Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. С. Плешанов, Общие решения в теории магнитогидродинамических течений в гиперзвуковом приближении,
Докл. АН СССР, 1968, том 180, номер 4, 813–816

https://www.mathnet.ru/dan33893

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
17 января 2026 г., 04:07:17

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 180, № 4

УДК 538.4 *ГИДРОМЕХАНИКА*

А. С. ПЛЕШАНОВ

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

(*Представлено академиком А. А. Дородницыным 20 VII 1967*)

Получены общие решения и решены соответствующие задачи Коши для пространственных нестационарных и стационарных течений анизотропно проводящего невязкого газа в магнитном поле и отсутствии электрического поля при числах Маха $M \gg 1$, когда в уравнениях движения можно пренебречь градиентом давления.

Уравнения движения проводящего невязкого газа имеют известный вид (обозначения обычны)

$$\rho(\partial / \partial t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = [\mathbf{jB}]. \tag{1}$$

Сила Лоренца $[\mathbf{jB}]$ выражается через эффективную напряженность электрического поля $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + [\mathbf{vB}]$ с помощью обобщенного закона Ома (см., например, ([1])):

$$[\mathbf{jB}] = \frac{\sigma_\perp B}{1+\delta_\perp^2}([\mathbf{E}_\perp^*\mathbf{b}] + \delta_\perp \mathbf{E}_\perp^*), \tag{2}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B} / B$; $\sigma_\perp$ — поперечная проводимость; $\delta_\perp$ — тангенс угла между $\mathbf{j}_\perp$ и $\mathbf{E}_\perp^*$. Скольжение ионов учитывается зависимостью $\sigma_\perp$ от B ([1]). Не ограничивая общности, будем считать магнитное поле направленным вдоль оси z, именно: $\mathbf{B}(0, 0, -B)$. Вводя параметры нагрузки $K_x = E_x / v_y B$, $K_y = -E_y / v_x B$, получим в гиперзвуковом приближении, когда $M \gg 1$ и можно пренебречь градиентом давления, развернутую систему уравнений (1) относительно $\mathbf{v}(u, v, w)$

$$Du + \nu_1 u + \delta_\perp \nu_2 v = 0, \qquad Dv - \delta_\perp \nu_1 u + \nu_2 v = 0, \qquad D_w = 0, \tag{3}$$

где $D \equiv \partial / \partial t + u\,\partial / \partial x + v\,\partial / \partial y + w\,\partial / \partial z$; $\nu_1 = \nu(1 - K_y)$; $\nu_2 = \nu(1 - K_x)$; $\nu = \frac{1}{1+\delta_\perp^2}\frac{\sigma_\perp B^2}{\rho}$ — частота магнитогидродинамического взаимодействия.

Простота принятого здесь гиперзвукового приближения обусловлена тем, что при заданных $\nu_{1,2}$ и $\delta_\perp$ уравнения движения (3) образуют замкнутую систему относительно u, v, w, которая решается независимо от уравнений неразрывности, энергии и уравнений Максвелла. Будем считать для простоты постоянными величины ν, $K_{x,y}$, $\delta_\perp$. Тогда система (3) допускает широкий класс общих решений, получение которых и составляет содержание работы. Отметим, что некоторые частные задачи при нулевом градиенте давления были рассмотрены в серии работ ([2]). В дальнейшем предполагается, что электрическое поле, если и есть, то только по оси z, так что $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Кроме того будет рассмотрен режим холостого хода по одной из осей x или y, когда одна из величин ν_1 или ν_2 равна 0. При таких режимах условие постоянства параметра ν может быть согласовано с необходимостью удовлетворить остальные уравнения (в частности, уравнение непрерывности тока).

В простейшем нестационарном одномерном случае единственное уравнение (3)

$$u_t + uu_x + \nu_1 u = 0 \tag{4}$$

(индексы означают дифференцирование) имеет первые интегралы

$$e^{\nu_1 t}u = C_1, \quad u + \nu_1 x = C_2$$

и общее решение с произвольной функцией f

$$u + \nu_1 x = f(e^{\nu_1 t}u). \tag{5}$$

Задача Коши для уравнения (4) такова: найти $u(x, t)$, чтобы $u(x, 0) = u_0(x)$. Пусть обратная зависимость x от u_0 имеет вид $x = \varphi(u_0)$. Тогда из (5) при $t = 0$ получим $u_0 + \nu_1\varphi(u_0) = f(u_0)$ или $e^{\nu_1 t}u + \nu_1\varphi(e^{\nu_1 t}u) = f(e^{\nu_1 t}u) = u + \nu_1 x$, так что $\varphi(e^{\nu_1 t}u) = x - \frac{u}{\nu_1}(e^{\nu_1 t} - 1)$, и, обращая последнее выражение, получим окончательный результат

$$u = e^{-\nu_1 t}u_0\left[x - \frac{u}{\nu_1}(e^{\nu_1 t} - 1)\right]. \tag{6}$$

При $\nu_1 \to 0$ получается $u = u_0(x - ut)$, как и должно быть. Аналогично решается краевая задача, когда требуется найти $u(x, t)$, чтобы $u(0, t) = u_0(t)$. Решение имеет вид

$$u = u_0\left[t - \frac{1}{\nu_1}\ln\left(1 + \frac{\nu_1 x}{u}\right)\right] - \nu_1 x. \tag{7}$$

Решение, аналогичное (6), имеет место и в общем случае при $\delta_\perp = 0$, именно:

$$u = e^{-\nu_1 t}u_0(\xi, \eta, \zeta), \; v = e^{-\nu_2 t}v_0(\xi, \eta, \zeta), \quad w = w_0(\xi, \eta, \zeta), \tag{8}$$

где $\xi = x - \frac{u}{\nu_1}(e^{\nu_1 t} - 1)$, $\eta = y - \frac{v}{\nu_2}(e^{\nu_2 t} - 1)$, $\zeta = z - wt$. Метод решения заключается в введении новых функций $\varepsilon = v / u$, $\delta = w / u$ с последующим использованием их в качестве независимых переменных.

Рассмотрим более подробно нестационарный плоский случай $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $\delta_\perp \neq 0$. Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \nu(u + \delta_\perp v) &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \nu(-\delta_\perp u + v) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Введя $\varepsilon = v / u$, получим из комбинации (9) уравнение для ε

$$\varepsilon_t + u(\varepsilon_x + \varepsilon\varepsilon_y) - \nu\delta_\perp(1 + \varepsilon^2) = 0.$$

Перейдя от переменных t, x, y к переменным ε, x, y, получим из комбинации этих уравнений уравнение

$$\frac{1}{u}\nu\delta_\perp(1 + \varepsilon^2)u_\varepsilon + u_x + \varepsilon u_y + \nu(1 + \delta_\perp\varepsilon) = 0,$$

первые интегралы которого имеют вид

$$\exp(\operatorname{arc\,tg}\varepsilon / \delta_\perp)\sqrt{1 + \varepsilon^2}\, u = C_1,$$

$$\nu x + \frac{1}{1 + \delta_\perp^2}(u - \delta_\perp v) = C_2, \quad \nu y + \frac{1}{1 + \delta_\perp^2}(\delta_\perp u + v) = C_3.$$

Если перейти от переменных t, x, y к переменным t, ε, y или t, x, ε, то получим последний интеграл

$$\nu t - \operatorname{arc\,tg}\varepsilon / \delta_\perp = C_4.$$

В результате общее решение, содержащее две произвольные функции $f_{1,2}$, имеет вид

$$u + \nu(x + \delta_\perp y) = f_1(\alpha, \beta), \qquad v + \nu(-\delta_\perp x + y) = f_2(\alpha, \beta), \tag{10}$$

где $\alpha = e^{\nu t}\sqrt{1+\varepsilon^2}\, u$, $\beta = \operatorname{arc\,tg} \varepsilon - \delta_\perp \nu t$.

В (10) удобно ввести полную скорость $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ и угол $\theta = \operatorname{arc\,tg}(v / u)$. Для уравнений (9) можно поставить задачу Коши: найти $V(t, x, y)$ и $\theta(t, x, y)$, чтобы $V(0, x, y) = V_0(x, y)$ и $\theta(0, x, y) = \theta_0(x, y)$. Пусть обратные зависимости x, y от V_0, θ_0 имеют вид $x = \varphi_1(V_0, \theta_0)$, $y = \varphi_2(V_0, \theta_0)$. Тогда из (10) при $t = 0$ получим

$$V_0^2 = \{f_1(V_0, \theta_0) - \nu[\varphi_1(V_0, \theta_0) + \delta_\perp \varphi_2(V_0, \theta_0)]\}^2 + \\ + \{f_2(V_0, \theta_0) - \nu[-\delta_\perp \varphi_1(V_0, \theta_0) + \varphi_2(V_0, \theta_0)]\}^2,$$

$$\theta_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{f_2(V_0, \theta_0) - \nu[-\delta_\perp \varphi_1(V_0, \theta_0) + \varphi_2(V_0, \theta_0)]}{f_1(V_0, \theta_0) - \nu[\varphi_1(V_0, \theta_0) + \delta_\perp \varphi_2(V_0, \theta_0)]}.$$

Заменяя V_0 на $\alpha = e^{\nu t} V$ и θ_0 на $\beta = \theta - \delta_\perp \nu t$ с последующими заменами $f_{1,2}$ согласно (10) и разрешая уравнения относительно $\varphi_1(\alpha, \beta)$ и $\varphi_2(\alpha, \beta)$, получим после обращения последних функций выражения для V и θ, т. е. искомое решение задачи Коши в явном виде.

Общий случай, когда $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\delta_\perp \neq 0$, в принципе также может быть решен, однако из-за громоздкости результатов здесь не приводится.

Рассмотрим простейший стационарный плоский случай $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $\delta_\perp = 0$. Уравнения имеют вид

$$uu_x + vu_y + \nu u = 0, \qquad uv_x + vv_y + \nu v = 0. \tag{11}$$

Поступая аналогично, получим общее решение

$$u + \nu x = f_1(\varepsilon), \qquad v + \nu y = f_2(\varepsilon). \tag{12}$$

Из (12) следует

$$u + \nu x = f_3(x - y / \varepsilon), \qquad v + \nu y = f_4(x - y / \varepsilon).$$

Пусть $u(x, 0) = u_0(x)$ и $v(x, 0) = v_0(x)$. Тогда решение такой задачи Коши имеет вид

$$u = (1 + \nu y / v)^{-1} u_0(x - y / \varepsilon), \qquad v = (1 + \nu y / v)^{-1} v_0(x - y / \varepsilon). \tag{13}$$

Аналогично решение задачи Коши $u(0, y) = u_0(y)$ и $v(0, y) = v_0(y)$ имеет вид

$$u = (1 + \nu x / u)^{-1} u_0(y - x\varepsilon) / u)^{-1}, \qquad v = (1 + \nu x / v_0(y - x\varepsilon). \tag{14}$$

Несколько более общий стационарный плоский случай, когда $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\delta_\perp = 0$, оказывается значительно более ложным. Общее решение, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$u + \nu_1 x = f_1(vu^{-\mu}), \qquad v + \nu_2 y = f_2(vu^{-\mu}), \tag{15}$$

где $\mu = \nu_2 / \nu_1 \neq 1$. Пусть $u(x, 0) = u_{01}(x)$ и $v(x, 0) = v_{01}(x)$, так что $v_{01} u_{01}^{-\mu} = \psi_1(x)$, где ψ_1 — заданная функция x. Тогда решение такой частной задачи Коши имеет вид

$$vu^{-\mu} = \psi_1\{x - [(1 + \nu_2 y / v)^{1/\mu} - 1] u / \nu_1\}. \tag{16}$$

Пусть далее $u(0, y) = u_{02}(y)$ и $v(0, y) = v_{02}(y)$, так что $u_{02} v_{02}^{-1/\mu} = \psi_2(y)$, где ψ_2 — заданная функция y. Тогда решение такой частной задачи Коши имеет вид

$$uv^{-1/\mu} = \psi_2\{y - [(1 + \nu_1 x / u)^{\mu} - 1] v / \nu_2\}. \tag{17}$$

В результате можно решить общую задачу Коши при задании $vu^{-\mu}$ (или $uv^{-1/\mu}$) на $x = 0$ и $y = 0$.

В предельной ситуации, когда, например, $\nu_2 \to 0$, т. е. $\mu \to 0$, решение (15) в эквивалентной форме

$$u + \nu_1 x = f_1(vu^{-\mu}), \qquad -v(u^{-\mu} - 1) / \mu + \nu_1 y = f_2(vu^{-\mu})$$

дает

$$u + \nu_1 x = f_1(v), \quad v \ln u + \nu_1 y = f_2(v), \tag{18}$$

так что решение частной задачи Коши $v(x, 0) = v_{01}(x)$ имеет вид

$$v = v_{01}\left[x - \frac{u}{\nu_1}(e^{\nu_1 y/v} - 1)\right]. \tag{19}$$

Аналогично решение частной задачи Коши $v(0, y) = v_{02}(y)$ имеет вид

$$v = v_{02}\left[y - \frac{v}{\nu_1}\ln\left(1 + \frac{\nu_1 x}{u}\right)\right]. \tag{20}$$

В результате можно решить общую задачу Коши при задании v на $x = 0$ и $y = 0$.

Решение задачи Коши в стационарном плоском случае, когда $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $\delta_\perp \neq 0$, возможно только в неявном виде для обратных функций. Это решение, как и более общие решения, здесь не приводится.

Не представляет труда воспроизвести полученные здесь общие решения и в других системах координат (цилиндрической, сферической и т. д.).

То, что в нестационарном случае решения задачи Коши проще, чем в стационарном случае, является следствием структуры исходных уравнений (3), в которых дифференцирование по времени выделено. Иначе говоря, асимметрия постановки краевой задачи в стационарном случае не соответствует симметричному дифференцированию по пространственным координатам в исходных уравнениях. Впрочем, можно ввести параметрическое представление координат. Тогда постановка краевой задачи будет симметричной.

При отсутствии магнитного поля решения допускают разрывы. Наложение магнитного поля приводит к сглаживанию начальных распределений, так что класс начальных условий, не приводящих к разрывам, расширяется. В простейшем нестационарном одномерном случае достаточным условием отсутствия разрывов является условие $-du_0(x) / dx < \nu_1$.

В заключение отметим, что аналогичные общие решения могут быть получены и при наличии электрического поля, удовлетворяющего условию $\mathbf{E} / B = \mathbf{v}^0 = \text{const}$, которое выполняется в постоянных полях. Так, например, решение (4) при замене $\nu_1 u$ на $\nu_1(u - u^0)$, где $u^0 = \text{const}$, имеет вид

$$u = e^{-\nu_1 t}u_0\left[x - \frac{u - u^0}{\nu}(e^{\nu_1 t} - 1) - u^0 t\right] + u_0(1 - e^{-\nu_1 t}). \tag{21}$$

Это выражение при $u^0 = 0$ совпадает с (6).

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступило
17 VII 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. И. Брагинский, Сборн. Вопросы теории плазмы, в. 1, 1963. [2] Г. М. Бам-Зеликович, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 3 (1963); № 3, 9 (1964); № 5, 12 (1964); ПММ, 28, в. 4, 664 (1964); Прикл. мех. и техн. физ., № 3, 27 (1965); № 4, 27 (1965); № 1, 8 (1967).