ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮНЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 6

УДК 517.925.4

И. Н. СЕРГЕЕВ

ОБ ОТКРЫТОМ ЯДРЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ УСТОЙЧИВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ЛЯПУНОВА

Рассматривается уравнение

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $A(t): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — ограниченная кусочно-непрерывная по $t \in [0, \infty)$ оператор-функция. В дальнейшем используются обозначения работы [1]: $\mathfrak{A}$ — множество уравнений (1), которые отождествляются с соответствующими функциями $A(t)$; $\rho(A, B) = \sup\limits_{t \in [0, \infty)} \|A(t) - B(t)\|$ — метрика в $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}^\varepsilon(A) = \{B \in \mathfrak{A} | \rho(A, B) \leqslant \varepsilon\}$; $\mathfrak{A}_0 = \{B \in \mathfrak{A} | \lim\limits_{t \to \infty} \|B(t)\| = 0\}$ — множество бесконечно малых (б. м.) возмущений; $\mathfrak{A}_A = A + \mathfrak{A}_0$; $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — множество показателей Ляпунова уравнения (1); Ω и ω — верхний и нижний центральные показатели;

$$\chi_\tau^t(x) \equiv \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{|x(t)|}{|x(\tau)|}; \quad \chi(x) \equiv \overline{\lim_{t \to \infty}} \chi_0^t(x).$$

Обозначим также: $S_i^+ (S_i^-)$ — множество уравнений из $\mathfrak{A}$ с полунепрерывным сверху (снизу) i-м показателем λ_i; $S_i = S_i^+ \cap S_i^-$; $Q_i^+ (Q_i^-)$ — множество таких уравнений, у которых пространство решений допускает интегрально разделенное разбиение [1, 2] в прямую сумму подпространств $E^n = L \dot{+} N$, где $\dim L = i$ $(\dim L = i - 1)$ и $\Omega_L = \lambda_i = (\omega_N = \lambda_i)$; $Q_i = Q_i^+ \cap Q_i^-$; $J_k = \bigcap\limits_1^k Q_i$.

В настоящей работе изучается вопрос об описании открытого ядра $\operatorname{Int} S_i$ множества S_i ($\operatorname{Int} S$ — объединение всех открытых множеств, содержащихся в S). Сначала приведем две леммы, вытекающие из свойств б. м. возмущений.

Лемма 1. $\operatorname{Int} S_i = \operatorname{Int} S_i^- \subset S_i^+$.

Доказательство. Пусть $A \notin S_i^+$. Тогда в силу следствия 2 [1] найдется такое $B \in \mathfrak{A}_A$, что $\lambda_i(B) > \lambda_i(A)$. Исходя из свойств б. м. возмущений, можно без ограничения общности считать, что $B = B_\varepsilon \in \mathfrak{A}^\varepsilon(A)$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. С другой стороны, так как $\lambda_i(A) < \lambda_i(B)$ и $A \in \mathfrak{A}_B$ (т. е. опять можно заменять A на $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}^\varepsilon(B)$), то $B \notin S_i^-$. Следовательно, $A \notin \operatorname{Int} S_i^-$. Таким образом, $\operatorname{Int} S_i^- \subset S_i^+$. Наконец, $\operatorname{Int} S_i = \operatorname{Int} S_i^- \cap \operatorname{Int} S_i^+ = \operatorname{Int} S_i^-$. Лемма доказана.

Лемма 2. $\operatorname{Int} S_1 = \operatorname{Int} S_1^- = \operatorname{Int} S_1^+$.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что $\operatorname{Int} S_1^+ \subset S_1^-$. По теореме 2 [1], если $A \notin S_1^-$, то найдется такое $B \in \mathfrak{A}_A$, что $\lambda_1(B) < \lambda_1(A)$. Дальше рассуждаем так же, как в доказательстве леммы 1.

Теорема. *Для любого* $i = 1, \ldots, n$ $\operatorname{Int} S_i \subset Q_i^+$.

Доказательство. Пусть $A \in \operatorname{Int} S_i$. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\mathfrak{A}^{2\varepsilon}(A) \subset S_i$. Из следствия 3 [1] пространство решений уравнения (1) допускает интегрально разделенное разбиение $E^n = L \dot{+} N$, где $\dim L = i + k$, $\Omega_L = \lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+k}$. Предположим,

что $A \notin Q_i^+$. Тогда $k \geqslant 1$ и в силу того же следствия 3 [1] $A \in S_{i+1}^+$, а значит, $A \in S_i \cap \cap S_{i+1}$. Выберем такое $B \in \mathfrak{A}^\varepsilon(A)$, чтобы $\beta \equiv \lambda_{i+1}(B) - \lambda_i(B) < \varepsilon$ и $B \in J_n$ (по теореме из [3] это возможно для любого $\varepsilon > 0$). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — нормальный упорядоченный по возрастанию показателей базис в пространстве решений уравнения $\dot{x} = B(t)x$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{y} = C_\varphi(t)\, y, \tag{2}$$

$$C_\varphi(t) = B(t) + \varphi(t)\,[P_{i+1}(t) - P_i(t)],$$

где P_j — ортогональные проекторы на подпространства $L_j \equiv L(x_1, \ldots, x_j)$, а $\varphi(t)$ — пока не фиксированная функция. Всюду далее обозначаем через $y_1, \ldots, y_n$ базис в пространстве решений уравнения (2), для которого $y_j(0) = x_j(0)$. Тогда нетрудно видеть, что $y_j \equiv x_j$ $(j = 1, \ldots, i)$ и $L(y_1, \ldots, y_j) = L_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ при любой функции $\varphi(t)$.

Докажем, что при $\varphi(t) \equiv -\beta$ разбиение

$$L_{i+1} = L_i \dot{+} y_{i+1} \tag{3}$$

не является интегрально разделенным. Предположим противное. Тогда по лемме 1 [1] разбиение (3) регулярное, т. е.

$$\inf_{t \in [0, \infty)} \sphericalangle\{y_{i+1}(t), L_i(t)\} > 0. \tag{4}$$

Обозначим $q_\varphi(t) = \|[P_{i+1}(t) - P_i(t)]\, Y_\varphi(t, 0)\, P_{i+1}(0)\|$, где $Y_\varphi(t, \tau)$ — оператор Коши уравнения (2). Тогда можно показать, что $\chi(q_{-\beta}) = \chi(q_0) - \beta$ и $\chi(q_0) \leqslant \lambda_{i+1}(B)$ (см. теорему Перрона и п. 4.3 [2]). С другой стороны, из (4) $\inf[q_{-\beta}(t)/|y_{i+1}(t)|] > 0$, а значит, $\chi(y_{i+1}) \leqslant \chi(q_{-\beta}) \leqslant \lambda_{i+1}(B) - \beta = \lambda_i(B)$, что противоречит сделанному предположению.

Построим теперь функцию $\varphi(t)$ так, чтобы $\lambda_{i+1}(C_\varphi) > \lambda_i(B) = \lambda_i(C_\varphi)$, но разбиение (3) не было интегрально разделенным. Фиксируем $t_0 \geqslant 0$ и последовательности положительных чисел $\varepsilon_m \to 0$ и $\theta_m \to \infty$.

1. На отрезке $t \in [t_0, t_1]$ положим $\varphi(t) \equiv -\beta$, чтобы для некоторых $b \in L_i$ и $\tau \in [t_0, t_1 - \theta_1]$

$$\chi_\tau^{t_1}(y_{i+1}) - \chi_\tau^{t_1}(b) \leqslant \varepsilon_1 \tag{5}$$

(существование такого t_1 вытекает из отсутствия интегральной разделенности у разбиения (3) при таком выборе $\varphi(t)$).

2. Положим $\varphi(t) \equiv 0$ на интервале $t \in (t_1, t_2)$, где t_2 выбрано из условия

$$\sup_{t \in (t_1, t_2)} \chi_0^t(y) \geqslant \lambda_{i+1}(B) - \varepsilon_1 \tag{6}$$

для всех ненулевых решений $y \in M \equiv L(y_{i+1}, \ldots, y_n)$. Выбор такого t_2 возможен в силу компактности множества $M(0) \cap \{|y| = 1\}$, тождества $\chi_0^t(y) = \chi_0^t(cy)$ $(c \neq 0)$ и того факта, что $\chi(y) \geqslant \lambda_{i+1}(B)$ для всех ненулевых $y \in M$.

3. Продолжим далее по индукции рассуждения пп. 1, 2, заменяя на втором шаге t_0, ε_1, θ_1 на t_2, ε_2, θ_2 соответственно и так на каждом последующем шаге. Построенное таким образом уравнение (2), вследствие условий (5), (6), будет обладать требуемыми свойствами.

Так как $0 < \beta < \varepsilon$, то $C_\varphi \in \mathfrak{A}^{2\varepsilon}(A) \subset S_i$. С другой стороны, из следствия 3 [1] $C_\varphi \notin S_i$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из леммы 1 и теоремы вытекает

Следствие 1. $\operatorname{Int} S_i^- \subset Q_i^+$.

Индукцией по $i = m, m+1, \ldots, k$ нетрудно вывести

Следствие 2. $\operatorname{Int}(S_m \cap S_{m+1} \cap \cdots \cap S_k) \subset Q_m^+ \cap Q_{m+1} \cap \cdots \cap Q_k$.

Следствие 3. $\operatorname{Int}(S_1 \cap \cdots \cap S_k) = J_k$.

При доказательстве равенства (в отличие от включения) используется тот факт, вытекающий из теоремы 15.2.1 [2], что множество J_k открыто в $\mathfrak{A}$. Отметим, что в случае $k = n$ следствие 3 совпадает с теоремой 1 [4]. Учитывая лемму 2, получаем

Следствие 4. $\operatorname{Int}(S_1^+ \cap \cdots \cap S_k^+) = \operatorname{Int}(S_1^- \cap \cdots \cap S_k^-) = J_k$.

Автор благодарен Н. А. Изобову за предложенные им изменения, сделавшие доказательство теоремы более простым и коротким.

Литература

1. Сергеев И. Н. Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 3.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., Наука, 1966.
3. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 7, с. 1167—1170.
4. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 10, с. 1775—1784.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 28 декабря 1979 г.