П. Е. Марков, Бесконечно малые изгибания некоторых многомерных поверхностей, *Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 3, 469–479

https://www.mathnet.ru/mzm6531

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

П. Е. Марков

В работе [1] доказано, что всякая невырожденная n-мерная поверхность $(n(n+3)/2+1)$-мерного евклидова пространства является нежесткой в этом пространстве. С другой стороны, в работах [2] — [6] установлен ряд признаков жесткости гиперповерхностей в евклидовом и римановом пространствах. В настоящей заметке мы покажем, что случаи жесткости возможны и для n-мерных поверхностей и m-мерном плоском (евклидовом или псевдоевклидовом) пространстве при $n+1<m<n(n+3)/2+1$. При этом мы ограничимся рассмотрением поверхностей, представимых в виде риманова произведения конечного числа гиперповерхностей плоских пространств.

§ 1. **Формулировка результата.** 1. Рассмотрим в плоском m-мерном пространстве S_m n-мерную поверхность F_n $(1 \leqslant n < m)$ класса C^3, заданную уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, \ldots, x^n)$. Будем считать, что дискриминант метрической формы $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ этой поверхности отличен от нуля. Предположим, что начиная с некоторого момента времени $t = 0$ поверхность F_n деформируется, переходя при $t \geqslant 0$ в поверхность F_n^t, задаваемую уравнением $\boldsymbol{r}^t = \boldsymbol{r}^t(x^1, \ldots, x^n)$ $(\boldsymbol{r}^0 \equiv \boldsymbol{r})$. Каждая величина A на F_n перейдет при этом в некоторую величину A^t на F_n^t. Величину $\delta A \equiv (dA^t/dt)_{t=0}$ называют вариацией величины A. Мы будем рассматривать только такие деформации, при которых вариация длины каждой дуги на F_n равна нулю. В этом случае поле $\delta\boldsymbol{r}$ называется изгибающим полем поверхности F_n. По изгибающему полю деформация поверхности F_n определяется с точностью до членов второго порядка относительно t формулой $\boldsymbol{r}^t = \boldsymbol{r} + t\delta\boldsymbol{r} + t^2\boldsymbol{z}$.

Будем называть две деформации поверхности F_n эквивалентными, если изгибающие поля, соответствующие этим деформациям, совпадают. Класс эквивалентных деформаций называется бесконечно малым (б. м.) изгибанием поверхности F_n в пространстве S_m. Б. м. изгибание F_n в S_m называется тривиальным, если соответствующее изгибающее поле имеет вид $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — произвольный постоянный бивектор в S_m, $\boldsymbol{\omega}$ — произвольный постоянный вектор, а $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}$ — внутреннее произведение бивектора $\boldsymbol{\Omega}$ на вектор $\boldsymbol{r}$ [7, стр. 15]. Аналогичное определение тривиального б. м. изгибания приведено в [1]. Поверхность F_n называют жесткой в S_m, если каждое ее б. м. изгибание тривиально.

2. Пусть $S^{(1)}_{n_1+1}$ и $S^{(2)}_{n_2+1}$ — плоские пространства размерностей n_1+1 и n_2+1 соответственно. В прямом произведении $S^{(1)}_{n_1+1} \times S^{(2)}_{n_2+1}$ введем ортонормированную систему координат $Oy^1 \ldots y^{n_1+n_2+2}$ так, чтобы оси Oy^{α_1} ($\alpha_1 = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n_1+1$) принадлежали пространству $S^{(1)}_{n_1+1}$, а оси $Oy^{n_1+1+\alpha_2}$ ($\alpha_2 = 1, 2, \ldots, n_2+1$) — пространству $S^{(2)}_{n_2+1}$. Рассмотрим в $S^{(1)}_{n_1+1}$ и $S^{(2)}_{n_2+1}$ гиперповерхности $F^{(1)}_{n_1}$ и $F^{(2)}_{n_2}$, заданные соответственно уравнениями

$$y^{\alpha_1} = y^{\alpha_1}(x^1, \ldots, x^{n_1}), \qquad \alpha_1 = 1, 2, \ldots, n_1+1, \tag{1}$$

$$y^{n_1+1+\alpha_2} = y^{n_1+1+\alpha_2}(x^{n_1+1}, \ldots, x^{n_1+n_2}), \quad \alpha_2 = 1, 2, \ldots, n_2+1. \tag{2}$$

Римановым произведением поверхностей $F^{(1)}_{n_1}$ и $F^{(2)}_{n_2}$ называется (n_1+n_2)-мерная поверхность $F^{(1)}_{n_1} \times F^{(2)}_{n_2}$ пространства $S^{(1)}_{n_1+1} \times S^{(2)}_{n_2+1}$, заданная в этом пространстве уравнениями (1), (2).

Если $S^{(\tau)}_{n_\tau+1}$ ($\tau = 1, 2, \ldots, p$) — плоские пространства размерностей $n_\tau+1$ и $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ — гиперповерхность в $S^{(\tau)}_{n_\tau+1}$, то риманово произведение поверхностей $F^{(1)}_{n_1}, F^{(2)}_{n_2}, \ldots, F^{(p)}_{n_p}$ определяется формулой

$$F^{(1)}_{n_1} \times F^{(2)}_{n_2} \times \ldots \times F^{(p)}_{n_p} = (F^{(1)}_{n_1} \times F^{(2)}_{n_2} \times \ldots \times F^{(p-1)}_{n_{p-1}}) \times F^{(p)}_{n_p}.$$

Относительно каждой из поверхностей $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ ($\tau = 1, 2, \ldots, p$) всюду будем предполагать, что в каждой ее точке существует хотя бы одно двумерное направление, определяемое линиями кривизны, по которому внутренняя кривизна поверхности отлична от нуля.

Обозначим $\sum_{\tau=1}^{p} n_\tau = \nu_p$ и рассмотрим ν_p-мерную поверхность $F_{\nu_p} = F_{n_1}^{(1)} \times \ldots \times F_{n_p}^{(p)}$ в пространстве $S_{\nu_p+p} = S_{n_1+1}^{(1)} \times \ldots \times S_{n_p+1}^{(p)}$.

ТЕОРЕМА А. *Если каждая из поверхностей $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ жестка в $S_{n_\tau+1}^{(\tau)}$ ($\tau = 1, 2, \ldots, p$), то поверхность F_{ν_p} жестка в S_{ν_p+p}.*

Следствие 1. *Для любого целого числа $p \geqslant 1$ можно указать плоское пространство, в котором существует жесткая поверхность коразмерности p.*

§ 2. Основная система уравнений. 1. Доказательство теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе, опирается на исследование связи решений линеаризованной системы уравнений Гаусса — Кодацци — Риччи с изгибающими полями поверхности. Изучению этой связи посвящен данный параграф.

2. Рассмотрим произвольную поверхность F_n в S_m. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_p$ ($p = m - n$) — система неизотропных попарно ортогональных нормалей класса C^2 этой поверхности (существование таких нормалей вытекает из рассуждений книги [8, стр. 176]). Разложение ковариантных производных $\boldsymbol{r}_{,ij}$, $\boldsymbol{n}_{\sigma j,\, i}$ по векторам $\boldsymbol{r}_{,1}, \boldsymbol{r}_{,2}, \ldots, \boldsymbol{r}_{,n}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_p$ приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{,\,ij} = \sum_{\sigma=1}^{p} e_\sigma b_{\sigma|ij} \boldsymbol{n}_\sigma, \\ \boldsymbol{n}_{\sigma|,\,i} = -g^{kl} b_{\sigma|ki} \boldsymbol{r}_{,\,l} + \sum_{\tau=1}^{p} e_\tau \mu_{\tau\sigma|i} \boldsymbol{n}_\tau, \end{cases} \tag{3}$$

где $e_\sigma = n_\sigma^2 = \pm 1$; $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n$; $\sigma = 1, 2, \ldots, p$; $b_{\sigma|ij}$, $\mu_{\tau\sigma|i}$ — коэффициенты, удовлетворяющие условиям $b_{\sigma|ij} = b_{\sigma|ji}$, $\mu_{\tau\sigma|i} = -\mu_{\sigma\tau|i}$.

Варьируя равенства $g_{ij} = \boldsymbol{r}_{,i} \boldsymbol{r}_{,j}$ и учитывая, что $\delta g_{ij} = 0$, получим следующую систему уравнений для изгибающего поля:

$$\boldsymbol{r}_{,i} \delta \boldsymbol{r}_{,j} + \delta \boldsymbol{r}_{,i} \boldsymbol{r}_{,j} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

3. Основной системой будем называть систему уравнений

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{\sigma=1}^{p} e_\sigma \left(t_{\sigma|ik} b_{\sigma|jl} - t_{\sigma|il} b_{\sigma|jk} + b_{\sigma|ik} t_{\sigma|jl} - b_{\sigma|il} t_{\sigma|jk}\right) = 0,\\
&t_{\sigma|ij,\,k} - t_{\sigma|ik,\,j} = \textstyle\sum_{\rho=1}^{p} \left(t_{\rho|ij}\mu_{\rho\sigma|k} - t_{\rho|ik}\mu_{\rho\sigma|j} + \right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + b_{\rho|ij}\varepsilon_{\rho\sigma|k} - b_{\rho|ik}\varepsilon_{\rho\sigma|j}\right),\\
&\varepsilon_{\rho\sigma|i,\,j} - \varepsilon_{\rho\sigma|j,\,i} =\\
&\qquad = g^{kl}\left(t_{\rho|ik} b_{\sigma|jl} - t_{\rho|jk} b_{\sigma|il} + b_{\rho|ik} t_{\sigma|jl} - b_{\rho|jk} t_{\sigma|il}\right) +\\
&\qquad + \textstyle\sum_{\chi=1}^{p} \left(\varepsilon_{\chi\rho|i}\mu_{\chi\sigma|j} - \varepsilon_{\chi\rho|j}\mu_{\chi\sigma|i} + \mu_{\chi\rho|i}\varepsilon_{\chi\sigma|j} - \mu_{\chi\rho|j}\varepsilon_{\chi\sigma|i}\right),
\end{aligned}
\right. \tag{5}
$$

где $t_{\sigma|ij} = t_{\sigma|ji}$ и $\varepsilon_{\rho\sigma|i} = -\varepsilon_{\sigma\rho|i}$ — неизвестные тензоры; $\rho,\ \sigma = 1, \ldots, p$; $i, j, k, l = 1, \ldots, n$. Система (5) может быть получена варьированием уравнений Гаусса — Кодацци — Риччи (см. [8, стр. 228]). Следовательно, этой системе всегда удовлетворяют тензоры $\delta b_{\sigma|ij}$, $\delta\mu_{\tau\sigma|i}$, так что каждому изгибающему полю поверхности F_n соответствует единственное решение системы (5). Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Если поверхность F_n односвязна, то каждому решению основной системы соответствует единственное (с точностью до тривиального) изгибающее поле поверхности F_n.*

Доказательство. Пусть $t_{\sigma|ki}$, $\varepsilon_{\rho\sigma|i}$ — произвольное решение системы (5). Рассмотрим на F_n поля бивекторов

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_i = \textstyle\sum_{\sigma=1}^{p} e_\sigma g^{kl} t_{\sigma|ki} \boldsymbol{r}_{,l} \wedge \boldsymbol{n}_\sigma &+\\
+ (1/2) \textstyle\sum_{\tau,\,\sigma=1}^{p} & e_\tau e_\sigma \varepsilon_{\tau\sigma|i} \boldsymbol{n}_\tau \wedge \boldsymbol{n}_\sigma.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Путем несложных вычислений с использованием формул (3) и системы (5) нетрудно показать, что $\boldsymbol{V}_{i,\,j} = \boldsymbol{V}_{j,\,i}$. Следовательно, на F_n существует поле бивекторов $\boldsymbol{V}$ такое, что $\boldsymbol{V}_{,i} = \boldsymbol{V}_i$. Поле $\boldsymbol{V}$ определяется полями $\boldsymbol{V}_i$ с точностью до произвольного постоянного бивектора $\boldsymbol{\Omega}$. Положим $\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}_{,i}$. Из (6) получаем: $\boldsymbol{u}_{i,\,j} - \boldsymbol{u}_{j,\,i} = \boldsymbol{v}_{,j} \boldsymbol{r}_{,i} - \boldsymbol{V}_{,i} \boldsymbol{r}_{,j} = 0$. Следовательно, на F_n существует поле векторов $\delta\boldsymbol{r}$ такое, что $\delta\boldsymbol{r}_{,i} = \boldsymbol{u}_i$. Поле $\delta\boldsymbol{r}$ удовлетворяет системе (4) и, значит, является изгибающим. Поле $\delta\boldsymbol{r}$ определяется полем бивектора $\boldsymbol{V}$ с точностью до произвольного постоянного вектора $\boldsymbol{\omega}$. Теорема доказана.

4. Система (5) всегда допускает решения вида

$$\begin{cases} t_{\sigma|ij} = \sum_{\tau=1}^{p} e_\tau \varphi_{\tau\sigma} b_{\tau|ij}, \\ \varepsilon_{\tau\sigma|i} = \varphi_{\tau\sigma|,i} + \sum_{\rho=1}^{p} e_\rho (\varphi_{\rho\tau}\mu_{\rho\sigma|i} - \varphi_{\rho\sigma}\mu_{\rho\tau|i}), \end{cases} \tag{7}$$

где $\{\varphi_{\tau\sigma}\}_{\tau,\sigma=1}^{p}$ — семейство произвольных скалярных функций на F_n, таких, что $\varphi_{\tau\sigma} = -\varphi_{\sigma\tau}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если каждое решение основной системы имеет вид* (7), *то поверхность* F_n *является жесткой.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы покажем, что в рассматриваемом случае всякое изгибающее поле поверхности F_n тривиально в каждой односвязной окрестности Φ_n. Действительно, в условиях теоремы 2 равенства (6) принимают вид

$$\boldsymbol{V}_{,i} = \sum_{\tau,\sigma=1}^{p} e_\tau e_\sigma \varphi_{\tau\sigma} g^{kl} b_{\tau|ki} \boldsymbol{r}_{,l} \wedge \boldsymbol{n}_\sigma + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\tau,\sigma,\rho=1}^{p} e_\tau e_\sigma e_\rho (\varphi_{\rho\tau}\mu_{\rho\sigma|i} - \varphi_{\rho\sigma}\mu_{\rho\tau|i}) \boldsymbol{n}_\tau \wedge \boldsymbol{n}_\sigma + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\tau,\sigma=1}^{p} e_\tau e_\sigma \varphi_{\tau\sigma|,i} \boldsymbol{n}_\tau \wedge \boldsymbol{n}_\sigma.$$

С помощью (3) отсюда находим

$$\boldsymbol{V}_{,i} = -(1/2) \sum_{\tau,\sigma=1}^{p} e_\tau e_\sigma (\varphi_{\tau\sigma} \boldsymbol{n}_\tau \wedge \boldsymbol{n}_\sigma)_{,i}.$$

Следовательно, на Φ_n имеем

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} - (1/2) \sum_{\tau,\sigma=1}^{p} e_\tau e_\sigma \varphi_{\tau\sigma} \boldsymbol{n}_\tau \wedge \boldsymbol{n}_\sigma.$$

Отсюда, учитывая, что $(\boldsymbol{n}_\tau \wedge \boldsymbol{n}_\sigma)\, \boldsymbol{r}_{,i} = \boldsymbol{0}$, для полей $\boldsymbol{u}$ получаем: $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{\Omega r}_{,i}$. Отсюда вытекает, что изгибающее$_i$ поле $\delta\boldsymbol{r}$ имеет вид $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Omega r} + \boldsymbol{\omega}$. Теорема доказана.

§ 3. Доказательство утверждений, сформулированных в § 1. 1. Поверхность F_{ν_p} в S_{ν_p+p} можно задать уравнениями

$$y^{\nu_{\tau-1}+k_\tau+\tau-1} = y^{\nu_{\tau-1}+k_\tau+\tau-1} (x^{\nu_{\tau+1}+1}, x^{\nu_{\tau-1}+2}, \ldots, x^{\nu_\tau}),$$

где $\tau = 1, 2, \ldots, p$; $k_\tau = 1, 2, \ldots, n_\tau + 1$; $\nu_\tau = \sum_{j=1}^{\tau} n_j$; $\nu_0 = 0$. При фиксированном значении индекса τ эти уравнения представляют поверхность $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ в $S_{n_\tau+1}^{(\tau)}$. Отсюда для метрического тензора $g_{kl}(x^1, \ldots, x^{\nu_p})$ $(k, l = 1, 2, \ldots, \nu_p)$

поверхности F_{ν_p} получаем:

$$g_{kl}=\begin{cases} g_{kl}^{(\tau)}(x^{\nu_{\tau-1}+1},\ldots,x^{\nu_\tau}), & k,\ l\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau],\\ 0,\ k\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau], & l\notin[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau],\end{cases}\qquad(8)$$

где $g_{kl}^{(\tau)}$ — метрический тензор поверхности $F_{n_\tau}^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2,\ldots, p$.

Покажем, что аналогичные равенства имеют место и для контравариантного метрического тензора $g^{kl}(x^1,\ldots,x^{\nu_p})$. Действительно, тензор g^{kl} определяется системой уравнений

$$g^{kl}g_{lj}=\delta_j^k,\qquad j,\ k,\ l=1,2,\ldots,\nu_p.\qquad(9)$$

При $j,\ k,\ l\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]$ эта система однозначно определяет контравариантный метрический тензор $g_{(\tau)}^{kl}(x^{\nu_{\tau-1}+1}, x^{\nu_{\tau-1}+2},\ldots, x^{\nu_\tau})$ поверхности $F_{n_\tau}^{(\tau)}$. Пусть $j\in[\nu_{\tau-1}+1,\nu_\tau]$, $k\notin[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]$. Тогда система (9) имеет вид $g^{kl}g_{lj}^{(\tau)}=0$ ($\tau = 1,\ldots,p$). При каждом фиксированном индексе k имеем систему n_τ однородных линейных уравнений относительно n_τ неизвестных g^{kl}. Отсюда получаем: $g^{kl}=0$ ($k\notin[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]$, $l\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]$). Таким образом, равенства (8) будут справедливы, если в них тензор g_{kl} заменить на тензор g^{kl}.

Для символов Кристоффеля Γ_{ij}^k ($i,\ j,\ k,\ l = 1, 2,\ldots,\nu_p$) теперь получаем

$$\Gamma_{ij}^k=\begin{cases} \overset{(\tau)}{\Gamma}{}_{ij}^k(x^{\nu_{\tau-1}+1}, x^{\nu_{\tau-1}+2},\ldots,x^{\nu_\tau}), & i,\ j,\ k\in[\nu_{\tau-1}+1,\nu_\tau],\\ 0,\ k\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau], & i\notin[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]\ \text{или}\\ \quad k\notin[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau], & i\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau],\end{cases}$$

где $\overset{(\tau)}{\Gamma}{}_{ij}^k$ — символы Кристоффеля поверхности $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ ($\tau = 1, 2,\ldots, p$).

Следовательно, если через $\nabla_k^{(\tau)}$ обозначить оператор ковариантного дифференцирования по x^k относительно метрического тензора $g_{ij}^{(\tau)}$ ($i,\ j,\ k\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]$, $\tau=1, 2,\ldots, p$) а через $(\cdot)_{,k}$ — ковариатную производную по x^k относительно тензора g_{ij} на F_{ν_p}, то для любого тензора T_{jl}^i на F_{ν_p} при $i,\ j,\ l\in[\nu_{\tau-1}+1,\ \nu_\tau]$ будем иметь

$$T_{jl,\,k}^i=\nabla_k^{(\tau)}T_{jl}^i.\qquad(10)$$

2. Пусть $n^{\nu_{\tau-1}+k_\tau+\tau-1}(x^{\nu_{\tau-1}+1}, x^{\nu_{\tau-1}+2}, \ldots, x^{\nu_\tau})$ $(k_\tau = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n_\tau + 1)$ — компоненты нормали поверхности $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ в $S^{(\tau)}_{n_\tau+1}$ $(\tau = 1, 2, \ldots, p)$; положим

$$\boldsymbol{n}_\tau = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{\nu_{\tau-1}+\tau-1}, n^{\nu_{\tau-1}+\tau}, n^{\nu_{\tau-1}+\tau+1}, \ldots, n^{\nu_\tau+\tau}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\nu_p-\nu_\tau-\tau+p}\}$$

$(\tau = 1, 2, \ldots, p)$. Получим p попарно ортогональных неизотропных векторов в S_{ν_p+p} класса C^2, ортогональных векторам $\boldsymbol{r}_{,1}, \boldsymbol{r}_{,2}, \ldots, \boldsymbol{r}_{\nu_p}$. Примем векторы $\boldsymbol{n}_\tau$ $(\tau = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p)$ в качестве нормалей поверхности F_{ν_p} в S_{ν_p+p}. Относительно этих нормалей получаем

$$\begin{cases} \mu_{\tau\sigma|i} = 0, \\ b_{\tau|ij} = \begin{cases} b^{(\tau)}_{ij}(x^{\nu_{\tau-1}+1}, x^{\nu_{\tau-1}+2}, \ldots, x^{\nu_\tau}), & i, j \in [\nu_{\tau-1}+1, \nu_\tau], \\ 0, & i \text{ или } j \notin [\nu_{\tau-1}+1, \nu_\tau], \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

где $b^{(\tau)}_{ij}$ — коэффициенты, фигурирующие в (3) для поверхности $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ в $S^{(\tau)}_{n_\tau+1}$; $\tau, \sigma = 1, 2, \ldots, p$; $i, j = 1, 2, \ldots, \nu_p$.

3. Рассмотрим основную систему для поверхности F_{ν_p}. В силу формул (10) и (11) при $i, j, k, l \in [\nu_{\tau-1}+1, \nu_\tau]$ из первых двух равенств этой системы получаем

$$\begin{cases} t_{\tau|ik}b^{(\tau)}_{jl} - t_{\tau|il}b^{(\tau)}_{jk} + b^{(\tau)}_{ik}t_{\tau|jl} - b^{(\tau)}_{il}t_{\tau|jk} = 0, \\ \nabla^{(\tau)}_k t_{\tau|ij} - \nabla^{(\tau)}_j t_{\tau|ik} = 0 \end{cases}$$

$(\tau = 1, 2, \ldots, p$, по τ не суммировать). При каждом фиксированном значении индекса τ имеем основную систему для поверхности $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ в $S^{(\tau)}_{n_\tau+1}$. Так как поверхность $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ односвязна и жестка в $S^{(\tau)}_{n_\tau+1}$, то в силу теорем 1 и 2 эта система имеет только нулевое решение. Следовательно, получаем

$$t_{\tau|ij} = 0, \quad i, j \in [\nu_{\tau-1}+1, \nu_\tau] \quad (\tau = 1, 2, \ldots, p). \tag{12}$$

4. Дальнейшие рассуждения носят локальный характер. На каждой из поверхностей $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ рассмотрим произвольную окрестность $\Phi^{(\tau)}_{n_\tau}$ $(\tau = 1, 2, \ldots, p)$. Этим окрестностям соответствует окрестность $\Phi_{\nu_p} = \prod_{\tau=1}^{p} \Phi^{(\tau)}_{n_\tau}$ на F_{ν_p}. Докажем, что при условии (12) Φ_{ν_p} жестка в S_{ν_p+p}. Пусть $t_{\tau|ij}$, $\varepsilon_{\tau\sigma|i}$ — произвольное решение системы (5)

на Φ_{ν_p}. Положим

$$\tilde{t}_{\tau|ij} = t_{\tau|ij} - \sum_{\sigma=1}^{p} e_\sigma \varphi_{\sigma\tau} b_{\sigma|ij},$$
$$\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|i} = \varepsilon_{\tau\sigma|i} - \varphi_{\tau\sigma|,i}$$

$(\tau, \sigma = 1, 2, \ldots, p,\ i, j = 1, 2, \ldots, \nu_p)$. Для любых скалярных функций $\varphi_{\tau\sigma} = -\varphi_{\sigma\tau}$ тензоры $\tilde{t}_{\tau|ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|i}$ удовлетворяют системе (5). При этом в силу (11) и (12) имеем

$$\tilde{t}_{\tau|ij} = 0, \qquad i, j \in [\nu_{\tau-1} + 1, \nu_\tau], \qquad \tau = 1, 2, \ldots, p.$$

Выберем функции $\varphi_{\tau\sigma}$ следующим образом. В каждой из окрестностей $\Phi_{n_\tau}^{(\tau)}$ $(\tau = 1, 2, \ldots, p)$ зафиксируем параметризацию $\tilde{x}^{\nu_{\tau-1}+1}, \ldots, \tilde{x}^{\nu_\tau}$, сопряженную относительно второй основной формы этой окрестности в $S_{n_\tau+1}^{(\tau)}$. В этой параметризации имеем $b_{\tau|ij} = 0$ при $i \neq j$. Так как в каждой точке на $F_{n_\tau}^{(\tau)}$ существует двумерное направление, определяемое линиями кривизны, по которому внутренняя кривизна отлична от нуля, то можно считать, что $b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} \neq 0$, $\tau = 1, 2, \ldots, p$. В параметризации $\tilde{x}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_p)$ положим

$$\varphi_{\tau\sigma} = -\varphi_{\sigma\tau} = e_\tau \frac{t_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1}}{b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1}}, \qquad \varphi_{\sigma\sigma} = 0,$$

$\tau, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, p, \quad \tau < \sigma$. Значения функций $\varphi_{\tau\sigma}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^{\nu_p})$ припишем точкам окрестности Φ_{ν_p}. Получим $p\,(p-1)/2$ скалярных функций на Φ_{ν_p}. Покажем, что $\tilde{t}_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} = 0$ при $\tau < \sigma$ $(\tau, \sigma = 1, 2, \ldots, p)$. Действительно, из определения тензоров $\tilde{t}_{\sigma|ij}$, учитывая, что $b_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} = 0$ при $\sigma \neq \tau$, находим

$$\tilde{t}_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} = t_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} - e_\tau \varphi_{\tau\sigma} b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} =$$
$$= t_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} - \frac{t_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1}}{b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1}} \cdot b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} = 0.$$

Положим в первом равенстве системы (5) $j = l = \nu_{\tau-1} + 1$. Учитывая только отличные от нуля слагаемые, будем иметь

$$e_\tau b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} \cdot \tilde{t}_{\tau|ik} + \sum_{\sigma=1}^{\tau-1} e_\tau b_{\tau|ik} \tilde{t}_{\sigma|\nu_{\tau-1}+1,\, \nu_{\tau-1}+1} = 0 \qquad (13)$$

$(i, k = 1, 2, \ldots, \nu_p, \quad \tau = 1, 2, \ldots, p)$. При $\tau = 1$ имеем $b_{1|11} \cdot \tilde{t}_{1|ik} = 0$, откуда следует, что $\tilde{t}_{1|ik} = 0$ $(i, k = 1, \ldots, \nu_p)$. Далее, по индукции предположим, что $\tilde{t}_{\tau|ik} = 0$ и докажем, что $\tilde{t}_{\tau+1|ik} = 0$ $(\tau = 1, 2, \ldots, p-1, \quad i, k = 1, 2, \ldots, \nu_p)$. Действительно, при сделанном предположении из (13) получаем $b_{\tau+1|\nu_\tau+1, \nu_\tau+1} \cdot \tilde{t}_{\tau+1|ik} = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{t}_{\tau+1|ik} = 0$.

Таким образом, мы доказали, что $\tilde{t}_{\tau|ik} = 0$ при $\tau = 1, 2, \ldots, p, \quad i, k = 1, 2, \ldots, \nu_p$. Полагая теперь во втором равенстве системы (5) $i = j = \nu_{\tau-1} + 1$ и учитывая только отличные от нуля слагаемые, будем иметь $b_{\tau|\nu_{\tau-1}+1, \nu_{\tau-1}+1} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|k} = 0, \quad k \neq \nu_{\tau-1} + 1, \quad k = 1, \ldots, \nu_p$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$. Отсюда следует, что $\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|k} = 0$ при $k \neq \nu_{\tau-1} + 1$. Так как $\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|k} = 0$ при $\tau = \sigma$, то при $k = \nu_{\tau-1} + 1$ можно считать, что $k \neq \nu_{\sigma-1} + 1$ и, следовательно,

$$\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|\nu_{\tau-1}+1} = -\tilde{\varepsilon}_{\sigma\tau|\nu_{\tau-1}+1} = 0.$$

Таким образом, имеем: $\tilde{t}_{\sigma|ij} = 0$, $\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|i} = 0$ $(\tau, \sigma = 1, \ldots, p, \; i, \; j = 1, \ldots, \nu_p)$. Отсюда в силу определения тензоров $\tilde{t}_{\sigma|ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{\tau\sigma|i}$ вытекает, что всякое решение $t_{\sigma|ij}$, $\varepsilon_{\tau\sigma|i}$ системы (5) для поверхности F_{ν_p} имеет вид (7). По теореме 2 это означает жесткость поверхности F_{ν_p}.

5. Сформулированное в § 1 следствие вытекает из доказанной теоремы в силу произвола в выборе числа p и из наличия в каждом S_{n+1} жесткой гиперповерхности (см. ниже теорему Б).

§ 4. О жесткости гиперповерхностей. 1. Известно, что всякая гиперповерхность F_n пространства S_{n+1} неизгибаема при условии, что в каждой ее точке существует хотя бы два двумерных направления, определяемых линиями кривизны, по которым внутренняя кривизна поверхности отлична от нуля [8]. В данном параграфе мы докажем аналогичное утверждение для б. м. изгибаний.

2. Определение. Поверхность F_n называется локально жесткой в пространстве S_m, если всякая окрестность каждой точки на F_n является жесткой поверхностью в S_m.

ТЕОРЕМА Б. *Если в каждой точке гиперповерхности F_n $(n \geqslant 3)$ пространства S_{n+1} существует хотя бы два двумерных направления, определяемых линиями кривизны, по которым внутренняя кривизна поверхности отлична от нуля, то поверхность F_n локально жестка в S_{n+1}.*

Доказательство. В рассматриваемом случае система (5) принимает вид

$$\begin{cases} b_{ik}t_{jl} - b_{il}t_{jk} + b_{jl}t_{ik} - b_{jk}t_{il} = 0, \\ t_{ij,k} - t_{ik,j} = 0, \end{cases}$$

где b_{ik} — коэффициенты второй основной формы поверхности F_n, причем $\operatorname{rang} \| b_{ik} \| \geqslant 3$. Пусть M — произвольная точка на F_n. Систему координат x^i можно считать такой, что в точке $M b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{33} \neq 0$, $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$. В этом случае из первого уравнения системы (14) получаем

$$\begin{cases} b_{11}t_{22} + b_{22}t_{11} = 0, \\ b_{22}t_{33} + b_{33}t_{22} = 0, \\ b_{11}t_{33} + b_{33}t_{11} = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы $2b_{11}b_{22}b_{33} \neq 0$, следовательно, $t_{11} = t_{22} = t_{33} = 0$.

Полагая в первом равенстве системы (14) $i = k = 1$, $j = 2$, $l = 3$, затем $i = k = 2$, $j = 3$, $l = 1$, наконец, $i = k = 3$, $j = 1$, $l = 2$, получим, что $t_{ij} = 0$ при $i, j = 1, 2, 3$. Полагая в том же равенстве $i = k = 1$, $j = 2$, будем иметь, что $t_{2l} = 0$, $l = 1, \ldots, n$. Положим теперь $i = k = 2$, будем иметь $b_{22}t_{jl} = 0$. Отсюда вытекает, что $t_{jl} = 0$ $(j, l = 1, \ldots, n)$. По теореме 2 это означает жесткость поверхности F_n. Теорема доказана.

3. Из доказательства теорем А и Б вытекает

Следствие 2. *Если каждая из поверхностей $F^{(\tau)}_{n_\tau}$ $(\tau = 1, \ldots, p)$ имеет размерность $n_\tau \geqslant 3$, и в каждой ее точке существует два двумерных направления ненулевой внутренней кривизны, определенных линиями кривизны, то поверхность F_{ν_p} локально жестка в S_{ν_p+p}.*

Таганрогский государственный
педагогический институт

Поступило
24.X.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Jacobwitz H., Implicit function theorems and isometric embeddings, Ann. Math., 95, № 2 (1972), 191—225.

[2] Лизунова Л. Ю., О бесконечно малых изгибаниях гиперповерхностей в римановом пространстве, Изв. вузов, Математика, № 3 (1970) 36—42.

[3] Сенькин Е. П., Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых поверхностей», Укр. геом. сб., 17, Харьков, 1974, 132—134.
[4] Горзий Т. А., Жесткость выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства, Укр. геом. сб., 3, Харьков, 1973, 66—68.
[5] Горзий Т. А., О локальной неизгибаемости выпуклых поверхностей эллиптического пространства, Укр. геом. сб., 18, Харьков, 1975, 49—50.
[6] Matsuyama Ioshio, Rigidity of hypersurfaces with constant mean curvature, Tohoky Math. J., 28, № 2 (1976), 199—213.
[7] Картан Э., Геометрия римановых пространств, М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936.
[8] Эйзенхарт Л.-П., Риманова геометрия, М., ИЛ, 1948.