А. В. Покровский, Об общих системах и системах с множеством состояний, *Автомат. и телемех.*, 1980, выпуск 8, 179–182

УДК 62-50

ОБ ОБЩИХ СИСТЕМАХ И СИСТЕМАХ С МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

А. В. ПОКРОВСКИЙ

(Москва)

Выделяются классы общих систем, которые можно в естественном смысле согласовать с системами с пространством состояний.

1. Под системой (см., например, [1]) понимается математический объект, предназначенный для описания зависимостей между входом и выходом некоторого преобразователя. Через U обозначается класс допустимых входов. Общая система S — это многозначный оператор, сопоставляющий входу $u\in U$ множество Su выходов. Система Γ с множеством состояний — это совокупность зависящих от некоторого параметра $a\in A$ однозначных операторов $\Gamma[a]$, определенных на U. Каждое значение параметра a трактуется как внутреннее состояние изучаемого преобразователя. Система Γ с множеством состояний называется согласованной с общей системой S, если при каждом $u\in U$ множество Su совпадает с множеством $\Gamma[a]u\,(u\in U)$.

Как известно, с каждой общей системой согласована некоторая система с множеством состояний. Поэтому возникает естественный соблазн трактовать общие системы как «недоразвитые» системы с множеством состояний. Такая точка зрения была бы особо важной, если бы соответствующие однозначные операторы $\Gamma[a]$ наследовали различные специальные свойства многозначного оператора S. К сожалению, даже во внешне простых ситуациях может не существовать ни одного однозначного оператора P, согласованного с общей системой S (т. е. удовлетворяющего соотношению $Pu\in Su\,(u\in U)$) и сохраняющего специальные свойства системы S. Настоящая работа посвящена построению соответствующих примеров и выделению классов общих систем, для которых существуют системы с множеством состояний, наследующие некоторые важные их свойства.

2. Пусть все входы $u=u(t)\in U$ и выходы $x=x(t)$ являются функциями скалярного времени t, определенными на одном и том же множестве T, имеющем минимальный элемент t_0. Общую систему S называют неупреждающей, если при каждом $\tau\in T$ из

$$(1)\qquad u(t),\, v(t)\in U,\; u(t)=v(t)\quad (t\in T,\; t\leqslant\tau)$$

вытекает, что для каждой функции $x(t)\in Su(t)$ найдется функция $y(t)\in Sv(t)$, удовлетворяющая равенству $y(t)=x(t)$ $(t\in T,\; t\leqslant\tau)$. Однозначный оператор P называют неупреждающим, если из (1) следует равенство $Pu(t)=Pv(t)$ $(t\in T,\; t\leqslant\tau)$. Свойство неупреждаемости, или, как иногда говорят, свойство причинности, часто предъявляется как категорическое требование к математическим моделям реальных преобразователей.

Теорема 1. Пусть множество T бесконечно. Тогда существует неупреждающая общая система S, с которой не согласован ни один неупреждающий однозначный **оператор P.**

Доказательство излагается в приложении. Оно неконструктивно; был бы интересен эффективный пример.

Опишем теперь класс неупреждающих общих систем, с каждой из которых согласована неупреждающая система с множеством состояний. Этот класс содержит наиболее важные общие системы. Пусть S — некоторая общая система, а σ — действительное число или $+\infty$. Функцию $x(t)$ $(t\in T)$ назовем σ-допустимой, если она совпадает на множестве $\{t\in T:t\leqslant\sigma\}$ с функцией $y(t)$ из некоторого множества $Su(t)$ $(u(t)\in U)$. Систему S назовем индуктивной, если из σ_n-допустимости при всех $n=1, 2, \ldots$ функций $x(t)$ вытекает ее σ_*-допустимость при $\sigma_*=\sup\sigma_n$.

Теорема 2. Пусть неупреждающая общая система S является индуктивной. Тогда с системой S согласована некоторая неупреждающая система с множеством состояний.

Для доказательства достаточно по стандартной схеме применить лемму Цорна.

3. Будем теперь считать, что множество U лежит в банаховом пространстве E, полуупорядоченном (см. [2]) конусом K_E, а выходы x являются элементами банахова пространства F, полуупорядоченного конусом K_F (например, E и F являются функциональными пространствами с конусами неотрицательных функций). Полуупорядоченность в пространстве F естественным образом индуцирует полуупорядоченность совокупности всех его подмножеств. Говорят, что множество C мажорирует множество D, и пишут $C\geqslant D$, если любому $x\in C$ отвечает $y\in D$, удовлетворяющий неравенству $x\geqslant y$, и, наоборот, любому $y\in D$ отвечает $x\in C$, удовлетворяющий неравенству $x\geqslant y$.

Общая система S называется монотонной, если из $u\leqslant v$ $(u, v\in U)$ следует соотношение $Su\geqslant Sv$. Система Γ с множеством состояний A называется монотонной, если монотонен каждый из операторов $\Gamma[a]$ $(a\in A)$. К классу монотонных относятся многие конкретные системы.

Даже в случае, когда $E=F=R^1$, существуют монотонные общие системы, с которыми не согласован ни один монотонный оператор. В качестве примера достаточно рассмотреть общую систему, сопоставляющую каждому рациональному входу совокупность всех иррациональных выходов, а каждому иррациональному входу — совокупность всех рациональных выходов.

Теорема 3. Пусть S_0 — монотонная общая система с компактными значениями $S_0u\,(u\in U)$. Пусть множество U линейно упорядочено (т. е. любые два его элемента сравнимы). Тогда существует монотонная система Γ с множеством состояний, согласованная с S_0.

Доказательство приводится в приложении.

Очевидно следующее утверждение, «двойственное» теореме 3: пусть общая система S монотонна и каждое множество $Su\,(u\in U)$ линейно упорядочено и компактно; тогда существует монотонная система с множеством состояний, согласованная с системой S. Это утверждение, как и теорема 3, полезно при исследовании общих систем, порожденных многозначным оператором суперпозиции.

К сожалению, уже в случае $E=F=R^2$ для монотонной общей системы с компактными образами может не существовать согласованного с ней монотонного оператора. Приведем пример. Пусть множество U состоит из следующих семи точек плоскости R^2, полуупорядоченной конусом векторов с неотрицательными компонентами:

$$u_0=(0,0),\ u_1=(0,1),\ u_2=(1,0),\ u_3=(1,1),\ u_4=(0,-1),\ u_5=(-1,0),\ u_6=(-1,-1). \tag{2}$$

Пусть каждому входу u_i $(i=0, 1, \ldots, 6)$ отвечает множество выходов $X_i=Su_i$, которое состоит из двух точек и определяется соотношениями

$$(3)\qquad X_i=\begin{cases}\{u_i\pm({}^1/_2,{}^1/_2)\}, & \text{если } i=0,1,2,4,5,\\ \{u_i\pm({}^1/_2,-{}^1/_2)\}, & \text{если } i=3,6.\end{cases}$$

Система, описанная равенствами (2) и (3), монотонна, но с ней не согласован ни один монотонный оператор.

Отметим еще несколько утверждений о монотонных операторах, согласованных с монотонными общими системами.

Пусть сначала $F=R^2$. Пусть S — монотонная общая система с компактными и выпуклыми образами $Su(u\in U)$. Тогда существует монотонный оператор P, согласованный с S. Этот оператор можно задать равенством

$$(4)\qquad Pu={}^1/_2(\inf_{x\in Su}x+\sup_{y\in Su}y).$$

Однако согласованной с S системы Γ с множеством состояний может в этом случае не существовать. Например, если S — это общая система, сопоставляющая каждой из точек (2) отрезок с концами, заданными формулой (3), то оператор (4) является единственным монотонным оператором, согласованным с системой S.

Немного усложнив последний пример, можно построить монотонную общую систему S, для которой множества Su являются выпуклыми компактными подмножествами пространства R^3 с обычным конусом, но с которой не согласован ни один монотонный однозначный оператор.

Автор благодарен М. А. Красносельскому и Л. И. Розоноэру за обсуждение работы и ряд полезных советов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Обозначим через U совокупность определенных на T функций, принимающих значения 0 и 1, а через G — совокупность всех действующих из U в U неупреждающих операторов P. Так как множества U и G имеют одинаковую мощность, то можно установить взаимно-однозначное соответствие между их элементами. Функцию, отвечающую оператору $P\in G$, обозначим через $u_P(t)$, а оператор, отвечающий функции $u(t)\in U$, через $P_{u(t)}$. Введем в рассмотрение общую систему S_0, сопоставляющую функции $u(t)\in U$ совокупность всех функций из U, за исключением функции $P_{u(t)}u(t)$. Система S_0, очевидно, неупреждающая. С другой стороны, любой неупреждающий оператор P удовлетворяет соотношению $Pu_P(t)\in\in S_0u_P(t)$ и, следовательно, не согласован с системой S_0.

Приведенное доказательство теоремы 1 является по существу вариантом канторовского диагонального процесса.

Доказательство теоремы 3. Нам понадобится одно вспомогательное утверждение. Пусть S — некоторая монотонная общая система с компактными образами. Пусть u_* — произвольный элемент из U, а x_* — произвольный элемент множества Su_*.

Лемма. Существует монотонная общая система S_*, удовлетворяющая соотношениям $S_*u\subset Su$ $(u\in U)$, $S_*u_*=\{x_*\}$.

Доказательство. Пусть u — некоторый элемент из U. Пусть n — натуральное число, а $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — последовательность элементов из U, удовлетворяющих соотношениям $v_0=u_*\leqslant v_1\leqslant\ldots\leqslant v_n=u$ в случае $u\geqslant u_*$ и соотношениям $v_0=u_*\geqslant v_1\geqslant\ldots\geqslant v_n=u$ в случае $u\leqslant u_*$. Через $Y(n, v_0, \ldots, v_n)$ обозначим совокупность элементов y, для которых существует последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_n\in F$, удовлетворяющая при $u_*\leqslant u$ соотношениям $y_0=x_*\leqslant y_1\leqslant\ldots\leqslant y_n=y$, $y_i\in Sv_i$, а при $u_*\geqslant u$ — соотношениям $y_0==x_*\geqslant y_1\geqslant\ldots\geqslant y_n=y$, $y_i\in Sv_i$.

Каждое множество $Y(n, v_0, \ldots, v_n)$ компактно. Кроме того, при фиксированном u система множеств $Y(n, v_0, \ldots, v_n)$ центрирована. Поэтому она имеет непустое пересечение S_*u. Соответствие $u\to S_*u$ определяет общую систему, обладающую требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Пусть u_0 — произвольный элемент из U, а x_0 — произвольный элемент из множества S_0u_0. Для доказательства теоремы 3 достаточно построить монотонный оператор P_0, согласованный с системой S_0 и удовлетворяющий соотношению $P_0u_0=x_0$. В силу леммы существует монотонная общая система S_1, удовлетворяющая соотношениям $S_1u\subset S_0u$ $(u\in U)$, $S_1u_0=\{x_0\}$. Рассмотрим совокупность H всех общих систем, для которых множества Su $(u\in U)$ выпуклы, замкнуты и удовлетворяют включению $Su\subset S_1u$ $(u\in U)$. Частично упорядочим это множество по включению. Тогда (так как все множества $Su\,(S\in H,\ u\in U)$ компактны) каждое линейно упорядоченное подмножество H имеет точную нижнюю грань. В силу леммы Цорна совокупность H имеет минимальный элемент S_2. По доказанной выше лемме каждое множество $S_2u\,(u\in U)$ содержит один элемент. Если обозначить этот элемент через P_0u, то оператор P_0 будет обладать всеми нужными свойствами. Теорема доказана.

Поступила в редакцию
3 октября 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Мессарович М., Такахара Я.* Общая теория систем. «Мир», 1978.
2. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.

ON GENERAL SYSTEMS AND SYSTEMS WITH A SET OF STATES

A. V. POKROVSKIY

Classes of general systems are indicated which can be naturaly made consistent with systems having a state space.
