



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Полосуев, Об одной задаче равномерного распределения системы функций, *Докл. АН СССР*, 1958, том 122, номер 3, 346–348

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

20 марта 2025 г., 15:24:37



А. М. ПОЛОСУЕВ

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 V 1958)

В настоящей статье методом Н. М. Коробова обобщаются многомерные задачи равномерного распределения систем функций, являющихся произведением показательной функции на многочлен, которые рассмотрены им в работе (1). В основе доказательства сформулированной ниже теоремы лежит лемма, являющаяся аналогом основной леммы работы (1).

Пусть даны s конечноразностных уравнений:

$$\psi_\nu(x) = a_1^{(\nu)} \psi_\nu(x-1) + \dots + a_{n_\nu}^{(\nu)} \psi_\nu(x-n_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

с целыми коэффициентами; $a_{n_\nu}^{(\nu)} \neq 0$, $n_\nu \geq 1$ для каждого ν . Выберем s простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ таких, что

$$p_1 > \max_{1 \leq \nu \leq s} |a_{n_\nu}^{(\nu)}|.$$

Зададим начальные данные функции $\psi_\nu(x)$, положив $\psi_\nu(j) = \delta_j^{(\nu)}$, где $\delta_j^{(\nu)}$ — целое число и $0 \leq \delta_j^{(\nu)} \leq p_\nu - 1$, $j = 1, 2, \dots, n_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, s$, причем хотя бы одно из чисел $\delta_1^{(\nu)}, \dots, \delta_{n_\nu}^{(\nu)}$ отлично от нуля для каждого ν . Обозначим через $\lambda_{\nu 1}, \dots, \lambda_{\nu n_\nu}$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^{n_\nu} = a_1^{(\nu)} \lambda^{n_\nu-1} + \dots + a_{n_\nu}^{(\nu)}$$

конечноразностного уравнения (1).

Будем предполагать, что для каждого ν корни $\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \dots, \lambda_{\nu n_\nu}$ различны и что для величин $\lambda_\nu = \lambda_{\nu 1}$ и $\theta_\nu = \max_{2 \leq j \leq n_\nu} |\lambda_{\nu j}|$ выполняются неравенства

$$\lambda_\nu > 1, \theta_\nu < 1 \quad \text{при } \nu = 1, 2, \dots, s.$$

Таким образом, при $n_\nu = 1$ λ_ν — целое число; при $n_\nu \geq 2$ λ_ν — число Пизо.

Введем следующие обозначения:

1) τ_ν — любое целое число, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\nu(x + \tau_\nu) \equiv \psi_\nu(x) \pmod{p_\nu}, \quad \tau_\nu \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, s.$$

(Такое τ_ν всегда можно найти согласно лемме 1 работы (1).)

2) $f_\nu(x) = b_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} x + \dots + b_{k_\nu}^{(\nu)} x^{k_\nu}$ — целочисленный многочлен степени k_ν , не равный тождественно нулю по $\text{mod } p_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, s$.

Согласно лемме 2 работы (1) выберем начальные значения функции $\psi_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \dots, s$, так, чтобы сравнение

$$\psi_\nu(z) \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \quad z = 1, 2, \dots, \tau_\nu,$$

имело не более τ_ν/p_ν решений.

При таких соглашениях и обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма. При любых целых $a \geq 0$, $r \geq 1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{r p_1 \dots p_s \tau_1 \dots \tau_s} \exp 2\pi i \sum_{\nu=1}^s \frac{\psi_\nu(x) f_\nu(a+x)}{p_\nu (\lambda_\nu^{\tau_1 \dots \tau_s} - 1)} = \\ & = O(r p_1 \dots p_{s-1} \tau_1 \dots \tau_s + r p_1 \dots p_s \ln(a + r \tau_1 \dots \tau_s)), \end{aligned}$$

где входящая в символ O постоянная зависит от величин $a_1^{(1)}, \dots, a_{n_s}^{(s)}$, $b_0^{(1)}, \dots, b_{k_s}^{(s)}$, n_1, \dots, n_s , s .

Пусть теперь дана бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, рост которых ограничен требованием

$$p_{\nu+1} = O(p_\nu).$$

Обозначим через $\tau_{j1} < \tau_{j2} < \dots$ положительные целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \psi_{j\nu}(x + \tau_{j\nu}) & \equiv \psi_{j\nu}(x) \pmod{p_\nu}, \quad \tau_{j\nu} \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \\ j & = 1, 2, \dots, s, \quad \nu = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\psi_{j\nu}(x)$ — решение конечноразностного уравнения

$$\psi(x) = a_1^{(j)} \psi(x-1) + \dots + a_{n_j}^{(j)} \psi(x-n_j), \quad n_j \geq 1, \quad p_1 > \max_{1 \leq j \leq s} |a_{n_j}^{(j)}|,$$

обладающего тем свойством, что число решений сравнения

$$\psi_{j\nu}(z) \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \quad z = 1, 2, \dots, \tau_{j\nu},$$

не превосходит $\tau_{j\nu}/p_\nu$.

Потребуем, кроме того, чтобы имела место оценка

$$\ln(\tau_{1(v+1)} \dots \tau_{s(v+s)}) = o(\tau_{1v} \dots \tau_{s(v+s-1)}).$$

Пусть, далее, $t_1 < t_2 < \dots$ — произвольные целые числа такие, что

$$t_\nu \geq \tau_{1(v+1)} \dots \tau_{s(v+s)}, \quad \ln t_\nu = O(\ln(\tau_{1(v+1)} \dots \tau_{s(v+s)}));$$

целые n_1, n_2, \dots определены соотношением

$$n_{\nu+1} = n_\nu + t_\nu p_\nu \dots p_{\nu+s-1} \tau_{1\nu} \dots \tau_{s(\nu+s-1)}, \quad n_1 = 0;$$

$\varphi(\nu) = o(p_\nu)$ — любая целочисленная функция, отличная от нуля при достаточно больших значениях аргумента.

Считаем, что $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn_j}$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^{n_j} = a_1^{(j)} \lambda^{n_j-1} + \dots + a_{n_j}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

что все они различны и

$$\lambda_j = \lambda_{j1} > 1, \quad \theta_j = \max_{1 \leq k \leq n_j} |\lambda_{jk}| < 1.$$

Как и в работе (1), легко видеть, что

$$\Psi_{j(v+j-1)}(x) = \gamma_{j(v+j-1)} \lambda_j^x + O(p_{v+j-1} \theta_j^x), \quad \gamma_{j(v+j-1)} = O(p_{v+j-1}), \\ j = 1, 2, \dots, s, \quad v = 1, 2, \dots$$

Определим числа α_j рядом

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(i) \gamma_{j(v+j-1)}}{p_{i+j-1} (\lambda_j^{\tau_1 i \dots \tau_s (i+s-1)} - 1)} \left(\frac{1}{\lambda_j^{n_i}} - \frac{1}{\lambda_j^{n_i+1}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Теорема. Пусть $f_1(x), \dots, f_s(x)$ — целочисленные многочлены, не равные тождественно нулю. Тогда система функции

$$\alpha_1 \lambda_1^x f_1(x), \dots, \alpha_s \lambda_s^x f_s(x)$$

равномерно распределена в s -мерном пространстве.

Московский
энергетический институт

Поступило
19 V 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. М. К о р о б о в, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 5 (1953).