Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. A. Syskin, The finite groups with solvable involution centralizers,
Algebra Logika, 1971, Volume 10, Number 3, 329–347

https://www.mathnet.ru/eng/al1301

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 7, 2025, 13:16:42

Алгебра и логика, 10, №3 (1971) 329-346.

УДК 519.44

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С РАЗРЕШИМЫМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ ИНВОЛЮЦИЙ

С.А.СЫСКИН

В этой статье рассматриваются только конечные группы. Целью ее является доказательство трех теорем; вторая из них характеризует группы Сузуки их силовскими 2-подгруппами в классе простых групп. Термины и обозначения стандартны, они взяты из [7]. В частности, если X - произвольная конечная группа, то $O(X)$ означает максимальную нормальную подгруппу нечетного порядка из X. Для 2-группы T определим $\Omega_1(T)$ как подгруппу, порожденную всеми инволюциями из T, где инволюцией называется элемент порядка 2. Для проективных специальных и унитарных групп используются обозначения $L_n(q)$ и $U_n(q) = PSU(n, q^2)$.

ТЕОРЕМА А. Пусть G - неразрешимая группа, T - её силовская 2-подгруппа. Допустим, что централизаторы инволюций в G разрешимы и $\Omega_1(T) \subseteq Z(T)$. Тогда $G/O(G)$ обладает нормальной подгруппой нечетного индекса, изоморфной одной из следующих простых групп: $L_2(q)$, $q = 2^n \geq 4$ или $q \equiv 3,5 \pmod 8$, $q \geq 5$; $U_3(q)$, $q = 2^n \geq 4$; $Sz(q)$, $q = 2^{2n+1} \geq 8$.

ТЕОРЕМА Б. Пусть силовская 2-подгруппа неразрешимой группы G изоморфна силовской 2-подгруппе из группы Сузуки $Sz(q)$. Тогда $G/O(G)$ обладает нормальной подгруппой нечетного индекса, изоморфной $Sz(q)$.

Аналогичная теорема справедлива и для проективных специальных унитарных групп $U_3(q)$ при чётном q (см. теорему В).

Сейчас мы приступим к доказательству теоремы А, а затем сведем к ней теоремы Б,В.

Строение групп $L_2(q)$, $U_3(q)$ и $Sz(q)$ хорошо известно. Необходимые факты о их структуре будут использоваться без оговорок. В частности, пусть G, T удовлетворяют заключению теоремы А и $m(Z(T))\geq 3$. Тогда все T -инвариантные подгруппы нечетного порядка из G лежат в $O(G)$. Это замечание является важным при доказательстве теорем.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы А. Приступим к доказательству теоремы А, предположив, что она неверна. Через G обозначим минимальный контрпример к ней, T будет означать силовскую 2-подгруппу из G, зафиксированную заранее, $Z=\Omega_1(T)=\Omega_1(Z(T))$.

В некоторых местах, где это не вызовет недоразумений, будем писать для подмножества X из G $N(X)$ и $C(X)$ вместо $N_G(X)$ и $C_G(X)$.

ЛЕММА 1. G проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $O(G)=1$ и $O^{2'}(G)=G$. Пусть $V=O_2(G)$. Допустим, что $V\neq 1$, и возьмем инволюцию v из V. Тогда v лежит в центре всех S_2 -подгрупп из G, а так как G порождается своими силовскими 2-подгруппами, то $v\in Z(G)$. Это противоречит разрешимости централизатора v, то есть $V=1$, и, тем самым, $S(G)=1$.

Пусть H минимальная нормальная подгруппа из G; допустим, что H - собственная подгруппа в G. Тогда H проста в силу разрешимости централизаторов инволюций и удовлетворяет заключению теоремы. Кроме того, $|G:H|=2$. Пусть x означает 2-элемент из T, для которого $G=\langle H,x\rangle$. Так как группа внешних автоморфизмов $Sz(q)$ имеет нечетный порядок, то H не изоморфна $Sz(q)$ ни при каком q. Теперь допустим, что $T\cap H$ абелева. Тогда H дополняема в G, то есть можно считать, что $x^2=1$. Тогда x лежит в $Z(T)$. Поэтому если $g\in G$ и x^g лежит в T, то x и x^g сопряжены в $N(T)$. Пусть $N_G(T)=TK$, где K имеет нечетный порядок. Из теоремы Машке следует, что $Z=\Omega_1(Z(T\cap H))\times Z_0$, где Z_0 - некоторая подгруппа порядка 2 из T. Можно считать, что x лежит в Z_0, так как $HZ_0=G$. Поэтому $Z_0\subseteq Z(N(T))$. Теперь результат Глауберман [5] показывает, что Z_0 лежит в $Z(G)$. Поэтому можно считать,

что H изоморфна $U_3(q)$ для некоторого $q=2^n\geq 4$.

Как и в предыдущем абзаце, достаточно проверить, что H дополняема в G. Допустим, что это не так, то есть вне H нет инволюций. Тогда $\Omega_1(T)\subseteq T\cap H$ и, как видно из структуры $U_3(q)$, все инволюции из T сопряжены в G и, следовательно, в $N(T)$, так как $\Omega_1(T)\subseteq Z(T)$. Пусть $N(T)=TK$, где $T\cap K=1$. Тогда K лежит в нормализаторе $T\cap H$, то есть в K есть подгруппа K_0 порядка $q-1$, транзитивная на $Z^{\#}$. Легко видеть, что K_0 имеет на $T/\Phi(T)$ неподвижную точку, а так как порядки K_0 и T взаимно просты, то K_0 централизует некоторый элемент t порядка 4 из T. Тогда K_0 централизует и $t^2\in Z^{\#}$, что неверно. Поэтому H дополняема в G, и лемма доказана.

ЛЕММА 2. $|Z|=8$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $|Z|\leq 4$, тогда в T нет нормальных элементарных подгрупп порядка 8. Результат Томпсона-Янко и Лайонса [1.1] показывает, что G изоморфна $U_3(4)$ или $L_2(q)$ при $q\equiv\pm 3(mod\,8)$, то есть не противоречит теореме.

Простое исследование показывает, что в G выполнено так называемое условие "сильной плоскости" для Z-сигнализаторного функтора O. Теперь теоремы A и B из [8] показывают, что Z - инвариантные подгруппы нечетного порядка из G порождают подгруппу K нечетного порядка. Допустим сначала, что K неединична, и покажем, что $H=N_G(K)$ сильно вложена в G.

Ясно, что $N(T)$ лежит в H. Пусть t - инволюция из T, $C=C_G(t)$. Так как по условию теоремы C разрешима, то $C=O(C)N_C(Z)$. Но $O(C)$ лежит в K, и $N_C(Z)\subseteq N_G(Z)\subseteq H$, следовательно, C лежит в H. Результат Х.Бендера [3] показывает, что G изоморфна одной из групп $U_3(q)$, $L_2(q)$ или $Sz(q)$ для некоторого q, то есть не противоречит теореме. Аналогично, если $K=1$, то сильно вложенной подгруппой будет $N_G(Z)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. $N(T)/O(N(T))$ обладает подгруппой порядка 7, транзитивной на инволюциях из $Z^{\#}$. В частности, все инволюции в G сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N=N(T)$ и $C=C_N(Z)$, тогда по предыдущей лемме $X=N/C$ вкладывается в группу $GL(3,2)$, то есть $|X|$ делит 21. Допустим, что $|X|\leq 3$. Тогда каждая минималь-

ная X -инвариантная подгруппа в Z имеет порядок не более 4. Во всех случаях в Z есть инволюция, которую централизует N. Теперь применение [5] противоречит простоте G. Поэтому в N есть 7-элемент x, не централизующий Z. Ясно, что $\langle x \rangle$ транзитивна на $Z^{\#}$.

Теперь покажем, что $y = x^7$ централизует T. Ясно, что y централизует Z, то есть тождествен на $\Omega_1(T)$. Теперь теорема 5.6.6 из [7] показывает, что y централизует T. Лемма доказана.

В силу результата Д.Горенстайна [6] мы можем считать, что T неабелева. Лемма 3 и результат Г.Хигмана [10] показывают, что экспонента T равна 4, то есть T/Z элементарна, и $Z = Z(T)$. Кроме того, $|T| = 8^3$ или 8^2. Отметим, что во втором случае T изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $Sz(8)$.

Тот факт, что $t^4 = 1$ для любого элемента t из T, в дальнейшем будет использоваться без оговорок. Его первым и очень важным следствием является

ЛЕММА 4. Разрешимые подгруппы из G имеют 2-длину 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R - разрешимая подгруппа из G, S -силовская 2-подгруппа из R. Можно считать, что $O(R) = 1$ и $O^{2'}(R) = R$, то есть R порождается своими S_2 -подгруппами. Тогда $U = \Omega_1(S)$ лежит в центре R, и S/U абелева. Тогда R/U имеет 2-длину 1, и для доказательства леммы достаточно заметить, что в R/U нет нормальных подгрупп нечетного порядка.

Пусть $KU/U \triangleleft R/U$, где $|K|$ нечётен. Так как $U \subseteq Z(R)$, то $KU = K \times U$, то есть $K \triangleleft R$, что противоречит предположению $O(R) = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если два элемента из T сопряжены в G, то они сопряжены в $N(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in T$ и $x^g = y$ для некоторого элемента g из G. В силу теоремы Алперина [2] можно считать, что g является 2-элементом в $N = N(D)$, где $D = T \cap T_1$ - правильное пересечение двух S_2 -подгрупп из G, причём $x, y \in D$. Так как $D \neq 1$, то минимальность G показывает разрешимость N. По предыдущей лемме фактор-группа $N/O(N)$ 2-замкнута. По определению правильного пересечения $T_0 = N_T(D)$ является S_2 -подгруппой в N. Поэтому g лежит в T_0 по модулю $O(N)$, то есть $g = xt$, где $t \in T_0$ и

$x \in O(N)$. Далее, $O(N)$ централизует D , то есть $x^t = x^g = y$, и x сопряжен с y некоторым элементом из T_0 . Но $T_0 \subseteq T$, и доказательство закончено.

ЛЕММА 6. В $N(T)$ нет подгрупп индекса 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = N(T)$ и $T_0 = T \cap [N, N]$, и предположим, что $T_0 \neq T$. По теореме 7.3.4 из [7] $T \cap [G,G]$ порождается всеми элементами $x^{-1}y$, где $x, y \in T$ и x сопряжен с y в G . Возьмем произвольные элементы t из T , g из G , тогда при $t^g \in T$ имеем по лемме 5, что $t^g = t^x$ для некоторого $x \in N(T)$. Покажем, что $t^{-1}t^x$ лежит в T_0 . Но $t^{-1}t^x$ лежит в T и $t^{-1}t^x = [t, x]$ лежит в $[N, N]$. Таким образом, $T \cap [G, G] \subseteq T_0$. Так как $T_0 \neq T$, то $[G,G] \neq G$, что противоречит простоте G . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть Z - элементарная группа порядка 8, ZW - группа Фробениуса, $|W| = 7$. Предположим, что ZW действует на p - группе P , p нечетно, причём $C_Z(P) = 1$. Тогда Z нормализует некоторый элемент из $SCN_3(P)$. При $z \in Z$ $C_P(z)$ содержит элементарную подгруппу порядка p^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $\mathfrak{A}$ как множество всех абелевых PZ -инвариантных подгрупп из P . Возьмем A -максимальный элемент из $\mathfrak{A}$. Докажем вначале, что $C_P(A) = A$, для чего допустим противное. Пусть A_1 - подгруппа P , состоящая из тех элементов $C_P(A)$, которые лежат в центре P по модулю A . В силу нашего допущения $A_1 \neq A$. Так как Z - элементарная 2-группа, то A_1 обладает подгруппой B , для которой $|B : A| = p$ и B PZ -инвариантна. Легко проверить, что B абелева, то есть B лежит в $\mathfrak{A}$. Это противоречит максимальности A , то есть $C_P(A) = A$. Теперь допустим, что $m(A) \leq 2$. Так как в $GL(2,p)$ при нечетном p нет элементарных подгрупп порядка 8, то $Z_0 = C_Z(A)$ неединичен. Так как $A \lhd PZ$ и $C_P(A) = A$, то AZ_0 инвариантна в PZ , то есть $Z_0 \lhd PZ$, и поэтому Z_0 централизует P . Однако по условию леммы $Z_0 = 1$, то есть $m(A) \geq 3$, и $A \in SCN_3(P)$.

Теперь докажем вторую часть леммы. Сначала допустим, что P

элементарна. Так как все инволюции из Z сопряжены в ZW, то можно считать, что при $z \in Z$ $|C_P(z)| \leq p^2$. Возьмем V - четвертую подгруппу из Z, $V^{\#} = \{v_1, v_2, v_3\}$, положим $P_i = C_P(v_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Тогда $P = P_1 P_2 P_3$, то есть $|P| \leq p^6$.

Мы можем считать, что ZW неприводимо действует на P. Теперь теорема Клиффорда ([7], стр. 70) показывает, что $|P| \geq p^7$. Получено противоречие, и можно считать P произвольной p-группой. Положим $D = P/\Phi(P)$. Тогда условия теоремы справедливы с заменой P на D. Предыдущий абзац показывает, что при $z \in Z^{\#}$ $C_D(z)$ содержит подгруппу типа (p,p,p). Но в силу нечетности p получаем, что и $C_P(z)$ содержит подгруппу типа (p,p,p). Доказательство леммы закончено.

Пусть теперь σ означает множество тех нечетных простых чисел p, для которых существует неединичная p-подгруппа из G, которую нормализует T. Это обозначение нужно нам лишь для уменьшения длины формулировок. Отметим, кстати, что σ непусто в силу результата М.Сузуки [13], леммы 4 и условия теоремы.

ЛЕММА 8. *Пусть $p \in \sigma$ и P, Q - максимальные T-инвариантные p-подгруппы из G. Тогда P и Q сопряжены элементам из $C(T)$. Лемма справедлива также с заменой T на Z.*

Это утверждение хорошо известно под названием теоремы транзитивности. Доказательство ее проводится стандартным образом и здесь приводится для полноты изложения, так как доказательство ее в такой формулировке нигде не встречалось автору.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для обеих частей аналогично. Проведем его только для T.

Выберем P и Q так, чтобы они не были сопряжены в $C(T)$ и $D = P \cap Q$ имело максимальный порядок. Так как $m(Z) = 3$, то существует такой элемент z в $Z^{\#}$, что $C_P(z) \neq 1$ и $C_Q(z) \neq 1$. Так как $C(z)$ разрешим, то $C_P(z)$ и $C_Q(z)$ лежат в $\mathcal{J}(C(z))$, но тогда $\langle (C_P(z))^x, C_Q(z) \rangle$ есть p-группа для подходящего $x \in C(T)$. Это показывает, что $\mathcal{J} \neq 1$. Рассмотрим $H = V(\mathcal{J})$. Ясно, что $T \subseteq H$, и $\bar{P} = N_P(D)$ и $\bar{Q} = N_Q(D)$ лежат в $\mathcal{J}(H)$. Теперь рассмотрим $O(H)T = K$. Так как K разрешима, то $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ сопряжены с помощью элемента из $C(T)$. Так как $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ отличны от

D, то это противоречит максимальности D. Лемма доказана.

Обычным следствием из леммы 8 является следующая

ЛЕММА 9. Если $p \in \sigma$ и $P \in И^*(T;p)$, то

$$N(T) = C(T)(V(T) \cap N(P)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T^x = T$, тогда T нормализует P^x. Предыдущая лемма показывает, что существует такой элемент y в $C(T)$, что $P^x = P^y$, то есть xy^{-1} нормализует P. Поэтому $x = (xy^{-1})y$, где xy^{-1} нормализует T и P, а y лежит в $C(T)$, и лемма доказана.

Теперь определим σ_1 как множество тех p из σ, для которых Z не централизует некоторую T-инвариантную p-подгруппу из G. Если $\sigma_1 = \phi$, то $N(Z)$ является сильно вложенной подгруппой в G, поэтому считаем, в силу [3], что σ_1 непусто.

ЛЕММА 10. Пусть $p \in \sigma_1$ и H означает некоторую p-локальную подгруппу из G. Тогда H p-скована, а если $p \geq 5$, то H p-устойчива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p \geq 5$; докажем p-устойчивость H. Из минимальности G следует, что собственная подгруппа H из G либо разрешима, либо удолетворяет заключению теоремы. Так как $p \geq 5$, то можно считать H неразрешимой ввиду теоремы 3.8.4 (е) из [7]. Поэтому надо лишь проверить, в силу той же теоремы, что $SL(2,p)$ не является подгруппой неразрешимого композиционного фактора группы H, это очевидно.

Теперь проверим p-скованность H. По определению, $N_G(D) = H$, где D - неединичная p-подгруппа из G. Пусть F означает S_p-подгруппу из $O_{p'p}(H)$. Надо доказать, что $C = C_H(F)$ лежит в $O_{p'p}(H)$, для чего допустим противное. Тогда C неразрешима и удовлетворяет условию теоремы. Через T_0 обозначим некоторую S_2-подгруппу из C, причём считаем, что $T_0 \subseteq T$.

Допустим сначала, что $|\Omega_1(T_0)| = 8$, то есть $Z = \Omega_1(T_0)$. Отметим, что возможны только два случая $Z = T_0$ или $T = T_0$. Если $T_0 = Z$, то $F \in И_H^*(Z;p)$. Пусть P означает максимальный элемент из $И(Z;p)$, содержащий F. Так как $C_p(F) \subseteq F$, если $T_0 = Z$, то Z централизует P, а в силу леммы 8 Z централизует все T-инвариантные p-подгруппы. Это противоречит усло-

вию $p \in \sigma_1$, поэтому $T_0 = T$. Снова получаем, что $F \in И^*(T;p)$, и Z централизует все T-инвариантные p-подгруппы из G. Таким образом, мы можем считать, что $Z_0 = \Omega_1(T_0)$ имеет порядок 4. Заметим, что либо $Z_0 = T_0$, либо T_0 изоморфна S_2-подгруппе из $U_3(4)$.

Пусть P - максимальная T_0-инвариантная p-подгруппа из H, содержащая F, R - максимальная T_0-инвариантная p-подгруппа из G, содержащая P. Из структуры групп $L_2(q)$ $(q \equiv \pm 3 (mod\, 8))$ и $U_3(4)$ следует, что в T_0 есть инволюция t, которая централизует P. Но $C_R(P) \subseteq P$, то есть t централизует также и R. Поэтому R лежит в $L = C(t)$. Пусть $R_1 = R \cap O(L)$. Пусть K означает $S_{2,p}$-подгруппу из L, содержащую RT_0, причем можно считать, что T лежит в K. Так как R - максимальный элемент из $И(T_0;p)$, то R_1 является силовской p-подгруппой в $O(K)$, то есть Z нормализует R. Кроме того, $K = R_1 N_K(Z)$ по замечанию Фраттини, тогда и $R = R_1 N_R(Z)$. Но $[R, Z_0] \subseteq R$ и $|Z_0| \geq 4$, тогда $N_R(Z)$ централизует Z, по теореме Машке. Следовательно, Z нормализует R, и $R \in И^*(Z;p)$. При этом Z обладает инволюцией t, которая централизует R. В силу леммы 8 t централизует все Z-инвариантные p-подгруппы из G. Если S - максимальная T-инвариантная p-подгруппа из G, то t централизует S. Однако из леммы 9 следует, что все инволюции из Z сопряжены в $N(S)$, то есть Z централизует S. Это противоречит условию $p \in \sigma_1$, и лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $p \in \sigma_1$ и $p \geq 5$. Тогда $p \in \pi_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение леммы неверно, тогда лемма 7 показывает, что в силовской p-подгруппе из G есть подгруппы типа (p,p,p), то есть $SCN_3(p)$ непусто. Поэтому для доказательства леммы можно предположить, что $p \in \pi_4$. Выберем P - некоторую максимальную T-инвариантную p-подгруппу из G и содержащую P силовскую p-подгруппу P^* из G. По лемме 10 условие $p \in \pi_4$ показывает, что выполнены условия теоремы 8.6.3 из [7], то есть G обладает по этой теореме подгруппой M, содержащей каждую подгруппу X из G, для которой $J_p(X) \neq 1$ и X содержит элементарную подгруппу порядка p^3 из P^*. Достаточно проверить, что M сильно вложена в G.

Пусть t - инволюция из T, $C = C(t)$, $L = O(C)$ и $K = O_{p'}(L)$. По лемме 7 L содержит подгруппу A типа (p,p,p), тогда

$$K = \langle C_K(a) \mid a \in A^{\#} \rangle.$$

Так как $C_K(a)$ лежит в M при $a \in A^{\#}$, то $K \subseteq M$. Возьмем S_p-подгруппу R из $O_{p',p}(L)$, тогда $SCN_3(R)$ непусто, то есть $N(R)$ лежит в M. Но $L = KN_L(R)$, то есть $L = O(C)$ содержится в M.

Так как 2-длина C равна 1, то $C = LN_C(T)$, и для доказательства леммы достаточно проверить, что $N_G(T)$ лежит в M.

По лемме 9 $N(T) = C(T)(N(T) \cap N(P))$. Очевидно, что $C(T) \subseteq L$, то есть $C(T) \subseteq M$. Но $N(P)$ также лежит в M, следовательно, $N(T)$ содержится в M, и лемма доказана.

Лемма 11 показывает, что $\sigma_2 = \sigma_1 - \{3\}$ лежит в π_3, так как по лемме 7 при $p \in \sigma_1$ $SCN_3(p)$ непусто. Теперь перейдем к изучению σ_2-подгрупп из G.

ЛЕММА 12. Пусть $p \in \sigma_2$ и $P \in \mathcal{U}^*(T;p)$. Тогда $N(P)$ содержит S_p-подгруппу из G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = N(P)$, тогда $T \subseteq K$. Через P^* обозначим произвольную S_p-подгруппу из K. Надо доказать, что P^* является S_p-подгруппой и в G.

Так как $C_T(P) = 1$, что следует из леммы 9 и условия $p \in \sigma_1$, то $O_{p'}(K) = L$ имеет нечетный порядок. Из максимальности P как T-инвариантной p-подгруппы следует, что P является S_p-подгруппой в $O(K)$, то есть $O_{p',p}(K) = P \times L$.

Положим $W = Z(\mathcal{J}(P^*))$, тогда $K = LN_K(W)$ по $Z\mathcal{J}$-теореме Глаубермана ([7], стр. 279), то есть $W \subseteq P$ и тем самым $W \triangleleft K$. Теперь допустим, что P^* не является силовской p-подгруппой в G, то есть S_p-подгруппа P_1 из $N_G(P^*)$ отлична от P^*. Но T и P_1 лежат в $N(W)$, и, как и выше, легко проверить, что P лежит в $O(N(W))$, то есть $P = O(N(W)) \cap P_1$. Поэтому $P \triangleleft P_1$ и $P^* = P_1$. Лемма доказана.

Согласно [9], G называется σ_2-правильной, если при $p \in \sigma_2$ p-локальные подгруппы в G p-устойчивы и p-скованы, $p \sim q$ при $p, q \in \sigma_2$ и выполнено также следующее. Если $p \in \sigma_2$, P^* означает S_p-подгруппу из G, Q - неединичная P^*-инвариантная q-подгруппа из G $(p \neq q)$, то p делит порядок $S(N(Q))$. Сейчас мы проверим, что G σ_2-правильна.

ЛЕММА 13. σ_2 непусто, и G σ_2-правильна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что $\sigma_2=\emptyset$, тогда $\sigma_1=\{3\}$. Возьмем P -максимальный элемент из $N(T;3)$. Пусть V - четверная подгруппа из Z, $V^{\#}=\{v_1,v_2,v_3\}$ и $P_i=C_P(v_i)$, $1\leq i\leq 3$. Тогда $P=P_1P_2P_3$. Легко проверить, что P_i является S_p-подгруппой в $O(C(v_i))$; это следует из сопряженности всех инволюций из V и леммы 9. Далее, пусть $L=O(C(T))$, тогда $O(C(v_i))=LP_i$, $1\leq i\leq 3$, то есть $P_iL=LP_i$. Положим $K=\langle L,P\rangle$, тогда K содержит все T -инвариантные подгруппы нечетного порядка из G. При этом $LP=LP_1P_2P_3=P_1LP_2P_3=P_1P_2LP_3=PL$, то есть $K=LP$. Поэтому K будет, как и в доказательстве леммы 2, сильно вложенной подгруппой в G. Снова применим результат Х.Бендера [3], который показывает, что G не противоречит теореме. Следовательно, $|\sigma_1|\geq 2$ и σ_2 непусто.

Теперь проверим, что G σ_2 -правильна. Лемма 10 показывает, что при $p\in\sigma_2$ p -локальные подгруппы из G p -устойчивы и p -скованы. Из леммы 7 следует, что при $p,q\in\sigma_1$ и $z\in Z^{\#}$ в $O(C(z))$ содержатся подгруппы типов (p,p,p) и (q,q,q), то есть $p\sim q$.

Пусть $p\in\sigma_2$ и P означает произвольную силовскую p -подгруппу из G, Q - неединичную P -инвариантную q -подгруппу из G, $q\neq p$. Для полного доказательства леммы достаточно проверить, что при $H=N(Q)$ p делит $|S(H)|$. Допустим, что это неверно. В частности, H неразрешима и удовлетворяет заключению теоремы, то есть в ней есть нормальная подгруппа L нечетного индекса, для которой $L/O(L)$ изоморфна одной из групп $U_3(4), U_3(8), L_2(8), Sz(8)$ или $L_2(s)$, где $s\equiv\pm 3(mod\ 8)$. Так как в P есть элементарная подгруппа порядка p^3, то $L/O(L)$ изоморфна $L_2(p^m)$ для некоторого $m\geq 3$. Пусть $A=L\cap P$, тогда $m=m(A)$-ранг A, $A\in SCN_3(P)$. Тривиально проверяется, что A - единственная подгруппа ранга m из P.

В силу леммы 12 можно считать, что P содержит некоторый максимальный элемент R из $N(T;p)$, причем $R\triangleleft P$. Из леммы 10 следует, что A лежит в P, причем A характеристична в P. Поэтому T нормализует A.

Простые рассуждения показывают, что можно считать Q максимальной P -инвариантной q -подгруппой. Поэтому $N(A)=C(A)(N(A)\cap N(Q))$, то есть можно считать, что T нормализует Q, так как $C(A)$ имеет нечетный порядок. Поэтому T лежит в $H=N(Q)$, однако $|N|_2=$

$=4$ и $|T|\geqslant 64$. Это противоречиво, и лемма доказана.

ЛЕММА 14. Пусть $p\in\sigma_2$, P – максимальный элемент из $И(T;p)$ и P^* означает S_p-подгруппу из $N(P)$. Тогда T нормализует некоторый элемент из $И^*(P^*;q)$, для каждого простого $q\neq p$. В частности, P^* не нормализует неединичных 2-подгрупп из G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – произвольная подгруппа из $SCN_3(P^*)$. Тогда леммы 10 и 12 показывают, что A лежит в P. Сейчас мы докажем некий аналог леммы 4.2 из [9], отличие состоит в том, что мы заменим P^* на P. Именно, покажем, что при $Q\in И^*(P^*;q)$, $N=N(Q)$ имеет место равенство $N_1=O_{p'}(N_1)(N_1\cap N)$, где $V=V(ccl_G(A);P)$ и $N_1=N(Z(V))$. Ясно, что P^* лежит в N_1.

Так как по лемме 10 N_1 p-скована и p-устойчива, то $A\subseteq O_{p',p}(N_1)$ и $O_{p'}(C(A))\subseteq O_{p'}(N_1)$. Пусть $wO_{p'}(N_1)$ – смежный класс N_1 по $O_{p'}(N_1)$, нам надо доказать, что w можно взять из $N=N(Q)$. Пусть $W=O_{p',p}(N_1)\cap P^*$, тогда $N_1=O_{p'}(N_1)N_{N_1}(W)$, то есть можно взять w из $N(W)$. Но N_1 p-устойчива и p-скована, то есть W содержит A. Поэтому Q^w A-инвариантна; тогда существует $x\in O_{p'}(C(A))$, для которого $Q^w=Q^x$. Так как $x\in O_{p'}(N_1)$, то w и wx^{-1} лежат в одном смежном классе по $O_{p'}(N_1)$. Тем самым равенство $N_1=O_{p'}(N_1)(N_1\cap N)$ доказано.

Заметим сразу, что $N(P)$ лежит в $N_1=N(Z(V))$, то есть N_1 содержит P^* и T. Но тогда существует такой элемент x в $O_{p'}(N_1)$, что T^x нормализует $Z(V)$. Рассмотрев $O_{p'}(N_1)T^x$ и применив теорему Холла ([1], стр. 161), мы можем считать, что T^x нормализует P, так как $P=P^*\cap O(N_1)$. Тогда T и T^x являются S_2-подгруппами в $N(P)$, то есть $T^x=T^y$ для некоторого y из $N(P)$. Поэтому PT нормализует $Q^{y^{-1}}$. Так как $N(Q)$ содержит S_p-подгруппу P_1 из G и $P=O(N(Q))\cap P_1$, то мы можем считать, что $P_1=P^*$. Таким образом, T нормализует некоторый максимальный элемент из $И(P^*;q)$, лемма доказана.

Предыдущая лемма показывает, в частности, что если P^* нормализует некоторую неединичную q-подгруппу из G, то $q\in\sigma$.

ЛЕММА 15. Если $q\in\sigma-\sigma_1$, то $[P,Z]$ централь-

зует все P^*-инвариантные q-подгруппы из G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in И^*(P^*; q)$. Допустим сначала, что Q T-инвариантна. Рассмотрим группу $H = QPZ$. Так как $C_Z(P) = 1$, то $O_2(H) = 1$ и $Q = O_{p'}(H)$. Так как $q \in \sigma - \sigma_1$, то Z централизует Q. Поэтому $H/C_H(Q)Q$ есть p-группа, и $C_H(Q)$ содержит $[P, Z]$.

Теперь пусть Q_1 - произвольный элемент из $И^*(P^*; q)$. Тогда $N = N(Q_1)$ содержит P^* и S_2-подгруппу T_1 из G. Пусть $P_1 = O(N) \cap P^*$, тогда можно считать, что T_1 нормализует P_1. Как и в предыдущем абзаце, легко проверить, что $[P_1, Z_1]$ централизует Q_1, где $Z_1 = \Omega_1(T_1)$, поэтому достаточно проверить, что $[P_1, Z_1] = [P, Z]$.

Ясно, что P_1 -максимальная T_1-инвариантная p-подгруппа из G. Пусть $K = N(Z(J(P^*)))$, тогда, как и в лемме 12, K содержит T, T_1 и P^*, причем P и P_1 лежат в $O(K)$. Более того, $P = O(K) \cap P^*$, так как $P \in И^*(T; p)$. Аналогично, $P_1 \in И^*(T_1; p)$ и $P_1 = O(K) \cap P^*$. Следовательно, $P = P_1$ и T, T_1 лежат в $N(P)$. Из доказательства леммы 14 мы знаем, что $N_1 = O_{p'}(N_1)(N_1 \cap N)$ (обозначения те же). Поэтому можно считать, что $T_1 = T^x$ для некоторого $x \in O_{p'}(N_1)$. Перейдя к сравнениям по модулю $O_{p'}(N_1)$, легко заметить, что $[P, Z] = [P, Z_1]$.

Пусть $B = \cap C_p(X)$, где X пробегает все P^*-инвариантные $(\sigma_2 - \{p\})$-подгруппы из G. Ясно, что $B \lhd P^*$ и T нормализует B.

ЛЕММА 16. Z централизует B.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что $B_1 = B \cap [P, Z]$ нецик-лична. Тогда B_1 обладает подгруппой B_0 типа (p, p), которая инвариантна в P^* и централизует все P^*-инвариантные q-подгруппы из G для каждого нечетного q, отличного от 3 и p. Теперь наша лемма 13 и теорема C из [9] показывает, что G обладает уникальной подгруппой для P^*. Как и в лемме 11, в этом случае G не противоречит теореме. Поэтому B_1 циклична. Из леммы 9 следует, что все инволюции из Z сопряжены в $N(B_1)$, то есть Z центра-лизует B_1. Кроме того, Z централизует B/B_1, то есть Z цент-рализует B_1, в силу нечетности p. Лемма доказана.

Теперь лемма 13 и теорема A из [9] показывают, что G об-

ладает так называемой S'_{σ_2} -подгруппой K, содержащей P^*. Легко проверить, что $B=O_p(K)$ в силу леммы 10. Пусть $N=N_G(Z(B))$, тогда N содержит T и K. Поэтому $P^*\cap O(N)=P$. Пусть L означает T -инвариантную холловскую σ_2 -подгруппу из $O(N)$, содержащую P, $F=F(L)$ - подгруппа Фиттинга группы L. Пусть $q\in\pi(F)$ и Q означает силовскую q -подгруппу из F. Из леммы 16 с q на месте p следует, что Z централизует Q. Так как q произвольно, то Z централизует F и, следовательно, всю L. В частности, $[P,Z]=1$. Однако это противоречит условию $p\in\sigma_2$.

Теорема А полностью доказана.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы Б. Для краткости будем обозначать S_2 -подгруппу из $Sz(q)$ через $S(q)$, $q=2^{2n+1}$, $n\geq 1$. Сейчас мы докажем два факта о группах $S(q)$. Необходимые свойства этих групп приведены в [12].

ЛЕММА 2.1. Пусть S - подгруппа из $S(q)$, автоморфизм a которой имеет нечетный порядок и тождествен на $\Omega_1(S)$. Тогда $a=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U=\Omega_1(S)$, тогда $U\subseteq Z(S)$. Каждый смежный класс S по U является в точности множеством корней второй степени из некоторого элемента $u\in U$. Так как $u^a=u$, то $(xU)^a=xU$, где $x^2=u$. Поэтому a тождествен и на S/U. Так как порядок a нечетен, то a централизует S, то есть $a=1$.

ЛЕММА 2.2. Пусть V - нормальная подгруппа из $S(q)$, не лежащая в $Z=Z(S(q))$. Тогда $|Z:Z\cap V|\leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $S(q)$ представляется как множество упорядоченных пар (α,β), где α,β - элементы поля F из q элементов, $q=2^{2n+1}$, $n\geq 1$. При этом умножение задается формулой $(\alpha,\beta)(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha+\alpha_1,\beta+\beta_1+\alpha\alpha_1^{\theta})$, где θ - некоторый автоморфизм F.

Допустим, что V не лежит в Z. Тогда V содержит элемент $v=(\alpha,\beta)$ для некоторого ненулевого элемента α из F. Пусть $x=(\alpha_1,\beta_1)$ - произвольный элемент $S(q)$, тогда V содержит элемент $x^{-1}vxv^{-1}=(0,\alpha^{\theta}\alpha_1+\alpha_1^{\theta}\alpha)$. Достаточно проверить, что элементы вида $(\alpha^{\theta}\alpha_1+\alpha_1^{\theta}\alpha)$ при фиксированном $\alpha\neq 0$ образуют в аддитивной группе F_+ поля F подгруппу индекса 2. Но $\alpha_1\to\alpha\alpha_1^{\theta}+\alpha_1\alpha^{\theta}$ -

гомоморфизм группы F_+ в себя, причем $\alpha^{\theta}\alpha_1+\alpha_1^{\theta}\alpha=0$ только при $\alpha_1=0$, или $\alpha_1=1$, так как θ - образующий элемент группы авто - морфизмов поля F и имеет на F точно две неподвижные точки 0 и 1. Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству теоремы Б. Допустим, что она неверна. Через G обозначим минимальный противоречащий пример к ней. Пусть T означает некоторую силовскую 2-подгруппу из G, $Z=Z(T)=\Omega_1(T)$. Из минимальности G следует, что $O(G)=1$ и в G нет нормальных подгрупп нечетного индекса, то есть G порождена своими S_2-подгруппами.

ЛЕММА 2.3. Разрешимые подгруппы из G имеют единичную 2-длину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R - разрешимая подгруппа из G. Можно считать, что $O(R)=1$ и $O^{2'}(R)=R$. Пусть S означает произвольную S_2-подгруппу из R; надо доказать, что S инвариантна в R. Пусть $V=O_2(R)$ и $U=\Omega_1(V)$, тогда $U\subseteq Z(R)$. Из леммы 2.1 следует, что каждый элемент нечетного порядка из R централизует V. Однако $O(R)=1$ и $C_R(V)\subseteq V$. Следовательно, $R=S$, и лемма доказана.

Пусть $V=O_2(G)$. Допустим, что $V=1$. Тогда минимальность G показывает, что 2-локальные подгруппы в G разрешимы, то есть G удовлетворяет условиям теоремы А. В этом случае G не противоречит теореме Б, и можно считать, что $V\neq 1$.

ЛЕММА 2.4. V лежит в Z, причём $V\neq Z$. В частности, V элентарна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V не лежит в Z, тогда по лемме 2.2 либо $Z\subseteq V$, либо $|Z:Z\cap V|=2$. Допустим сначала, что V содержит Z. Тогда $Z\subseteq Z(G)$. Лемма 2.1 показывает, что T/Z лежит в центре $N(T)/Z$. Но T/Z абелева, следовательно, G/Z обладает нормальным 2-дополнением, и по [4] G разрешима. Теперь будем считать, что $|Z:Z\cap V|=2$. Легко проверить, что $Z/Z\cap V$ будет слабо замкнутой подгруппой порядка 2 в $T/Z\cap V$, то есть $Z/Z\cap V$ лежит в центре фактор-группы $G/Z\cap V$ в силу [5]. Это противоречиво, и лемма доказана.

Так как $O(G)=1$ и G порождается своими S_2-подгруппами, то лемма 2.4 показывает, что $V=Z(G)=S(G)$. Пусть H - минимальная нормальная подгруппа из G/V, $S=T/V\cap H$, тогда S яв-

ляется S_2 -подгруппой в H. Через $\overline{H}$ и $\overline{S}$ обозначим полные прообразы H и S в G. Наша ближайшая цель - доказать, что H удовлетворяет предположению теоремы А.

ЛЕММА 2.5. (а) Z/V лежит в H. (б) H проста и $G/\overline{H}$ является 2-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что Z/V не лежит в H, то есть существует инволюция z в $\overline{H}-V$. Из теоремы Машке следует, что в $\langle z, V\rangle$ есть инволюция z_1, что z_1 не лежит в V и $\langle z_1\rangle$ слабо замкнута в T относительно G. Теперь результат Г.Глаубермана [5] снова показывает, что $z_1 \in V$, вопреки здравому смыслу, и (а) доказано.

Проверим (б). Пусть H не проста, тогда $H=H_1 \times \ldots \times H_n$, где $H_1,\ldots,H_n$ - изоморфные простые группы и $n \geq 2$. Так как Z/V лежит в H по (а) и неединичен в силу предыдущей леммы, то легко понять, что в $T-V$ есть инволюция t, централизатор которой в G/V неразрешим. Однако минимальность G показывает, что это невозможно.

ЛЕММА 2.6. $\Omega_1(S)=Z/V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже доказали, что Z/V лежит в S. Поэтому достаточно проверить, что $\overline{S}$ не содержит элементов x порядка 4 из T, для которых x^2 лежит в V.

Как мы знаем из леммы 2.3, 2-длина разрешимых подгрупп в G равна 1. Легко проверить, что любые два элемента из S, сопряженные в H, сопряжены и в $N_H(S)$. Как и в лемме 6, можно показать, что в $N_H(S)$ нет подгрупп индекса 2.

Положим $Z_0=Z/V$, тогда $Z_0 \subseteq Z(S)$. Ясно, что S/Z_0 абелева. Пусть $N_H(S)=SK$, где $S\cap K=1$. Предыдущий абзац показывает, что K действует на S/Z_0 без неподвижных точек. Если же $x\in\overline{S}$ и $x^2\in V^{\#}$, то K централизует x по модулю Z_0, и тогда x лежит в V, что невозможно, так как V элементарна и x не является инволюцией. Лемма доказана.

Таким образом, $\Omega_1(S)=Z/V$, и централизаторы инволюций в H разрешимы. Теперь применима теорема А, которая показывает, что H изоморфна одной из групп $L_2(q)$, $U_3(q)$, $Sz(q)$ при подходящем q.

В доказательстве последней леммы было, в частности, показано, что $\overline{H}$ не накрывает G/V. Так как $V=O_2(G)$, то в G/V нет инвариантных 2-подгрупп. Кроме того, $G/\overline{H}$ является 2-группой. По-

этому достаточно проверить, что H выделяется в G/V прямым множителем.

Рассмотрение группы автоморфизмов $L_2(q)$ показывает, что S можно считать неабелевой. Известно [12], что группа внешних автоморфизмов $SZ(q)$ имеет нечетный порядок. Поэтому будем считать, что H изоморфна $U_3(q)$ для некоторого $q=2^n \geq 4$.

Через S_1 обозначим некоторую S_2-подгруппу из G/V, содержащую S. Тогда лемма 2.3 показывает, что в G/V $N(S)=N(S_1)=S_1K$, где $S_1 \cap K=1$. Ясно, что $[S_1,K]=S$. Пусть $C=C_{S_1}(K)$, тогда $S_1=SC$ и $S \cap C=1$, то есть C элементарна и $HC=G/V$. Сейчас мы покажем, что C централизует S, что и покажет справедливость нашего утверждения в силу результата [5].

Допустим, что C не централизует S. Тогда из 2-замкнутости группы S_1K следует, что $[S,C]=Z(S)$ и C централизует $Z(S)$.

Известно, что K обладает неединичной подгруппой L, тождественной на $Z(S)$ и действующей без неподвижных точек на $S/Z(S)$, то есть $[S,L]=S$. Из предыдущего абзаца следует, что $[C,S,L]=1$ и, кроме того, $[L,C,S]=1$ по определению $C=C_{S_1}(K)$. Из леммы о трех коммутантах получаем теперь, что $[S,L,C]=1$, то есть C централизует $S=[S,L]$, и наше утверждение проверено.

Теорема Б полностью доказана.

3. ТЕОРЕМА В. Сейчас мы характеризуем простые группы

$$U_3(q) = PSU(3,q^2)$$

их силовскими 2-подгруппами. Более точно, будет доказана

ТЕОРЕМА В. Пусть в неразрешимой конечной группе G силовская 2-подгруппа T изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $U_3(q)$. Тогда $G/O(G)$ содержит $U_3(q)$ как нормальную подгруппу нечетного индекса. В частности, если G проста, то G изоморфна $U_3(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем так же, как и в теореме Б. Исключение составят лишь некоторые детали, которые и будут предметом нашего внимания.

Пусть, как и прежде, G означает группу минимального порядка, удовлетворяющую условиям, но не заключению теоремы В. Через T обозначим некоторую силовскую 2-подгруппу из G и положим $Z=\Omega_1(T)$. Тогда T представляется как множество троек (α,β,γ) элементов поля $F=GF(q)$; при этом умножение задается формулой

$$(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=(\alpha+\alpha_1,\ \beta+\beta_1,\ \gamma+\gamma_1+\alpha\alpha_1+\varepsilon\alpha\beta_1+\beta\beta_1).$$

Здесь ε означает фиксированный ненулевой элемент поля F, точное знание которого нам не понадобится. Непосредственно проверяется, что $Z=Z(T)=T'=\Phi(T)$ и $|T|=q^3$. При этом Z представляется как множество троек вида $(0,0,\alpha)$, $\alpha\in F$.

Нам понадобится следующий факт о группе T.

ЛЕММА 3.1. (а) Если V – нормальная подгруппа из T, то либо $Z\subseteq V$, либо $V\subseteq Z$. (б) Если U – такая подгруппа из T, что $T=UC_T(U)$, то либо $U=T$, либо U лежит в Z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем только для (а), так как (б) проверяется аналогично.

Пусть $V\lhd T$ и V не лежит в Z. Тогда V содержит элемент $v=(\alpha,\beta,\gamma)$, где $\alpha\neq 0$ или $\beta\neq 0$. Возьмем $t=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ – некоторый элемент из T, тогда $t^{-1}vtv^{-1}$ лежит в V. Вычисления показывают, что $t^{-1}vtv^{-1}=(0,0,\varepsilon\alpha\beta_1+\varepsilon\alpha_1\beta)$. Если $\beta=0$, то $t^{-1}vtv^{-1}=(0,0,\varepsilon\alpha\beta_1)$ и $\alpha\neq 0$. Ясно, что $\varepsilon\alpha\beta_1$ пробегает все F, то есть $Z\subseteq V$. Если β – ненулевой элемент, то положим $\beta_1=0$, тогда $t^{-1}vtv^{-1}=(0,0,\varepsilon\alpha_1\beta)$, и снова ясно, что $Z\subseteq V$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Разрешимые подгруппы из G имеют единичную 2-длину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ничем не отличается от аргументов леммы 4 из теоремы А.

ЛЕММА 3.3. $O_2(G)=S(G)=Z(G)$ неединична. При этом $O_2(G)$ не совпадает с Z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $O(G)=1$ и G порождается своими силовскими 2-подгруппами. Положим $V=O_2(G)$ и проверим, что $V\subseteq Z$. Допустим, что это не так, тогда по лемме 3.1 (а) Z лежит в V. Но тогда $Z=\Omega_1(V)$ и $Z\lhd G$. Так как $Z=T'$, то G/V – группа с

абелевой силовской 2-подгруппой T/V. Так как G минимальна, то централизаторы инволюций в G/V разрешимы. Теперь из [6] следует, что G/V изоморфна одной из групп $L_2(q)$, где $q=2^n \geq 8$ или $q \equiv 3,5 \pmod 8$, $q \geq 5$. Поэтому G/V обладает диэдральной подгруппой $\bar{K}$ порядка 6. Через K обозначим прообраз $\bar{K}$ в G. Из леммы 3.2 следует, что K 3-замкнута, то есть S_3 – подгруппа из K централизует V. Это показывает, что $G=VC_G(V)$ и $T=VC_T(V)$. По лемме 3.1 (б) получаем, что $V \subseteq Z$. Лемма доказана, так как случай $V=Z$ разбирается непосредственно.

Дальнейшее доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы Б. Именно, далее доказывается, что G/V обладает нормальной подгруппой H/V, изоморфной одной из групп $L_2(q)$, $U_3(q)$ или $Sz(q)$ при подходящем q. При этом G/H является 2-группой.

Снова рассматриваем действие G/H на H/V; из этого рассмотрения, как и в теореме Б, следует, что $H=G$. Теперь легко проверить, что ни одна из получающихся тогда структур T/V невозможна.

Это заканчивает доказательство теоремы В.

Литература

1. М.Холл, Теория групп, М., ИЛ, 1962.

2. J.L.ALPERIN, Sylow intersections and fusion, J.Algebra,6,N2 (1967),222-241.

3. H.BENDER, Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlässt,J.Algebra,17,N4(1971),527-554.

4. W.FEIT and J.G.THOMPSON, Solvability of groups of odd order Pacif. J.Math.,13,N3 (1963),775-1029.

5. G.GLAUBERMAN, Central elements in core-free groups, J.Algebra,4,N3(1966),403-420.

6. D.GORENSTEIN, Finite groups in which Sylow 2-subgroups are abelian and centralizers of involutions are solvable, Canad.J.Math., 17,N6(1965),860-906.

7. D.GORENSTEIN, Finite Groups, Harper and Row, New York,1968.

8. D.GORENSTEIN, On the centralizers of involutions in finite groups. II,J.Algebra,14,N3(1970),350-372.

9. D.GORENSTEIN and J.H.WALTER, On the maximal subgroups of finite simple groups, J.Algebra,1,N2(1964),168-213.

10. G. HIGMAN, Suzuki 2-groups, Ill. J. Math., 7, N1(1963), 79-96.

11. Z. JANKO and J. G. THOMPSON, On finite simple groups whose Sylow 2-subgroups have no normal elementary subgroups of order 8 Math. Z., 113, N5(1970), 385-397.

12. M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups, Ann. Math., 75, N1(1962), 105-145.

13. M. SUZUKI, Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed, Ann. Math., 82, N2(1965), 191-212.

Поступило 15 марта 1971г.