2}|\lambda-\|u\||,$$

а также то, что отображение

$$f\longrightarrow\begin{cases} f(\lambda+\|u\|)\cdot\frac{1}{2}(1,\frac{u}{\|u\|})+f(\lambda-\|u\|)\cdot\frac{1}{2}(1,-\frac{u}{\|u\|}) \text{ при } u\neq 0,\\ (f(\lambda),0) \text{ при } u=0,\end{cases}$$

действующее из множества вещественных функций f на $\mathbb{R}$ в пространство V , удовлетворяет многим из обычных свойств функционального исчисления.

Из предложения 7.I следует в частности, что для $1\leqslant p<\infty$ и $\varphi=(\lambda,u)\in V=\mathcal{L}_p(\rho)$

$$\|\varphi\|_{p,\rho}=\left[\frac{1}{2}|\lambda+\|u\||^p+\frac{1}{2}|\lambda-\|u\||^p\right]^{1/p}.$$

Нетрудно проверить также, что для $\varphi=(\lambda,u)\in V=\mathcal{L}_\infty(\rho)$

$$\|\varphi\|_{\infty,\rho}=\max\{|\lambda+\|u\||,|\lambda-\|u\||\}=|\lambda|+\|u\|.$$

Для $1\leqslant p\leqslant\infty$ сопряженным к пространству $\mathcal{L}_p(\rho)$ является пространство

$$\mathbb{R}\oplus X^*=\{(\mu,v)\,|\,\mu\in\mathbb{R},\ v\in X^*\}$$

с нормой

$$\|(\mu,v)\|_q=\left[\frac{1}{2}|\mu+\|v\||^q+\frac{1}{2}|\mu-\|v\||^q\right]^{1/q},$$

где $q^{-1}+p^{-1}=1$, если $1<p<\infty$ и $q=1$, если $p=\infty$, а при $p=1$

$$\|(\mu,v)\|_\infty=|\mu|+\|v\|.$$

Вторым сопряженным к $\mathcal{L}_p(\rho)$ является пространство

$$\mathbb{R}\oplus \mathfrak{X}^{**}=\{(\lambda,u)\mid \lambda\in\mathbb{R},\ u\in\mathfrak{X}^{**}\}$$

с нормой

$$\|(\lambda,u)\|_p=\Big[\frac{1}{2}\,|\lambda+\|u\||^p+\frac{1}{2}\,|\lambda-\|u\||^p\Big]^{1/p}$$

при $1\leqslant p<\infty$ и

$$\|(\lambda,u)\|_\infty=|\lambda|+\|u\|$$

при $p=\infty$.

Отсюда следует в частности, что построенные в § 4 пространства $\mathcal{L}_p(\rho)$ ни при каком p не являются, вообще говоря, рефлексивными.

Проверив выполнение равенства параллелограмма, нетрудно убедиться, что в рассмотренном примере пространство $\mathcal{L}_2(\rho)$ является гильбертовым тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{X}$ гильбертово.

Литература

1. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.

2. Тихонов О.Е. Интегрируемые билинейные формы и интеграл по операторнозначной мере // Изв. вузов. Матем. 1982. № 3. С.76 - 80.

3. Тихонов О.Е. Пространство типа $\mathcal{L}_p$ относительно веса на алгебре Неймана // Изв. вузов. Матем. 1982. № 8. С.76 - 78.

4. Тихонов О.Е. Неравенства для следа на алгебре Неймана / Казан. ун-т. - Казань, 1982. - 32 с. - Деп. в ВИНИТИ 16.11.1982, № 5602 - 82.

5. Тихонов О.Е. Неравенства для пространств в спектральной двойственности, связанные с выпуклыми функциями и следом / Казан. ун-т. - Казань, 1987. - 11 с. - Деп. в ВИНИТИ 20.05.1987, № 3591 - В87.

6. Трунов Н.В. Интегрирование в алгебрах Неймана и регу-

лярные веса // Конструктивная теория функций и функц. анализ. Казань, 1981. № 3. С.73 - 87.

7. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I // Изв. вузов. Матем. 1978. № 7. С.79 - 88.

8. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. Введение в теорию некоммутативного интегрирования // Современные пробл. математики. Новейшие достижения. М., 1985. Т.27. С.167 - 190.

9. Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.

10. Asimow L., Ellis A.J. Convexity theory and its applications in functional analysis. London: Academic Press, 1980.

11. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dan's l'espace Hilbertien (algebres de von Neumann). Paris: Gauthier-Villars, 1969.

12. Holevo A.S. Commutation superoperator of a state and its applications in noncommutative statistics // Reports Math. Phys. 1977. V.12. No.2. P.251 - 271.

13. Holevo A.S. Statistical definition of observable and the structure of statistical models // Reports Math. Phys. 1985. V.22. No.3. P.385 - 407.

14. Ozava M. Optimal measurements for general quantum systems // Reports Math. Phys. 1980. V.18. No.1. P.11 - 28.

15. Rüttimann G., Schindler C. On σ-convex sets of probability measures // Bull. Polish Academy Sci. Math.1987. V.35. No.9 - 10. P.583 - 595.

16. Segal I. A noncommutative extension of abstract integration // Ann. Math. 1953. V.57. P.401 - 457.

17. Yeadon F. Non-commutative L^p-spaces // Math. Proc. Cambridge Phyl. Soc. 1975. V.77. No. 1. P.91 - 102.