НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ

В.П.Ильин

В настоящей заметке, прежде всего, доказываются два интегральных неравенства (неравенства (7) и (9)), которые можно рассматривать как некоторые аналоги известного двупараметрического неравенства Харди и Литтльвуда ([1], теорема 382). Многомерное обобщение неравенства (9) затем применяется для доказательства теоремы о вложении пространств $W_p^l(G)$ в пространства $B_{q,\sigma}^s(G)$, обобщающей и уточняющей известный результат. Эта теорема является в некотором смысле обратной к теореме, полученной в совместной статье [2] О.В.Бесова и автора и относящейся к вложению $B_{p,\theta}^l(G) \to W_q^s(G)$. Заметим, что доказательство этого последнего результата базировалось на неравенстве (7), полученном ранее автором в работе [3] . Однако приводимое здесь доказательство значительно проще.

I. Напомним некоторые общепринятые определения и обозначения.

Пусть $f(x)$ - измеримая функция одного переменного, заданная в эвклидовом пространстве E^1. Будем говорить, что $f \in L_p(E^1)$, $1 \leq p \leq \infty$, если

$$\|f\|_{p,E^1} = \|f\|_p = \left\{ \int_{E^1} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

при $1 \leq p < \infty$, или

$$\|f\|_{\infty,E^1} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E^1} |f(x)| < \infty$$

при $p = \infty$.

Если $\varphi(x,t)$ - измеримая функция в E^2, то будем писать $\varphi \in L_{(p,\theta)}(E^2)$, если

$$\|\varphi\|_{(p,\theta),E^2} = \|\varphi\|_{(p,\theta)} = \left\{ \int_{E^1} \|\varphi(\cdot,t)\|_p^{\theta} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

где $1 \leq p$, $\theta \leq \infty$.

Аналогично определяются $\|f\|_{p,E_+^1}$ и $\|\varphi\|_{(p,\theta),E_+^2}$, где $E_+^1 = (0,\infty)$, $E_+^2 = E_+^1 \times E_+^1$

Если задано число p, $1 \leq p \leq \infty$, то через p' будем обозначать число, сопряженное к p, то-есть такое, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Аналогичный смысл будут иметь числа θ', q' и т.д.

Приведем без доказательств ряд неравенств, используемых в дальнейшем.

<u>Неравенство Харди [I].</u> Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\alpha \neq 0$, $\gamma > 0$, $f \in L_p(E_+^1)$. Если

$$F_{\alpha,\gamma}(x) = \int_0^{x^\gamma} f(y) y^{-\frac{1}{p'}+\alpha} dy \qquad \text{при } \alpha > 0,$$

$$F_{\alpha,\gamma}(x) = \int_{x^\gamma}^{\infty} f(y) y^{-\frac{1}{p'}+\alpha} dy \qquad \text{при } \alpha < 0,$$

то

$$\|x^{-\frac{1}{q}-\alpha\gamma} F_{\alpha,\gamma}\|_{q,E_+^1} \leq \gamma^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{\mu}{|\alpha|}\right)^{\mu} \|f\|_{p,E_+^1},$$

где $\mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

<u>Неравенство Чебышева [I].</u> Если $f(x)$ - невозрастающая, а $g(x)$ - неубывающая суммируемые функции, заданные на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx .$$

Лемма I. (о перестановках функций в убывающем порядке). Пусть $f(x), g(x)$ и $h(x)$ – неотрицательные функции одного переменного, заданные на E^1, причем $f \in L_p(E^1)$, $g \in L_q(E^1)$ $(p, q \ge 1)$, $h \in L_1^{loc}(E^1)$ и, кроме того, $h(x)$ симметрично убывает относительно точки $x=0$.

Пусть $f^*(x)$ и $g^*(x)$ – соответствующие равноизмеримые симметрично убывающие функции относительно точки $x=0$. Тогда

$$J = \int_{E^1}\int_{E^1} f(y)g(x)h(y-x)\,dy\,dx \le \int_{E^1}\int_{E^1} f^*(y)g^*(x)h(y-x)\,dy\,dx.$$

Эта лемма является частным случаем известной леммы М.Рисса (см.[1]).

Докажем теперь две вспомогательные леммы.

Лемма 2. Пусть $a>0$, $0<\mu<1$, $1 \le p < \infty$, $\mu p' > 1$. Пусть $\Psi(x)$ – положительная невозрастающая функция на E^1_+ и $\Psi \in L_p(E^1_+)$. Тогда

$$J = \int_0^\infty \Psi(x)|x-a|^{-\mu}dx \le C a^{-\mu+\frac{1}{p'}} \|\Psi\|_{p, E^1_+}, \qquad (I)$$

где C – константа, не зависящая от a и Ψ.

Доказательство. Так как $\Psi(x)$ не возрастает на $(0,\infty)$, то

$$\int_0^a \Psi(x)|x-a|^{-\mu}dx \ge \int_a^{2a} \Psi(x)|x-a|^{-\mu}dx.$$

Поэтому

$$J \le 2\int_0^a \Psi(x)|x-a|^{-\mu}dx + \int_{2a}^\infty \Psi(x)|x-a|^{-\mu}dx = 2J_1 + J_2 .$$

Применяя последовательно неравенства Чебышева и Гельдера, по-

лучим

$$J_1=\int_0^a \psi(x)|x-a|^{-\mu}dx \le \frac{1}{a}\int_0^a \psi(x)dx\int_0^a |x-a|^{-\mu}dx \le \frac{1}{1-\mu}a^{-\mu+\frac{1}{p'}}\|\psi\|_{p,E^1_+}.$$

Далее,

$$J_2=\int_{2a}^{\infty}\psi(x)|x-a|^{-\mu}dx \le \|\psi\|_{p,E^1_+}\cdot\left[\int_a^{\infty}x^{-\mu p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}} \le Ca^{-\mu+\frac{1}{p'}}\|\psi\|_{p,E^1_+}.$$

Сопоставление полученных неравенств приводит к доказательству леммы.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $1\le p<q<\infty$, $1\le\theta\le q$, $\gamma>0$, $\mu=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Пусть $g(x)$ - неотрицательная симметрично убывающая относительно точки $x=0$ функция, определенная на E^1, а $\psi(y,t)$ и $h(y,t)$ - неотрицательные функции, определенные на E^2, симметрично убывающие по y (относительно точки $y=0$) при почти всех $t\in E^1$.

Предположим, далее, что $g\in L_{q'}(E^1)$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$, $\psi\in L_{(p,\theta)}(E^2)$, а для измеримой функции $h(y,t)$ справедливы следующие две оценки:

$$h(y,t)\le|y|^{-\mu-\alpha_1\gamma}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1}\left(\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{\theta}=1\right), \tag{2}$$

где $\alpha_1>0$, $\mu+\alpha_1\gamma<1$, и

$$h(y,t)\le|y|^{-\mu+\alpha_2\gamma}|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2}, \tag{3}$$

где $0<\alpha_2\gamma<\frac{1}{q}$.

Тогда

$$I=\int_{E^1}\int_{E^1}\int_{E^1} g(x)\psi(y,t)h(y-x,t)dy\,dt\,dx \le K\|g\|_{q'}\|\psi\|_{(p,\theta)}, \tag{4}$$

где K - константа, не зависящая от g и ψ

Доказательство. Разобьем интеграл I на восемь частей, соответствующих восьми октантам пространства. Элементарные соображения подсказывают, что достаточно получить оценку лишь для того интеграла, который соответствует октанту $y>0,\ t>0,\ x>0$, так как остальные оцениваются аналогично. Следовательно нам нужно только установить, что

$$\mathcal{J}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty g(x)\psi(y,t)h(y-x,t)\,dy\,dt\,dx\le K\|g\|_{q'}\|\psi\|_{(p,\theta)} \quad (5)$$

Применяя последовательно неравенства Гельдера и Минковского, имеем

$$\mathcal{J}\le\|g\|_{q'}\Big\|\int_0^\infty dt\int_0^\infty\psi(y,t)h(y-x,t)\,dy\Big\|_{q'}\le\|g\|_{q'}\left(\|\mathcal{J}_1\|_{q'}+\|\mathcal{J}_2\|_{q'}\right), \quad (6)$$

где

$$\mathcal{J}_1(x)=\int_0^{x^\gamma}dt\int_0^\infty\psi(y,t)h(y-x,t)\,dy,\quad \mathcal{J}_2(x)=\int_{x^\gamma}^\infty dt\int_0^\infty\psi(y,t)h(y-x,t)\,dy.$$

Оценим функцию $h(y-x,t)$ под интегралом в $\mathcal{J}_1(x)$ с помощью неравенства (2), а в $\mathcal{J}_2(x)$ - с помощью неравенства (3). Тогда

$$\mathcal{J}_1(x)\le\int_0^{x^\gamma}t^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1}dt\int_0^\infty\psi(y,t)|y-x|^{-\mu-\alpha_1\gamma}dy,$$

$$\mathcal{J}_2(x)\le\int_{x^\gamma}^\infty t^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2}dt\int_0^\infty\psi(y,t)|y-x|^{-\mu+\alpha_2\gamma}dy$$

Внутренние интегралы в обоих случаях можно оценить с помощью неравенства (1). Условия леммы 2, очевидно, выполнены.

Применяя указанную лемму, а затем неравенство Харди (в котором p нужно заменить на θ), получим

$$\|J_1\|_q \le C_1 \|x^{-\frac{1}{q}-\alpha_1\gamma} \int_0^{x^\gamma} \|\Psi(\cdot,t)\|_p t^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1} dt\|_q \le C_2 \|\Psi\|_{(p,\theta)},$$

$$\|J_2\|_q \le C_3 \|x^{-\frac{1}{q}+\alpha_2\gamma} \int_{x^\gamma}^{\infty} \|\Psi(\cdot,t)\|_p t^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2} dt\|_q \le C_4 \|\Psi\|_{(p,\theta)},$$

где C_2 и C_4 не зависят от Ψ .

Последние два неравенства вместе с (6) доказывают оценку (5). Лемма доказана.

Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующих двух лемм.

<u>Лемма 4.</u> Пусть $\lambda > 0$, $\lambda_0 > 0$, $\beta > 0$, $1 \le p < q < \infty$,

$$\mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad 1 \le \theta \le q, \quad \Psi \in L_{(p,\theta)}(E^2),$$

$$h(y,t) = \left(|y|^{\frac{1}{\lambda}} + |t|^{\frac{1}{\lambda_0}}\right)^{-\mu\lambda-\beta\lambda_0} |t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}.$$

Тогда

$$\|\int_{E^1}\int_{E^1} \Psi(y,t) h(y-x,t) dy dt\|_q \le K \|\Psi\|_{(p,\theta)}, \tag{7}$$

где K - константа, не зависящая от Ψ .

<u>Доказательство</u>. На основании результата, обратного неравенству Гельдера, для доказательства неравенства (7) достаточно установить, что для любой функции $g \in L_{q'}(E^1)$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$ имеет место неравенство:

$$J = \int_{E^1}\int_{E^1}\int_{E^1} g(x)\Psi(y,t) h(y-x,t) dy dt dx \le K \|g\|_{q'} \|\Psi\|_{(p,\theta)} \tag{8}$$

При доказательстве этого неравенства, очевидно, можно считать, что функции g и Ψ неотрицательны.

Пусть $g^*(x)$ равноизмерима с $g(x)$ и симметрично убывает относительно точки $x=0$, а $\Psi^*(y,t)$ при почти всех фиксированных t, как функция от y, равноизмерима с $\Psi(y,t)$ и также симметрично убывает (по y). Тогда по лемме I

$$\int_{E^1}\int_{E^1} g(x)\Psi(y,t)h(y-x,t)\,dy\,dx \le \int_{E^1}\int_{E^1} g^*(x)\Psi^*(y,t)h(y-x,t)\,dy\,dx.$$

Поэтому можно считать, что в интеграле функции $g(x)$ и $\Psi(y,t)$ симметрично убывают по x и по y.

Теперь неравенство (8) будет следовать из леммы 3, если заметить, что для функции $h(y,t)$ справедливы неравенства (2) и (3). Действительно, с одной стороны,

$$h(y,t)=\left(|y|^{\frac{1}{\lambda}}+|t|^{\frac{1}{\lambda_0}}\right)^{-\mu\lambda-\beta\lambda_0}\cdot|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}=$$

$$=\left(|y|^{\frac{1}{\lambda}}+|t|^{\frac{1}{\lambda_0}}\right)^{-\mu\lambda-\alpha_1\lambda_0-(\beta-\alpha_1)\lambda_0}\cdot|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1+(\beta-\alpha_1)}\le$$

$$\le|y|^{-\mu-\alpha_1\gamma}\,|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1},$$

где $0<\alpha_1\le\beta$, $\mu+\alpha_1\gamma<1$, $\gamma=\frac{\lambda_0}{\lambda}$. Существование такого α_1 следует из того, что $\beta>0$ и $\mu<1$ (по условию $q>p$).

С другой стороны,

$$h(y,t)=\left(|y|^{\frac{1}{\lambda}}+|t|^{\frac{1}{\lambda_0}}\right)^{-\mu\lambda+\alpha_2\lambda_0-(\beta+\alpha_2)\lambda_0}\cdot|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2+(\beta+\alpha_2)}\le$$

$$\le|y|^{-\mu+\alpha_2\lambda_0}\,|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2},$$

где $0<\alpha_2\gamma<\frac{1}{q}$ (по условию $q<\infty$), $\gamma=\frac{\lambda_0}{\lambda}$.

Лемма доказана.

В следующей лемме мы будем пользоваться обозначением*)

*) Такое обозначение было предложено мне О.В.Бесовым.

$$[a]_1 = \min\{a, 1\}.$$

Лемма 5. Пусть $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $1 < p < q \le \infty$, $p \le \sigma \le \infty$, $\mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Пусть $f \in L_p(E^1)$,

$$h(y,\tau) = h_\beta(y,\tau) = |y|^{-\mu-\gamma\beta} |\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\beta} \left[\frac{|y|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{2\beta}.$$

Тогда

$$\| \| \int_{E^1} f(y) h(y-x,\tau) dy \|_{q, E^1_x} \|_{\sigma, E^1_\tau} \le K \|f\|_p, \qquad (9)$$

где K - константа, не зависящая от f.

Доказательство. Для доказательства неравенства (9) достаточно доказать, что для любой функции $\psi(x,\tau) \in L_{(q',\sigma')}(E^2)$ $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \ \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1\right)$ имеет место неравенство

$$\int_{E^1}\int_{E^1}\int_{E^1} f(y)\psi(x,\tau) h(y-x,\tau) dy d\tau dx \le K \|f\|_p \|\psi\|_{(q',\sigma')}. \qquad (10)$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что $f \ge 0$, $\psi \ge 0$. А тогда, замечая, что $h_\beta(y,\tau) \le h_{\beta_1}(y,\tau)$ при $0 < \beta_1 < \beta$, можно также считать, что $\beta\gamma < \mu$ ($\mu > 0$, так как $p > 1$). При этом условии $h(y,\tau)$ является симметрично убывающей функцией по y относительно точки $y = 0$. Применяя далее те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 4, мы убеждаемся в том, что функции f и ψ также можно считать симметрично убывающими соответственно по y и по x.

Теперь доказательство неравенства (10) получается на основании леммы 3. Чтобы привести рассматриваемый случай к условиям леммы, мы переобозначим параметры. Именно, заменим p на q', q на p', σ на θ'. Тогда условия нашей леммы в новых параметрах примут вид:

$$1 < q' < p' \leq \infty, \quad q' \leq \theta' \leq \infty,$$

или, переходя к сопряженным,

$$1 \leq p < q < \infty, \quad 1 \leq \theta \leq q, \quad \mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

а неравенство (I0) запишется в виде:

$$\int_{E^1}\int_{E^1}\int_{E^1} f(y)\Psi(x,\tau)h(y-x,\tau)\,dy\,d\tau\,dx \leq K\|f\|_{q'}\|\Psi\|_{(p,\theta)}. \quad (II)$$

Чтобы полностью проверить выполнение всех условий леммы 3, необходимо еще установить, что для $h(y,\tau)$ справедливы оценки (2) и (3). С одной стороны,

$$h(y,\tau) = |y|^{-\mu-\gamma\beta}|\tau|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}\left[\frac{|y|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} =$$

$$= |y|^{-\mu-\alpha_1\gamma}|\tau|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1}\left(\frac{|y|^\gamma}{|\tau|}\right)^{\alpha_1-\beta}\left[\frac{|y|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} \leq$$

$$\leq |y|^{-\mu-\alpha_1\gamma}|\tau|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1},$$

если $0 < \alpha_1 \leq \beta$. При этом можно считать, что $\alpha_1\gamma + \mu < 1$, поскольку $\mu < 1$. С другой стороны,

$$h(y,\tau) = |y|^{-\mu+\alpha_2\gamma}|\tau|^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2}\left(\frac{|y|^\gamma}{|\tau|}\right)^{-(\alpha_2+\beta)}\left[\frac{|y|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} \leq$$

$$\leq |y|^{-\mu+\alpha_2\gamma}|\tau|^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha_2},$$

если $0 < \alpha_2 \leq \beta$. Можно также считать, что $\alpha_2\gamma < \frac{1}{q}$ $(q < \infty)$.

Таким образом все условия леммы 3 выполнены; из нее следует (II), а, следовательно, и (I0). Лемма доказана.

Как отмечалось выше, неравенства (7) и (9) можно рассматривать как аналоги неравенства Харди и Литтльвуда ([I] теор.382).

II. Условимся об обозначениях. В дальнейшем m и n - натуральные числа, причем $1 \leq m \leq n$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ и =

$q=(q_1,\dots,q_n)$ – n-мерные векторы, удовлетворяющие условию (A_m):

$$1\le p_i\le q_i\le\infty\ (i=1,\dots,n),\ q_{m+1}=\dots=q_n=\infty. \qquad (A_m)$$

Пусть $1\le m<n$. Будем говорить, что вектор p удовлетворяет условию (B_m), если

$$p_i\ge p_j\ \ (i=1,\dots,m;\ \ j=m+1,\dots,n) \qquad (B_m)$$

Для любого n-мерного вектора $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$ положим

$$\bar\tau=(\tau_1,\dots,\tau_m),\quad \bar{\bar\tau}=(\tau_{m+1},\dots,\tau_n),\ \tau=(\bar\tau,\bar{\bar\tau}),$$

$$\tau^{(j)}=(\tau_1,\dots,\tau_{j-1},\tau_{j+1},\dots,\tau_n).$$

Будем обозначать через $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ – точки эвклидова пространства E^n, через t и τ – точки E^1, через λ вектор $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, у которого $\lambda_i>0$ $(i=1,\dots,n)$. Пусть $v>0$; тогда $v^\lambda=(v^{\lambda_1},\dots,v^{\lambda_n})$. Если $y\in E^n$, а $K(y)$ – некоторая функция, то

$$y:v^\lambda=(y_1v^{-\lambda_1},\dots,y_nv^{-\lambda_n}),$$

$$K(y:v^\lambda)=K(y_1v^{-\lambda_1},\dots,y_nv^{-\lambda_n}).$$

Пусть $f(x)$ – измеримая функция, определенная в E^n. Мы пишем $f\in L_p(E^n)$, если

$$\|f\|_p=\|f\|_{p,E^n}=\left\{\int_{E^1}dx_n\left[\int_{E^1}dx_{n-1}\dots\left(\int_{E^1}|f|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\dots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_n}}<\infty. \qquad (12)$$

Аналогично, если $\varphi(x,t)$ – измеримая функция в $E^n\times E^1$, то $\varphi\in L_{(p,\theta)}(E^{n+1})$, если

$$\|\varphi\|_{(p,\theta)}=\left\{\int_{E^1}\|\varphi(\cdot,t)\|_p^\theta dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}<\infty, \qquad (13)$$

где $1 \le \theta \le \infty$.

Если f определена в некоторой области $G \subset E^n$, то

$$\|f\|_{p,G} = \|\tilde{f}\|_{p,E^n},$$

где $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in G$, $\tilde{f}(x) = 0$ при $x \in E^n \setminus G$.

При рассмотрении смешанной нормы (I2) всегда будем считать, что порядок взятия норм по отдельным переменным соответствует последовательности номеров компонент вектора, стоящего в обозначении нормы. Например,

$$\|f\|_{(\bar{\bar{p}},\bar{p})} = \|\cdots\|\|\cdots\|f\|_{p_{m+1},x_{m+1}}\cdots\|_{p_n,x_n}\|_{p_1x_1}\cdots\|_{p_m,x_m}.$$

Мы будем пользоваться следующими двумя неравенствами

<u>Обобщенное неравенство Минковского.</u> Если $0<\alpha\le\beta\le\infty$, то

$$\left(\int_{E^1} dz \left(\int_{E^1} |\varphi(z,w)|^\alpha dw\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \left(\int_{E^1} dw \left(\int_{E^1} |\varphi(z,w)|^\beta dz\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

<u>Неравенство для свертки</u>. Если $1 \le p_i \le q_i \le \infty$, $1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=\frac{1}{r_i}$ $(i=1,\dots,n)$, то

$$\left\|\int_{E^n} f(y)K(y-x)dy\right\|_q \le \|K\|_r \|f\|_p.$$

<u>Лемма 6.</u> Пусть p и q удовлетворяют условию (A_m), а вектор p удовлетворяет еще условию (B_m).

Пусть

$$r=(r_1,\dots,r_n),\quad \frac{1}{r_i}=1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\quad (i=1,\dots,n),$$

$$\mu=\sum_{i=1}^n \lambda_i\left(1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right)=\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{r_i}\quad (\lambda_i>0\ \ i=1,\dots,n),$$

$$J(x)=\int_{E^n} f(y)K((y-x):v^\lambda)dy,$$

где

$$f\in L_p(E^n),\quad K\in L_{(\bar{r},r)}(E^n).$$

13

Тогда

$$\|\mathcal{J}\|_q \le \|\mathcal{J}\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q})} \le \|K\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau})} \|f\|_p \cdot v^{\mu}, \qquad (14)$$

$$\|\mathcal{J}(\cdot,x_m)\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}^{(m)})} \le v^{\mu-\frac{\lambda_m}{\tau_m}} \int_{E^1} \|f(\cdot,y_m)\|_{p^{(m)}} \cdot \|K(\cdot,(y_m-x_m)v^{-\lambda_m}\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau}(m))} dy_m \cdot \qquad (15)$$

<u>Доказательство.</u> Так как $\bar{\bar{q}} = (q_{m+1},\dots,q_n) = (\infty,\dots,\infty)$, то применяя многократно обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\|\mathcal{J}\|_q = \|\mathcal{J}\|_{(\bar{q},\bar{\bar{q}})} \le \|\mathcal{J}\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q})}.$$

Чтобы доказать второе из неравенств (14), воспользуемся неравенством для свертки. Тогда

$$\|\mathcal{J}\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q})} \le \|K(\cdot : v^{\lambda})\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau})} \cdot \|f\|_{(\bar{\bar{p}},\bar{p})},$$

где

$$\|K(\cdot : v^{\lambda})\|_{\tau} = \left\{ \int_{E^1} dy_n \cdots \left[\int_{E^1} |K(y_1 v^{-\lambda_1},\dots,y_k v^{-\lambda_n})| dy_1 \right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \cdots \right\}^{\frac{1}{\tau_n}}.$$

Замечая, что

$$\|K(\cdot : v^{\lambda})\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau})} = v^{\mu} \|K\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau})}$$

и, в силу условия (B_m) и обобщенного неравенства Минковского,

$$\|f\|_{(\bar{\bar{p}},\bar{p})} \le \|f\|_p,$$

приходим к неравенству (14).

Также с помощью обобщенного неравенства Минковского и неравенства для свертки получается неравенство (I5). Лемма доказана.

Отметим, что неравенства

$$\|\mathfrak{J}\|_q \le \|K\|_\tau \, \|f\|_p \, v^{\mu} \tag{I4'}$$

и

$$\|\mathfrak{J}(\cdot,x_m)\|_{q^{(m)}} \le v^{\mu-\frac{\lambda_m}{\tau_m}} \int_{E^1} \|f(\cdot,y_m)\|_{p^{(m)}} \cdot \|K(\cdot,(y_m-x_m)v^{-\lambda_m})\|_{\tau^{(m)}} \, dy_m \tag{I5'}$$

справедливы и без предположения о выполнении условия (B_m) для p.

<u>Теорема I</u>. Пусть p и q удовлетворяют условию (A_m), вектор p удовлетворяет условию (B_m) и, кроме того,

$$1 < p_m < q_m \le \infty. \tag{I6}$$

Пусть, далее, $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $p_m \le \sigma \le \infty$,

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}\right),$$

$$H(v,\tau) = v^{-\mu-\beta\varkappa} |\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\beta} \left[\frac{v^{\varkappa}}{|\tau|}\right]_1^{2\beta},$$

$$\mathfrak{J}(x,\tau) = \int_0^\infty H(v,\tau) v^{-1} dv \int_{E^n} f(y) K((y-x):v^{\lambda}) dy,$$

где $f \in L_p(E^n)$, $K(y)$ - ограниченная финитная функция с носителем, содержащимся в единичном кубе: $|y_i| \le 1$ $(i=1,\dots,n)$.

Тогда

$$\|\mathfrak{J}\|_{(q,\sigma)} \le \|\mathfrak{J}\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q},\sigma)} \le C \|f\|_p, \tag{I7}$$

где C - константа, зависящая от K, но не зависящая от f.

Доказательство. Первое из неравенств (I7) является следствием обобщенного неравенства Минковского, поскольку $\bar{\bar{q}}=(\infty,\dots,\infty)$. Докажем второе неравенство. Оценим сначала $\|J(\cdot,x_m,\tau)\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}^{(m)})}$. Применяя обобщенное неравенство Минковского и неравенство (I5) (лемма 6), имеем

$$\|J(\cdot,x_m,\tau)\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}^{(m)})} \le$$

$$\le \int_0^\infty H(v,\tau)v^{-1}dv \left\| \int_{E^n} f(y)K(y-x):v^{\lambda})dy \right\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}^{(m)})} \le$$

$$\le \int_0^\infty H(v,\tau)v^{-1+\mu-\frac{\lambda_m}{\tau_m}}dv \int_{E^1} \|f(\cdot,y_m)\|_{p^{(m)}} \cdot \|K(\cdot,(y_m-x_m)v^{-\lambda_m})\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau}^{(m)})} dy_m = \quad (I8)$$

$$= \int_{E^1} \|f(\cdot,y_m)\|_{p^{(m)}} \mathcal{L}(y_m-x_m,\tau)dy_m,$$

где τ - вектор, введенный в лемме 6, а

$$\mathcal{L}(t,\tau)=\int_0^\infty H(v,\tau)v^{-1+\mu-\frac{\lambda_m}{\tau_m}} \|K(\cdot,tv^{-\lambda_m})\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau}^{(m)})} \cdot dv.$$

Оценим функцию $\mathcal{L}(t,\tau)$. Из определения $H(v,\tau)$ следует, что

$$H(v,\tau)v^{\mu-\frac{\lambda_m}{\tau_m}} = v^{-\frac{\lambda_m}{\tau_m}-\beta\varkappa}|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\beta}\left[\frac{v^{\varkappa}}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} = N(v,\tau).$$

Далее, из определения функции $K(y)$ вытекает, что

$$\|K(\cdot,tv^{-\lambda_m})\|_{(\bar{\bar{\tau}},\bar{\tau}^{(m)})} \le C_1\chi(tv^{-\lambda_m}),$$

где C - некоторая константа, а $\chi(t)$ - характеристическая функция отрезка $[-1,1]$.

Таким образом,

$$\mathcal{L}(t,\tau) \leq C_1 \int_0^\infty N(v,\tau)\chi(t, v^{-\lambda_m}) v^{-1} dv.$$

Покажем, что

$$\mathcal{L}(t,\tau) \leq C_2 h(t,\tau) =$$

$$= C_2 |t|^{-\frac{1}{\tau_m}-\alpha\gamma} |\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha} \left[\frac{|t|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{2\alpha}, \tag{19}$$

где, в силу (16), $\frac{1}{\tau_m} = 1 - \frac{1}{p_m} + \frac{1}{q_m} > 0$, $\gamma = \frac{\varkappa}{\lambda_m}$, α - произвольное число, удовлетворяющее неравенствам: $0 < \alpha < \beta$, $\alpha\gamma \leq \frac{1}{\tau_m}$, C_2- константа, не зависящая от t и τ.

Пусть α, γ - числа, а $h(t,\tau)$- функция, определенные выше Поскольку $\chi(t v^{-\lambda_m}) = 0$ при $|t| v^{-\lambda_n} > 1$, имеем

$$N(v,\tau)\chi(t v^{-\lambda_m}) = \left(|t|^{-\frac{1}{\tau_m}-\alpha\gamma} |\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha} \left[\frac{|t|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{2\alpha}\right) \times$$

$$\times \left(|t| v^{-\lambda_m}\right)^{\left(\frac{1}{\tau_m}-\alpha\gamma\right)} \left(\frac{|t|^\gamma}{|\tau|}\right)^{2\alpha} \cdot \left[\frac{|t|^\gamma}{|\tau|}\right]_1^{-2\alpha} \left(\frac{v^\varkappa}{|\tau|}\right)^{-(\beta+\alpha)} \left[\frac{v^\varkappa}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} \chi(t v^{-\lambda_m}) \leq$$

$$\leq h(t,\tau) a^{2\alpha} [a]_1^{-2\alpha} \left(\frac{v^\varkappa}{|\tau|}\right)^{-(\beta+\alpha)} \left[\frac{v^\varkappa}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} \chi(t v^{-\lambda_m}),$$

где $a = \frac{|t|^\gamma}{|\tau|}$.

Из этой оценки следует, что

$$\mathcal{L}(t,\tau) \leq C_1 h(t,\tau) a^{2\alpha} [a]_1^{-2\alpha} \mathcal{J},$$

где

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \left(\frac{v^\varkappa}{|\tau|}\right)^{-(\beta+\alpha)} \left[\frac{v^\varkappa}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} \chi(t v^{-\lambda_m}) v^{-1} dv =$$

$$= \int\limits_{|t|^{\frac{1}{\lambda_m}}}^{\infty} \left(\frac{v^{\varkappa}}{|\tau|}\right)^{-(\beta+\alpha)} \left[\frac{v^{\varkappa}}{|\tau|}\right]_1^{2\beta} v^{-1} dv = \frac{1}{\varkappa} \int\limits_a^{\infty} z^{-1-(\beta+\alpha)} [z]_1^{2\beta} dz.$$

Если $a<1$, то

$$\mathcal{L}(t,\tau) \leq \frac{C_1}{\varkappa} h(t,\tau) \left(\int\limits_a^1 z^{-1+\beta-\alpha} dz + \int\limits_1^{\infty} z^{-1-(\beta+\alpha)} dz \right) \leq$$

$$\leq C_3 h(t,\tau),$$

а если, $a \geqslant 1$, то

$$\mathcal{L}(t,\tau) \leq \frac{C_1}{\varkappa} h(t,\tau) a^{2\alpha} \int\limits_a^{\infty} z^{-1-(\beta+\alpha)} dz \leq C_4 h(t,\tau) a^{\alpha-\beta} \leq$$

$$\leq C_4 h(t,\tau),$$

так как $\alpha < \beta$. Неравенство (I9) доказано. На основании (I8) и (I9) имеем

$$\|\mathcal{J}(\cdot, x_m, \tau)\|_{(\bar{\bar{q}}, \bar{q}^{(m)})} \leq C_2 \int\limits_{E^1} \|f(\cdot, y_m)\|_{p^{(m)}} \cdot h(y_m - x_m, \tau) dy_m .$$

Отсюда

$$\|\mathcal{J}\|_{(\bar{\bar{q}}, \bar{q}, \sigma)} \leq C_2 \left\| \int\limits_{E^1} \|f(\cdot, y_m)\|_{p^{(m)}} h(y_m - x_m, \tau) dy_m \right\|_{(q_m, \sigma)}.$$

Норму, стоящую в правой части, оценим с помощью леммы 5. Легко проверить, что условия леммы выполнены ($\alpha = \beta$). Применяя неравенство (9) указанной леммы, а затем $n-m$ раз обобщенное неравенство Минковского ($p_m \geqslant p_j$, $j = m+1, \ldots, n$), получим

$$\| J \|_{(\bar{\bar{q}}, \bar{q}, \sigma)} \leq C \| f \|_{(p^{(m)}, p_m)} \leq C \| f \|_p .$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема по существу является многомерным аналогом леммы 5. Многомерный аналог леммы 4 приведен в [2] .

Ш. В дальнейшем через G будем обозначать область пространства E^n .

Пусть $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$, $\ell_i > 0$ - целые $(i = 1, \dots, n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i \leq \infty$ $(i = 1, \dots, n)$.

Через $W_p^{\ell}(G)$ обозначим пространство функций $f \in L_p(G)$, имеющих в области G обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $D_i^{\ell_i} f (i = 1, \dots, n)$, с конечной нормой

$$\| f \|_{W_p^{\ell}(G)} = \| f \|_{p, G} + \sum_{i=1}^{n} \| D_i^{\ell_i} f \|_{p, G}, \tag{20}$$

где $D_i^{\ell_i} f(x) = \dfrac{\partial^{\ell_i} f(x)}{\partial x_i^{\ell_i}}$.

Обозначим через $\Delta_i^m(t) f(x)$ конечную разность функции $f(x)$ порядка m с шагом t по переменной x_i , то-есть

$$\Delta_i^m(t) f(x) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j (-1)^{m-j} f(x + j t e_i),$$

где e_i - единичный вектор, направленный по оси x_i .

Положим

$$\Delta_i^m(t, G) f(x) = \Delta_i^m(t) f(x),$$

если разность строится по точкам, принадлежащим G вместе с соединяющим их отрезком,

$$\Delta_i^m(t, G) f(x) = 0$$

- в противном случае.

Пусть p –тот же вектор, что и выше, $1 \le \theta \le \infty$, $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$, $\ell_i=\bar{\ell}_i+\alpha_i$, $\bar{\ell}_i$ – целое, $0<\alpha_i\le 1$ $(i=1,\dots,n)$.

Обозначим, следуя О.В.Бесову [4], через $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ пространство функций $f\in L_p(G)$, имеющих в G обобщенные производные $D_i^{\bar{\ell}_i} f$ $(i=1,\dots,n)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)} = \|f\|_{p,G} + \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\infty}\|\Delta_i^2(t,G)D_i^{\bar{\ell}_i} f\|_p^{\theta}\frac{dt}{t^{1+\alpha_i\theta}}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \qquad (21)$$

Введем класс областей G, рассматриваемых ниже.

Пусть $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$, $\ell_i>0$ $(i=1,\dots,n)$. Будем называть ℓ-рогом "длины" H тело

$$V(\ell,H)=\bigcup_{0<v\le H}\{x: x_i>0,\ 0<\alpha_i v<x_i^{\ell_i}<(\alpha_i+\varepsilon)v,\ i=1,\dots,n\}. \qquad (22)$$

Будем, далее, говорить, что область G принадлежит классу $A(\ell,H)$ и писать $G\in A(\ell,H)$, если существует конечное число τ_0 открытых множеств G_τ $(\tau=1,\dots,\tau_0)$ и ℓ-рогов $V_\tau(\ell,H)$ вида (22), либо получающихся из (22) симметричным отражением относительно одной или нескольких координатных гиперплоскостей таких, что

1) $G_\tau+V_\tau(\ell,H)\subset G$ $(\tau=1,\dots,\tau_0)$,

2) при некотором $\delta>0$ $\quad G=\bigcup_{\tau=1}^{\tau_0} G_{\tau,\delta}$,

где

$$G_{\tau,\delta}=\{x: x\in G_\tau,\ \rho(x,\partial G_\tau\setminus\partial G)>0\},$$

∂G – граница G, ∂G_τ – граница G_τ.

Очевидно, если $G\in A(\ell,H)$, то $G\in A(\ell,h)$ при любом h, $0<h\le H$.

Пусть $f\in W_p^{\ell}(G)$, $G\in A(\ell,H)$. Положим $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i=\frac{1}{\ell_i}$ $(i=1,\dots,n)$. Хорошо известно, что тогда функция f имеет смешанные производные вида $D^{\nu}f$, где

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ - вектор с целыми неотрицательными координатами, удовлетворяющими условию

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{\ell_i} > 0,$$

$\mathcal{D}^{\nu} f = \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}} f$, и для почти всех $x \in G$ справедливо следующее интегральное представление (см. [5]) :

$$\mathcal{D}^{\nu} f(x) = h^{-|\lambda| - (\nu, \lambda)} \int_{E^n} f(y)\, \Omega_0((y-x):h^{\lambda})\, dy + \tag{23}$$

$$+ \int_0^h \sum_{i=1}^{n} v^{-|\lambda| - (\nu, \lambda)} dv \int_{E^n} \mathcal{D}_i^{\ell_i} f(y)\, \Omega_i((y-x):v^{\lambda})\, dy,$$

$$(\nu, \lambda) = \sum_1^n \nu_i \lambda_i, \quad 0 < h \le H.$$

Функции $\Omega_i(x) \in C_0^{\infty}(E^n)$ и сосредоточены в некотором кубе $\subset \{x : |x_i| \le 1 \quad i = 1, \dots, n\}$. Их носители берутся такими, что фактическое интегрирование в правой части (23) проводится внутри наперед заданного рога $V(\ell, h)$. Таким образом в представлении (23) участвуют значения функции f и ее производных $\mathcal{D}_i^{\ell_i} f$ в точках рога $x + V(\ell, h)$.

В дальнейшем мы будем считать, что приведенное представление справедливо в каждой точке $x \in G$. Принимая это, мы, возможно, лишь заменяем функцию f на эквивалентную ей функцию. Далее заметим, что для точек x, принадлежащих разным подобластям G_τ (см. определение класса $A(\ell, H)$), функции $\Omega_i(x)$, вообще говоря, разные, однако для всех x, принадлежащих одной и той же подобласти G_τ (τ фиксировано), они одни и те же.

Введем следующие обозначения:

$$f_G(x) = \begin{cases} f(x) & x \in G \\ 0 & x \in E^n \setminus G, \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_i^{\bar{\ell}_i} f_G(x) = \begin{cases} \mathcal{D}_i^{\bar{\ell}_i} f(x) & x \in G \\ 0 & x \in E^n \setminus G. \end{cases}$$

Обозначим через $\chi_K(x)$ характеристическую функцию куба: $|x_i| \le K$ $(i=1,\dots,n)$.

Из (23) очевидным образом получается следующая оценка, справедливая для всех $x \in G$:

$$|\mathcal{D}^\nu f(x)| \le C_0 h^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)} \int_{E^n} |f_G(y)|\, \chi_1((y-x):h^\lambda)\, dy + \tag{24}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} C_i \int_0^h v^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)} dv \int_{E^n} |\mathcal{D}_i^{\ell_i} f_G(y)|\, \chi_1((y-x):v^\lambda)\, dy,$$

где C_i – константы, не зависящие от f и h. Нам понадобится еще одна оценка, вытекающая из (23).

Пусть $G_{\tau,\delta}$ – подобласть области G, фигурирующая в определении класса $A(\ell, H)$ областей G. Пусть, далее, $x \in G_{\tau,\delta}$, τ – действительное число, $|\tau| \le \min\left(\frac{\delta}{2}, h^{\lambda_K}\right)$, K – натуральное число, $1 \le K \le n$. Если отрезок $[x, x+2\tau e_K] \subset G$, то он содержится также в G_τ. Поэтому для всех точек этого отрезка справедливо тождество (23) с одними и теми же функциями Ω_i. При этих условиях из (23) легко выводится следующая оценка (см. [6]):

$$|\Delta_K^2(\tau)\mathcal{D}^\nu f(x)| \le \bar{C}_0 |\tau|^2 h^{-\varkappa_K} \int_{E^n} |f_G(y)|\, \chi_2((y-x):h^\lambda)\, dy +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{2} \bar{C}_m \int_0^{|\tau|^{\frac{1}{\lambda_K}}} v^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)} dv \int_{E^n} |\mathcal{D}_i^{\ell_i} f_G(y)|\, \chi_1((y-[x+m\tau e_K]):v^\lambda)\, dy +$$

$$+\bar{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} |\tau|^2 \int_{|\tau|^{\frac{1}{\lambda_K}}}^{h} v^{-\varkappa_K} dv \int_{E^n} |\mathcal{D}_i^{\ell_i} f_G(y)|\, \chi_2((y-x):v^\lambda)\, dy, \tag{25}$$

где $\varkappa_K = |\lambda| + (\nu,\lambda) + 2\lambda_K$, $\bar{C}_0$, $\bar{C}$ и C_m – константы, не зависящие от f, τ и h.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 2. Пусть $1 \le m \le n$, $p=(p_1,\dots,p_n)$ и $q=(q_1,\dots,q_n)$ удовлетворяют условию (A_m), вектор p удовлетворяет условию (B_m) и, кроме того,

$$1 < p_m < q_m \le \infty. \tag{26}$$

Пусть, далее, $p_m \le \sigma \le \infty$, $f \in W_p^{\ell}(G)$, $G \in A(\ell,H)$, $s=(s_1,\dots,s_n)$, $s_i \ge 0$ – целые $(i=1,\dots,n)$,

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell_i}\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} + s_i\right) > 0, \tag{27}$$

$$\varrho = (\varrho_1,\dots,\varrho_n), \quad \varrho_k = \varepsilon \ell_k \quad (k=1,\dots,n).$$

Тогда $D^s f \in B^{\varrho}_{(\bar{q},\bar{q},\sigma)}(G)$ и имеет место неравенство:

$$\| D^s f \|_{B^{\varrho}_{(\bar{q},\bar{q},\sigma)}(G)} \le C \| f \|_{W_p^{\ell}(G)}, \tag{28}$$

где C – константа, не зависящая от f.

Доказательство. Пусть ϱ_k определены как в формулировке теоремы. Положим $\varrho_k = \bar{\varrho}_k + \alpha_k$, где $\bar{\varrho}_k$ – целое, $0 < \alpha_k \le 1$ $(k=1,\dots,n)$. Нам необходимо доказать, что

$$\| D^s f \|_{(\bar{q},\bar{q}),G} + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_k \le C \| f \|_{W_p^{\ell}(G)}, \tag{29}$$

где

$$\mathcal{L}_k = \left\{ \int_0^{\infty} \| \Delta_k^2(\tau,G) D^{s+\bar{\varrho}_k e_k} f \|^{\sigma}_{(\bar{q},\bar{q})} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha_k \sigma}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{30}$$

Из неравенства (27) и условия (A_m) на векторы p и q следует, что

$$1-\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{\ell_i}>0.$$

Поэтому, как отмечалось выше, существует $D^s f$ в G и для нее справедлива оценка вида (24), в которой нужно наложить $\nu=s$. Из (24) на основании неравенств Минковского вытекает, что

$$\|D^s f\|_{(\bar{q},\bar{q}),G}\leq C_0 h^{-|\lambda|-(s,\lambda)}\Big\|\int_{E^n}|f_G(y)|\chi_1((y-x):h^{\lambda})dy\Big\|_{(\bar{q},\bar{q})}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}C_i\int_0^h v^{-|\lambda|-(s,\lambda)}dv\,\Big\|\int_{E^n}|D_i^{\ell_i}f(y)|\chi_1((y-x):v^{\lambda})dy\Big\|_{(\bar{q},\bar{q})}.$$

Пусть

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}\left(1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right).$$

Применяя для оценки норм, стоящих в правой части, неравенство (I4) и замечая, что

$$-|\lambda|-(s,\lambda)+\mu=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}(1+s_i)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}\left(1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right)=\varepsilon-1,$$

получим

$$\|D^s f\|_{(\bar{q},\bar{q}),G}\leq\tilde{C}_1 h^{\varepsilon-1}\|f\|_{p,G}+\tilde{C}_2 h^{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\|D_i^{\ell_i}f\|_{p,G}, \qquad (31)$$

Оценим теперь $\mathcal{L}_K$. Положим $s+\bar{\varrho}_K e_K=\nu=(s_1,\dots,s_K+\bar{\varrho}_K,\dots,s_n)$.

Пусть $\{G_{\tau,\delta}\}_{\tau=1}^{\tau_0}$ – совокупность подобластей области G, введенных при определении класса $A(\ell,H)$. Тогда

$$\mathcal{L}_\kappa \le \left\{ \int_0^{\frac{\delta}{2}} \|\Delta_\kappa^2(\tau,G)\mathcal{D}^\nu f\|^\sigma_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha_\kappa\sigma}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} +$$

$$+\left\{ \int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \|\Delta_\kappa^2(\tau,G)\mathcal{D}^\nu f\|^\sigma_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha_\kappa\sigma}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} \le$$

$$\le \sum_{\tau=1}^{\tau_0} \left\{ \int_0^{\frac{\delta}{2}} \|\Delta_\kappa^2(\tau,G)\mathcal{D}^\nu f\|^\sigma_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G_{\tau,\delta}} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha_\kappa\sigma}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} + \tag{32}$$

$$+C(\delta)\|\mathcal{D}^\nu f\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G} = \sum_{\tau=1}^{\tau_0} \mathcal{L}_{\kappa,\tau} + C(\delta)\|\mathcal{D}^\nu f\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G}.$$

Существование $\mathcal{D}^\nu f$ и оценка для $\|\mathcal{D}^\nu f\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G}$ устанавливаются так же как существование $\mathcal{D}^s f$ и оценка для $\|\mathcal{D}^s f\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G}$ Для этого достаточно заметить, что

$$\varepsilon_\kappa = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell_i}\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} + \nu_i\right) = \varepsilon - \frac{\bar{\rho}_\kappa}{\ell_\kappa} = \frac{\alpha_\kappa}{\ell_\kappa} > 0.$$

Аналогично (31) имеем

$$\|\mathcal{D}^\nu f\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q}),G} \le \tilde{C}_3 h^{\varepsilon_\kappa - 1}\|f\|_{p,G} + \tilde{C}_4 h^{\varepsilon_\kappa} \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{D}_i^{\ell_i} f\|_{p,G}. \tag{33}$$

Оценим теперь $\mathcal{L}_{\kappa,\tau}$. Прежде всего отметим, что если $x \in G_{\tau,\delta}$, $|\tau| < \frac{\delta}{2}$ и отрезок $[x, x+2\tau e_\kappa] \subset G$, то $[x, x+2\tau e_\kappa] \subset G_\tau$. Поэтому для $|\Delta_\kappa^2(\tau,G)\mathcal{D}^\nu f|$ справедлива оценка (25), где $\lambda_i = \frac{1}{\ell_i}$ $(i = 1,\dots,n)$. На основании этого неравенства имеем

$$\mathcal{L}_{\kappa,\tau} \le \bar{C}_0 h^{-\varkappa_\kappa}\left[\int_0^{\frac{\delta}{2}} \tau^{-1+(2-\alpha_\kappa)\sigma} d\tau \left\| \int_{E^n} |f_G(y)|\, \chi_2((y-x):h^\lambda)\, dy \right\|^\sigma_{(\bar{\bar{q}},\bar{q})}\right]^{\frac{1}{\sigma}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i \Big\| \Big(\tau^{-\frac{1}{\sigma}-\alpha_k}\int_0^{\tau^{\frac{1}{\lambda_k}}} v^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)}\,dv+\tau^{-\frac{1}{\sigma}+(2-\alpha_k)}\int_{\tau^{\frac{1}{\lambda_k}}}^{\infty} v^{-\varkappa_k}\,dv\Big)\times$$

$$\times\int_{E^n}\left|D_i^{\ell_i} f_G(y)\right| \chi_2\left((y-x):v^{\lambda}\right)dy\,\Big\|_{(\bar{\bar{q}},\bar{q},\sigma)}= \qquad (34)$$

$$=M_0+\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i M_i,$$

где $\varkappa_k=|\lambda|+(\nu,\lambda)+2\lambda_k$.

Норма, стоящая в M_0, оценивается с помощью неравенства (I4). Применяя это неравенство, получим

$$M_0\le C(h)\|f\|_{p,G}\Big[\int_0^{\frac{\delta}{2}}\tau^{-1+(2-\alpha_k)\sigma}d\tau\Big]^{\frac{1}{\sigma}}\le C(h,\delta)\|f\|_{p,G}. \qquad (35)$$

Для оценки M_i заметим, что

$$|\lambda|+(\nu,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}(1+\nu_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}\left(1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right)-\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}+\nu_i\right)\right]+$$

$$+1=\mu-\varepsilon_k+1=\mu-\frac{\alpha_k}{\ell_k}+1=\mu-\alpha_k\lambda_k+1,$$

где μ и ε_k определены выше.

Поэтому

$$v^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)}\tau^{-\frac{1}{\sigma}-\alpha_k}=v^{-\mu+\alpha_k\lambda_k-1}\tau^{-\frac{1}{\sigma}-\alpha_k}=$$

$$=v^{-1}\Big(v^{-\mu-\alpha_k\lambda_k}\tau^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha_k}\Big[\frac{v^{\lambda_k}}{\tau}\Big]_1^{2\alpha_k}\Big)=v^{-1}H_1(v,\tau)$$

при $v^{\lambda_k} \le \tau$,

$$v^{-\varkappa_k} \tau^{-\frac{1}{\sigma}+(2-\alpha_k)} = v^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)-2\lambda_k} \tau^{-\frac{1}{\sigma}+(2-\alpha_k)} =$$

$$= v^{-1}\left(v^{-\mu-(2-\alpha_k)\lambda_k} \tau^{-\frac{1}{\sigma}+(2-\alpha_k)}\right) =$$

$$= v^{-1}\left(v^{-\mu-\gamma_k\lambda_k} \tau^{-\frac{1}{\sigma}+\gamma_k} \left[\frac{v^{\lambda_k}}{\tau}\right]_1^{2\gamma_k}\right) = v^{-1} H_2(v,\tau), \quad \gamma_k = 2-\alpha_k,$$

при $v^{\lambda_k} > \tau$, где

$$[a]_1 = \min\{a, 1\}.$$

Таким образом,

$$M_i \le \left\| \int_0^\infty \left(H_1(v,\tau)+H_2(v,\tau)\right) v^{-1} dv \int_{E^n} \left| D_i^{\ell_i} f_G(y) \right| \chi_2\left((y-x):v^{\lambda}\right) dy \right\|_{(\bar{q},\bar{p},\sigma)}$$

Применяя теперь теорему I (неравенство (I7)), будем иметь

$$M_i \le \tilde{C} \| D_i^{\ell_i} f \|_{p,G}. \tag{36}$$

Сопоставляя неравенства (32)-(36), получаем

$$\mathcal{L}_k \le C(h,\delta) \| f \|_{W_p^{\ell}(G)}. \tag{37}$$

Наконец, из неравенств (3I) и (37) вытекает оценка (29). Теорема доказана.

Как уже отмечалось в начале статьи, теорема в некотором смысле обратная к теореме 2, была получена в работе [2]. Ее доказательство существенно использует неравенство (7) из леммы 4.

ЛИТЕРАТУРА

I. Г.Г.Харди, Д.Е.Литтльвуд, Г.Полиа. Неравенства, Г.И.И.Л., М., I948.

2. О.В.Бесов, В.П.Ильин. Теорема вложения для предельного показателя, Матем. заметки, 1969, 6, № 2, 129-138.

3. В.П.Ильин. Об одном интегральном неравенстве, Матем. заметки, 1969, 6, № 2, 139-148.

4. О.В.Бесов. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения, ДАН СССР, 1959, 126, № 5, 1163-1165.

5. О.В.Бесов, В.П.Ильин. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения, Мат.сборник, 1968, 75 (117), № 4, 483-495.

6. В.П.Ильин. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области, Труды МИАН, 1962, 66, 227-363.