Н. А. Изобов, Е. Н. Крупчик, Построение системы Пфаффа с произвольными кусочно-непрерывными характеристическими степенными функциями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 177–185

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 177–185

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.936

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2005 г. Н. А. Изобов, Е. Н. Крупчик

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\partial x/\partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2) \in R^2_{>1}, \quad i = 1, 2, \quad n \in N, \tag{1_n}$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми матрицами $A_i(t)$, удовлетворяющими условию полной интегрируемости [1, с. 43–44; 2, с. 21–24]

$$\partial A_1(t)/\partial t_2 + A_1(t)A_2(t) = \partial A_2(t)/\partial t_1 + A_2(t)A_1(t), \quad t \in R^2_{>1}.$$

Пусть $p = p[x] \in R^2$ и $\lambda = \lambda[x] \in R^2$ – соответственно нижний характеристический [3] и характеристический [4] векторы нетривиального решения $x : R^2_{>1} \to R^n \setminus \{0\}$ системы (1_n), а $P_x = \{p[x]\}$ и $\Lambda_x = \{\lambda[x]\}$ – нижнее характеристическое и характеристическое множества этого решения, являющиеся ограниченными, замкнутыми и представимыми [3, 4] монотонно убывающими соответственно выпуклой вверх и выпуклой вниз кривыми $p_2 = \varphi(p_1) : [\alpha_1, \alpha_2] \to \to [\beta_1, \beta_2]$ и $\lambda_2 = f(\lambda_1) : [a_1, a_2] \to [b_1, b_2]$ плоскости R^2.

Введем в рассмотрение аналоги характеристической степени Б.П. Демидовича [5] функции одной переменной – нижние [6] $\underline{d} = \underline{d}_x(p) \in R^2$ и верхние [7] $\overline{d} = \overline{d}_x(\lambda) \in R^2$ характеристические степени рассматриваемого решения $x \neq 0$, определяемые условиями

$$\underline{ln}_x(p, \underline{d}) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln\|x(t)\| - (p, t) - (\underline{d}, \ln t)}{\|\ln t\|} = 0, \quad \underline{ln}_x(p, \underline{d} + \varepsilon e_i) < 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\overline{ln}_x(\lambda, \overline{d}) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\|x(t)\| - (\lambda, t) - (\overline{d}, \ln t)}{\|\ln t\|} = 0, \quad \overline{ln}_x(\lambda, \overline{d} - \varepsilon e_i) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

в которых $e_i = (2 - i, i - 1)$ и $\ln t \equiv (\ln t_1, \ln t_2) \in R^2_+$, а также нижнее $\underline{D}_x(p) = \{\underline{d}_x(p)\}$ и верхнее $\overline{D}_x(\lambda) = \{\overline{d}_x(\lambda)\}$ степенные множества.

Известно [6], что если для внутренней точки $p = (p_1, \varphi(p_1)) \in P_x$, $p_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, и внутренней точки $\lambda = (\lambda_1, f(\lambda_1)) \in \Lambda_x$, $\lambda_1 \in (a_1, a_2)$, существуют соответственно конечные пределы $\underline{c}_x(p_1) \equiv \sqrt{2}\,\underline{ln}_x((p_1, \varphi(p_1)), 0)$ и $\overline{c}_x(\lambda_1) \equiv \sqrt{2}\,\overline{ln}_x((\lambda_1, f(\lambda_1)), 0)$, то индивидуальные внутренние нижнее $\underline{D}_x(p)$ и верхнее $\overline{D}_x(\lambda)$ степенные множества решения $x \neq 0$ есть соответственно прямые $\underline{d}_1 + \underline{d}_2 = \underline{c}_x(p_1)$ и $\overline{d}_1 + \overline{d}_2 = \overline{c}_x(\lambda_1)$ плоскости R^2.

В работе [8] установлено, что левое $\underline{D}_x(p')$, $p' = (\alpha_1, \beta_2)$, и правое $\underline{D}_x(p'')$, $p'' = (\alpha_2, \beta_1)$, граничные нижние, и левое $\overline{D}_x(\lambda')$, $\lambda' = (a_1, b_2)$, и правое $\overline{D}_x(\lambda'')$, $\lambda'' = (a_2, b_1)$, граничные верхние степенные множества решения $x \neq 0$ системы (1_n) могут не совпадать ни с какой прямой двумерной плоскости и даже не содержать отрезка прямой.

Поэтому естественно ввести в рассмотрение *нижнюю* $\underline{c}_x(p_1)$ *и верхнюю* $\overline{c}_x(\lambda_1)$ *характеристические степенные функции* решения $x \neq 0$ системы (1_n), определенные на интервалах (α_1, α_2) и (a_1, a_2) соответственно.

В работе [6] начато исследование этих функций, а именно для некоторых кусочно-постоянных и некоторых непрерывных функций построены такие вполне интегрируемые системы Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, что характеристические степенные функции $\underline{c}_x(p_1)$ и $\overline{c}_x(\lambda_1)$ нетривиальных решений этих систем совпадают с заданными функциями. Следующим шагом к описанию функций $\underline{c}_x(p_1)$ и $\overline{c}_x(\lambda_1)$ является реализация произвольно заданной кусочно-непрерывной функции характеристическими степенными функциями какого-то нетривиального решения некоторой системы (1_n).

Под кусочно-непрерывной на отрезке функцией, согласно [9, с. 106], будем понимать функцию, непрерывную всюду на этом отрезке, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Справедлива

Теорема 1. *Для произвольных натурального числа n и кусочно-непрерывной функции $g : [\alpha_1, \alpha_2] \to R$ существует такая вполне интегрируемая система Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, что для всякого ее нетривиального решения $x : R^2_{>1} \to R^n \setminus \{0\}$ область определения кривой P_x совпадает с отрезком $[\alpha_1, \alpha_2]$ и выполнено равенство*

$$\underline{c}_x(p_1) = g(p_1), \quad \forall p_1 \in (\alpha_1, \alpha_2). \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что ее доказательство достаточно провести для случая $n = 1$. Действительно, построив одномерное вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$\partial x/\partial t_i = a_i(t)x, \quad x \in R, \quad t \in R^2_{>1}, \quad i = 1, 2, \tag{1_1}$$

с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и нижней характеристической степенной функцией $\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])$ своего нетривиального решения $x_1 : R^2_{>1} \to R \setminus \{0\}$, совпадающей с функцией $g(p_1[x_1])$ для всех $p_1[x_1] \in (\alpha_1, \alpha_2)$, требуемую n-мерную систему (1_n) можно взять диагональной с матрицей коэффициентов $A_i(t) = \mathrm{diag}[a_i(t), \ldots, a_i(t)]$, $i = 1, 2$, n-го порядка. Тогда матрица $X(t) = x_1(t)E_n$, где E_n – единичная матрица n-го порядка, является фундаментальной матрицей построенной системы (1_n) и всякое ее нетривиальное решение $x : R^2_{>1} \to R^n \setminus \{0\}$ представимо в виде $x(t) = X(t)c = x_1(t)c$ с некоторым $c \in R^n \setminus \{0\}$. Поэтому у этого решения и решения x_1 уравнения (1_1) совпадают нижние характеристические векторы $p[x] = p[x_1]$, а тем самым и нижние характеристические степенные функции $\underline{c}_x(p_1[x]) = \underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])$.

Рассмотрим вначале случай отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$, расположенного на прямой R так, что справедливы неравенства $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение x уравнения Пфаффа (1_1) будем строить в виде

$$\ln x(t) = \ln \phi(t) + \nu(t) \ln \psi(t), \quad t \in R^2_{>1}. \tag{3}$$

Функцию ϕ будем определять таким образом, чтобы область определения кривой P_ϕ ее нижнего характеристического множества совпадала с отрезком $[\alpha_1, \alpha_2]$ и все точки $p[\phi]$ нижнего характеристического множества P_ϕ реализовывались по разным направлениям $\theta_t \equiv t_2/t_1$, зависящим от $p[\phi]$. Функцию ν будем задавать на основе функции $g(-\sqrt{\theta_t})$ так, чтобы для решения x выполнялось равенство (2), функция $\ln x$ была бесконечно дифференцируема и ее производные $\partial \ln x(t)/\partial t_i$, $i = 1, 2$, были ограничены.

С помощью бесконечно дифференцируемой стандартной функции [10, с. 54]

$$e_{01}(\tau; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \exp\{-(\tau - \tau_1)^{-2} \exp[-(\tau_2 - \tau)^{-2}]\}, & \tau \in (\tau_1, \tau_2), \\ [1 + \mathrm{sgn}(\tau - 2^{-1}(\tau_1 + \tau_2))]/2, & \tau \notin (\tau_1, \tau_2), \end{cases}$$

$-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$, определим также бесконечно дифференцируемые функции ϕ и ψ соответственно равенствами

$$\ln \phi(t) = -2\sqrt{t_1 t_2} + (2\sqrt{t_1 t_2} + t_2/\alpha_1) e_{01}(\theta_t/(2\alpha_1^2); 1/2, 1) + (2\sqrt{t_1 t_2} + \alpha_2 t_1)[1 - e_{01}(\theta_t/\alpha_2^2; 1/2, 1)], \tag{4}$$

$$\ln \psi(t) = e_{01}(\theta_t/\alpha_2^2; 1/2, 1)[1 - e_{01}(\theta_t/(2\alpha_1^2); 1/2, 1)] \ln t_1, \quad t \in R^2_{>1}. \tag{5}$$

Пусть функция g на интервале (α_1, α_2) имеет k точек разрыва $\alpha_1 < \Delta_1 < \Delta_2 < \ldots \ldots < \Delta_k < \alpha_2$. Обозначим для удобства записи $\Delta_0 = \alpha_1$, $\Delta_{k+1} = \alpha_2$ и $\tau_j = \Delta_j - \Delta_{j-1}$, $j = \overline{1, k+1}$. По функции g введем в рассмотрение новые функции $g_j : [\Delta_{j-1}, \Delta_j] \to R$, $j = \overline{1, k+1}$, заданные равенствами $g_j(\Delta) = g(\Delta)$, $\Delta \in (\Delta_{j-1}, \Delta_j)$, $g_j(\Delta_{j-1}) = g(\Delta_{j-1} + 0)$, $g_j(\Delta_j) = g(\Delta_j - 0)$. Очевидно, что каждая функция g_j является непрерывной на отрезке $[\Delta_{j-1}, \Delta_j]$, $j = \overline{1, k+1}$. По теореме Вейерштрасса о приближении функций для каждой функции $g_j(\Delta)$ существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_l^{(j)}(\Delta)\}_{l \in N}$, равномерно сходящаяся на $[\Delta_{j-1}, \Delta_j]$ к функции $g_j(\Delta)$. В силу теоремы Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях корректны следующие обозначения:

$$\mu_l = \max_{j=\overline{1,k+1}} \Big(\max_{\Delta \in [\Delta_{j-1}, \Delta_j]} |P_l^{(j)}(\Delta)| \Big) < +\infty, \quad \rho_l = \max_{j=\overline{1,k+1}} \Big(\max_{\Delta \in [\Delta_{j-1}, \Delta_j]} |dP_l^{(j)}(\Delta)/d\Delta| \Big) < +\infty.$$

Исходя из некоторого значения $\delta_0 > \big(\max_{j=\overline{0,k+1}} |g(\Delta_j)|\big)^4 (1 + 2\alpha_1^2) + 1$, введем в рассмотрение числа $\gamma_l = (\delta_{l-1} + (1 + \rho_l^2 + \mu_l^4)(1 + \alpha_1^2)) l^2$ и $\delta_l = \gamma_l e^2$, $l \in N$. Разобьем квадрант $R^2_{>1}$ – область определения строящегося решения x – на непересекающиеся "основные" $\Pi(l) = \{t \in R^2_{>1} : \delta_l \le t_1 + t_2 \equiv \zeta(t) \le \gamma_{l+1}\}$ и "переходные" $\tilde{\Pi}(l) = \{t \in R^2_{>1} : \gamma_l < \zeta(t) < \delta_l\}$, $l \in N$, полосы и треугольник $T = \{t \in R^2_{>1} : \zeta(t) \le \gamma_1\}$.

Перейдем теперь к построению функции ν. Определим вначале вспомогательные функции ν_l, $l \in N$, по следующему правилу:

$$\nu_l(t) = P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}), \quad \theta_t \in [(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1} + \tau_j/(2\sqrt{l}))^2], \quad j = \overline{1, k+1}, \tag{6_1}$$

$$\nu_l(t) = g(\Delta_j), \quad \theta_t \in [(\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2], \quad j = \overline{1, k}, \tag{6_2}$$

$$\begin{gathered} \nu_l(t) = P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) + [g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})][1 - e_{01}(2\sqrt{l}(\Delta_j + \sqrt{\theta_t})/\tau_j; 1/2, 1)], \\ \theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{1, k+1}, \end{gathered} \tag{6_3}$$

$$\begin{gathered} \nu_l(t) = g(\Delta_j) + [P_l^{(j+1)}(-\sqrt{\theta_t}) - g(\Delta_j)][1 - e_{01}(2\sqrt{l}(\Delta_j + \sqrt{\theta_t})/\tau_{j+1}; -1, -1/2)], \\ \theta_t \in ((\Delta_j + \tau_{j+1}/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{0, k}, \end{gathered} \tag{6_4}$$

$$\nu_l(t) = g(\alpha_1), \quad \theta_t \ge (\alpha_1 + \tau_1/(4\sqrt{l}))^2, \tag{6_5}$$

$$\nu_l(t) = g(\alpha_2), \quad \theta_t \le (\alpha_2 - \tau_{k+1}/(4\sqrt{l}))^2. \tag{6_6}$$

Равенствами $(6_1)-(6_6)$ функция ν_l задана во всем квадранте $R^2_{>1}$. Требуемую функцию ν в "основных" полосах $\Pi(l)$ положим равной функции ν_l, т.е.

$$\nu(t) = \nu_l(t), \quad t \in \Pi(l), \quad l \in N. \tag{7_1}$$

В "переходных" полосах осуществим переход от функции ν_{l-1} к функции ν_l :

$$\nu(t) = \nu_{l-1}(t) + [\nu_l(t) - \nu_{l-1}(t)] e_{01}(\ln\zeta(t); \ln\gamma_l, \ln\delta_l), \quad t \in \tilde{\Pi}(l), \quad l = 2, 3, \ldots \tag{7_2}$$

Наконец, положим

$$\nu(t) = \nu_1(t) e_{01}(\ln\zeta(t); \ln\gamma_1, \ln\delta_1), \quad t \in T \cup \tilde{\Pi}(1). \tag{7_3}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ НИЖНЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЯ x

2.1. Построение нижнего характеристического множества функции ϕ. Покажем, что множество $P \equiv \{p \in R^2_- : p_1p_2 = 1,\ \alpha_1 \le p_1 \le \alpha_2\}$ является нижним характеристическим множеством функции ϕ. Очевидно, что при $\alpha_2^2/2 \le \theta_t \le 2\alpha_1^2$ выполнены неравенства

$$2\sqrt{t_1t_2} + t_2/\alpha_1 \ge -\sqrt{2}t_2/\alpha_1 + t_2/\alpha_1 = -(\sqrt{2}-1)t_2/\alpha_1 \ge 0,$$

$$2\sqrt{t_1t_2} + \alpha_2 t_1 \ge -\sqrt{2}\alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_1 = -\alpha_2(\sqrt{2}-1)t_1 \ge 0.$$

Возьмем произвольный вектор $p \in P$ и обозначим $R_\phi(p,t) \equiv \ln\phi(t) - (p,t)$, оценим снизу величину $R_\phi(p,t)$. При $\alpha_2^2/2 \le \theta_t \le 2\alpha_1^2$ получим неравенство

$$R_\phi(p,t) \ge -2\sqrt{t_1t_2} - p_1t_1 - t_2/p_1 = -t_1(p_1+\sqrt{\theta_t})^2/p_1 \ge 0. \qquad (8_1)$$

Из равенства (4) при $\theta_t \ge 2\alpha_1^2$ вытекает оценка

$$R_\phi(p,t) = t_2/\alpha_1 - p_1t_1 - t_2/p_1 \ge (1/\alpha_1 - 1/p_1)t_2 - p_1t_1 \ge -p_1t_1 > 0. \qquad (8_2)$$

Наконец при $\theta_t \le \alpha_2^2/2$, используя (4), имеем неравенство

$$R_\phi(p,t) = \alpha_2 t_1 - p_1t_1 - t_2/p_1 \ge (\alpha_2 - p_1)t_1 \ge 0. \qquad (8_3)$$

Из оценок $(8_1)-(8_3)$ вытекает неравенство $\underline{l}_\phi(p) \equiv \varliminf\limits_{t\to\infty} R_\phi(p,t)/\|t\| \ge 0$. Равенство $\underline{l}_\phi(p) = 0$, а также второе условие $\underline{l}_\phi(p+\varepsilon e_i) < 0$, $\forall\varepsilon > 0$, $i = 1,2$, определения [3] нижнего характеристического вектора устанавливаются по направлению $t_2 = p_1^2 t_1$, $t_1 \to +\infty$. Следовательно, показано включение $P \subset P_\phi$. С другой стороны, для произвольного нижнего характеристического вектора $p = (p_1,p_2) \in P_\phi$ по направлениям $t_2 = e$, $t_1 \to +\infty$ и $t_1 = e$, $t_2 \to +\infty$, получаем соответственно неравенства $p_1 \le \alpha_2$ и $p_2 \le 1/\alpha_1$. А поскольку множество P_ϕ представимо [3] строго монотонно убывающей кривой, то оно необходимо совпадает со множеством P.

2.2. Доказательство совпадения нижнего характеристического множества решения x со множеством P. Покажем, что нижнее характеристическое множество P_x решения x совпадает с нижним характеристическим множеством P_ϕ функции ϕ. Для этого установим существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \|t\|^{-1}\nu(t)\ln\psi(t) = 0. \qquad (9)$$

Обозначая $\Pi L(l) = \tilde{\Pi}(l) \cup \Pi(l) \cup \tilde{\Pi}(l+1)$, $l \in N$, и фиксируя $l \in N$, оцениваем функцию ν_l в полосе $\Pi L(l)$. Отметим вначале, что из принадлежности θ_t отрезку $[(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1}+\tau_j/(2\sqrt{l}))^2]$ следуют неравенства $\Delta_{j-1} < \Delta_{j-1}+\tau_j/(2\sqrt{l}) \le -\sqrt{\theta_t} \le \Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}) < \Delta_j$, дающие оценку $|P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})| \le \mu_l$. Так как в полосе $\Pi L(l)$ выполнено неравенство $\zeta(t) \ge \mu_l^4(1+\alpha_1^2)$, то в силу (6_1) справедлива оценка

$$|\nu_l(t)| = |P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})| \le \mu_l \le \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in [(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1}+\tau_j/(2\sqrt{l}))^2], \qquad (10_1)$$

$$j = \overline{1,k+1},\ t \in \Pi l(l).$$

С помощью неравенства $\zeta(t) \ge (\max\limits_{j=\overline{0,k+1}} |g(\Delta_j)|)^4(1+2\alpha_1^2)$, справедливого в каждой полосе $\Pi L(l)$, $l \in N$, из равенства (6_2) получаем оценки

$$|\nu_l(t)| = |g(\Delta_j)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in [(\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2], \qquad (10_2)$$

$$j = \overline{1,k}, \quad t \in \Pi L(l).$$

В силу (6_5) и (6_6) выполнены соответственно неравенства

$$|\nu_l(t)| = |g(\alpha_1)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad 2\alpha_1^2 \ge \theta_t \ge (\alpha_1 + \tau_1/(4\sqrt{l}))^2, \quad t \in \Pi L(l), \tag{10_3}$$

$$|\nu_l(t)| = |g(\alpha_2)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \le (\alpha_2 - \tau_{k+1}/(4\sqrt{l}))^2, \quad t \in \Pi L(l). \tag{10_4}$$

Пусть теперь справедливо включение $\theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2)$ с некоторым $j \in \{1,\ldots,k+1\}$ и $t \in \Pi L(l)$. Если выполнено неравенство $g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \ge 0$, то из (6_3) получаем оценки

$$\nu_l(t) \ge P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \ge -|P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})| \ge -\sqrt[4]{t_1},$$

$$\nu_l(t) \le P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) + g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \le |g(\Delta_j)| \le \sqrt[4]{t_1}.$$

Если же $g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) < 0$, то имеем неравенства

$$\nu_l(t) \le P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \le \sqrt[4]{t_1}, \quad \nu_l(t) \ge P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) + g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \ge -|g(\Delta_j)| \ge -\sqrt[4]{t_1}.$$

Тем самым доказана оценка

$$|\nu_l(t)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{1,k+1}, \quad t \in \Pi L(l). \tag{10_5}$$

Аналогично можно показать справедливость неравенства

$$|\nu_l(t)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in ((\Delta_j + \tau_{j+1}/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{0,k}, \quad t \in \Pi L(l). \tag{10_6}$$

Таким образом, для каждого $l \in N$ из оценок $(10_1)-(10_6)$ устанавливается неравенство

$$|\nu_l(t)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad t \in \Pi L(l), \quad \theta_t \le 2\alpha_1^2. \tag{11}$$

В силу определений $(7_1)-(7_3)$ функции $\nu(t)$ и неравенства (11) имеет место оценка

$$|\nu(t)| \le \sqrt[4]{t_1}, \quad t \in R^2_{>1}, \quad \theta_t \le 2\alpha_1^2. \tag{12}$$

С помощью равенства (5) и оценки (12) получаем неравенство

$$|\nu(t)\ln\psi(t)| \le \sqrt[4]{t_1}\ln t_1, \quad t \in R^2_{>1}, \tag{13}$$

дающее равенство (9). Тем самым установлено совпадение нижнего характеристического множества P_x решения x уравнения (1_1) со множеством P.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА (2) ДЛЯ ПОСТРОЕННОГО РЕШЕНИЯ x

Возьмем произвольную внутреннюю точку $p = (p_1, \varphi(p_1))$, $\alpha_1 < p_1 < \alpha_2$, нижнего характеристического множества P_x. Пусть предел $\underline{ln}_x(p,0)$ реализуется по последовательности $\{t(m)\}$ [6], для которой существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_{t(m)} = \theta > 0$. Возможны лишь два случая: $\theta \ne p_1^2$; $\theta = p_1^2$.

Пусть $\theta \ne p_1^2$. Поскольку справедливо равенство $\lim\limits_{m\to\infty}(p_1 + \sqrt{\theta_{t(m)}})^2 = (p_1 + \sqrt{\theta})^2 > 0$, то последовательность $\{t(m)\}$ в этом случае без нарушения общности можно считать удовлетворяющей неравенству $(p_1 + \sqrt{\theta_{t(m)}})^2 \ge (p_1 + \sqrt{\theta})^2/2 > 0$, $m \in N$. Из оценок $(8_1)-(8_3)$ следует неравенство $R_\phi(p,t) \ge Mt_1(m)$, $M = \min\{-(p_1+\sqrt{\theta})^2/(2p_1); -p_1; \alpha_2 - p_1\} > 0$. Тогда с помощью (13) получаем оценку $\underline{ln}_x(p,0) \ge \lim\limits_{m\to\infty}(Mt_1(m) - \sqrt[4]{t_1(m)}\ln t_1(m))/\|\ln t(m)\| = +\infty$.

Предположим теперь, что выполнено равенство $\theta = p_1^2$. Без ограничения общности будем считать, что все члены $t(m)$ последовательности, реализующей нижний предел $\underline{ln}_x(p,0)$, принадлежат полосам $\tilde{\Pi}(l_m) \cup \Pi(l_m)$ с разными номерами $l_m > 1$, $l_{m+1} > l_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$. Возможны два случая: p_1 не совпадает ни с какой точкой разрыва функции $g(\Delta)$, т.е. $p_1 \in (\Delta_{j_0-1}, \Delta_{j_0})$, $j_0 \in \{1, \ldots, k+1\}$; p_1 совпадает с некоторой точкой разрыва Δ_{j_0}, $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$, функции $g(\Delta)$.

В первом случае в силу справедливости включения $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_{t(m)} = p_1^2 \in ((\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2$, $(\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2)$ с некоторым $l_0 \in N$ последовательность $\{t(m)\}$ без ограничения общности будем считать такой, что выполнены неравенства $(\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2 < \theta_{t(m)} <$ $< (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2$, $\forall m \in N$. Снова, не нарушая общности, будем предполагать, что $l_m - 1 \geq l_0$, $\forall m \in N$. Следовательно, имеют место неравенства

$$(\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_m - 1}))^2 < \theta_{t(m)} < (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_m - 1}))^2, \quad \forall m \in N. \tag{14}$$

Без нарушения общности можно рассматривать лишь две возможности: 1) $t(m) \in \Pi(l_m)$ при всех $m \in N$; 2) $t(m) \in \tilde{\Pi}(l_m)$ также при всех $m \in N$. В случае первой возможности с помощью формул (7_1), (6_1) и неравенства (14) получаем равенство $\nu(t(m)) = P_{l_m}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}})$, а (5) и (14) – равенство $\ln\phi(t(m)) = \ln t_1(m)$. Отсюда в силу $(8_1)-(8_3)$ и равномерной сходимости многочленов $P_{l_m}^{(j_0)}(\Delta)$ к функции $g_{j_0}(\Delta)$ при $m \to \infty$ на отрезке $[\Delta_{j_0-1}, \Delta_{j_0}]$, а также неравенств $\Delta_{j_0-1} < -\sqrt{\theta_{t(m)}} < \Delta_{j_0}$, $\forall m \in N$, и непрерывности функции g_{j_0} на отрезке $[\Delta_{j_0-1}, \Delta_{j_0}]$ имеем оценки

$$\underline{ln}_x(p,0) \geq \lim_{m\to\infty} (P_{l_m}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}}) \ln t_1(m))/\|\ln t(m)\| = \lim_{m\to\infty} P_{l_m}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}})/\sqrt{2} = g(p_1)/\sqrt{2}.$$

Если же имеет место вторая возможность, то снова без нарушения общности будем рассматривать лишь два случая: справедливо неравенство $\nu_{l_m}(t(m)) \leq \nu_{l_m-1}(t(m))$ при всех $m \in N$ и противоположное неравенство $\nu_{l_m}(t(m)) > \nu_{l_m-1}(t(m))$ также при всех $m \in N$. В первом случае из (7_2) следует оценка $\nu(t(m)) \geq \nu_{l_m}(t(m))$, дающая неравенство $\underline{ln}_x(p,0) \geq g(p_1)/\sqrt{2}$. Во втором же случае из (7_2) и (14) имеем неравенство $\nu(t(m)) \geq \nu_{l_m-1}(t(m)) = P_{l_m-1}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}})$. Тем самым снова получаем оценки

$$\underline{ln}_x(p,0) \geq \lim_{m\to\infty} (P_{l_m-1}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}}) \ln t_1(m))/\|\ln t(m)\| = g(p_1)/\sqrt{2}.$$

По некоторой последовательности $\{\tau(m)\}$, $\tau(m) \in \Pi(m)$, $\theta_{\tau(m)} = p_1^2$, $m \geq l_0$, $m \in N$, в силу выполнения неравенств $(\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{m}))^2 < \theta_{\tau(m)} < (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{m}))^2$, $m \geq l_0$, $m \in N$, из (7_1) и (6_1) вытекают равенства $\nu(\tau(m)) = \nu_m(\tau(m)) = P_m^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{\tau(m)}})$, а следовательно, и равенства

$$\lim_{m\to\infty} (R_\phi(p, \tau(m)) + P_m^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{\tau(m)}}) \ln \tau_1(m))/\|\ln \tau(m)\| = \lim_{m\to\infty} P_m^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}})/\sqrt{2} = g(p_1)/\sqrt{2}.$$

Таким образом, необходимое равенство (2) доказано для всех точек p_1 непрерывности функции g.

Пусть теперь p_1 совпадает с некоторой точкой разрыва Δ_{j_0}, $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$, функции g. Без нарушения общности будем рассматривать лишь три возможности:

1) $(\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m}))^2 \leq \theta_{t(m)} \leq (\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m}))^2$ при всех $m \in N$;
2) $\alpha_1^2 > \theta_{t(m)} > (\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m}))^2$ при всех $m \in N$;
3) $\alpha_2^2 < \theta_{t(m)} < (\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m}))^2$ при всех $m \in N$.

В случае первой возможности справедливо равенство $\nu_{l_m}(t(m)) = g(\Delta_{j_0})$, $m \in N$, а из неравенств $(\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m - 1}))^2 \leq \theta_{t(m)} \leq (\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m - 1}))^2$, $m \in N$, и (6_2) следует равенство $\nu_{l_m-1}(t(m)) = g(\Delta_{j_0})$, $m \in N$. Из (7_1) и (7_2) имеем $\nu(t(m)) = g(\Delta_{j_0})$, $m \in N$. Таким образом, получаем оценки

$$\underline{ln}_x(p,0) \geq \lim_{m\to\infty}(g(\Delta_{j_0})\ln t_1(m))/\|\ln t(m)\| = g(\Delta_{j_0})/\sqrt{2}.$$

Если имеет место вторая возможность, то выполнено неравенство $\sqrt{\theta_{t(m)}} > -\Delta_{j_0}+\tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m})$, $m \in N$. Из принадлежности $t(m) \in \tilde{\Pi}(l_m)\cup\Pi(l_m)$ и построения полос вытекает оценка $\zeta(t(m)) \geq l_m^2(1+\alpha_1^2)$, $m \in N$, дающая неравенство $\sqrt{t_1(m)} \geq l_m$. С помощью (8_1) устанавливаются оценки

$$R_\phi(p,t(m)) \geq -t_1(m)(\Delta_{j_0}+\sqrt{\theta_{t(m)}})^2/\Delta_{j_0} \geq -t_1(m)\tau_{j_0}^2/(16 l_m\Delta_{j_0}) \geq -\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0}^2/(16\Delta_{j_0}).$$

Следовательно, в силу (13) имеет место неравенство

$$\underline{ln}_x(p,0) \geq \lim_{m\to\infty}(-\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0}^2/(16\Delta_{j_0}) - \sqrt[4]{t_1(m)}\ln t_1(m))/\|\ln t(m)\| = +\infty.$$

В случае же третьей возможности выполнено соотношение $\sqrt{\theta_{t(m)}} < -(\Delta_{j_0}+\tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m}))$, $m \in N$. Из принадлежности $t(m) \in \tilde{\Pi}(l_m)\cup\Pi(l_m)$ снова имеем неравенство $\sqrt{t_1(m)} \geq l_m$. Используя неравенство (8_1), получаем оценки

$$R_\phi(p,t(m)) \geq -t_1(m)(\Delta_{j_0}+\sqrt{\theta_{t(m)}})^2/\Delta_{j_0} \geq -t_1(m)\tau_{j_0+1}^2/(16 l_m\Delta_{j_0}) \geq -\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0+1}^2/(16\Delta_{j_0}),$$

дающие неравенство

$$\underline{ln}_x(p,0) \geq \lim_{m\to\infty}(-\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0+1}^2/(16\Delta_{j_0}) - \sqrt[4]{t_1(m)}\ln t_1(m))/\|\ln t(m)\| = +\infty.$$

Кроме того, по некоторой последовательности $\{\tau(m)\}$, $\tau(m) \in \Pi(m)$, $\theta_{\tau(m)} = \Delta_{j_0}^2$, $m \in N$, выполняется равенство $\nu(\tau(m)) = g(\Delta_{j_0})$, а следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}(R_\phi(p,\tau(m)) + g(\Delta_{j_0})\ln\tau_1(m))/\|\ln\tau(m)\| = g(\Delta_{j_0})/\sqrt{2}.$$

Таким образом, равенство (2) установлено и для точек разрыва Δ_j, $j=\overline{1,k}$, функции g.

4. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Функция $x > 0$, заданная равенством (3), является решением уравнения (1_1) с коэффициентами $a_i(t) = \partial\ln x(t)/\partial t_i$, $t \in R^2_{>1}$, $i = 1,2$, удовлетворяющими условию полной интегрируемости в силу бесконечной в $R^2_{>1}$ дифференцируемости $\ln x$.

Используя неравенство

$$0 \leq \frac{de_{01}(\tau;\tau_1,\tau_2)}{d\tau} \leq \begin{cases} 2\exp[2(\tau_2-\tau_1)^{-2}], & \tau_2-\tau_1 \leq 1/2, \\ 4, & \tau_2-\tau_1 \geq 2, \end{cases} \tag{15}$$

из леммы работы [11], покажем ограниченность этих коэффициентов.

Вначале докажем ограниченность производных $\partial\ln\phi(t)/\partial t_i$, $i=1,2$. При $\alpha_2^2/2 \leq \theta_t \leq 2\alpha_1^2$ имеем оценки

$$|\partial\ln\phi(t)/\partial t_1| \leq 3\sqrt{\theta_t} - \alpha_2 + e^8(2\theta_t^{3/2} - \theta_t^2/\alpha_1)/\alpha_1^2 + 2e^8(2\theta_t^{3/2} - \alpha_2\theta_t)/\alpha_2^2 \leq \sigma_1,$$

$$|\partial\ln\phi(t)/\partial t_2| \leq 3\sqrt{\theta_t^{-1}} - 1/\alpha_1 + e^8(2\sqrt{\theta_t} - \theta_t/\alpha_1)/\alpha_1^2 + 2e^8(2\sqrt{\theta_t} - \alpha_2)/\alpha_2^2 \leq \sigma_1$$

с некоторой постоянной $\sigma_1 > 0$. Ограниченность же этих производных при $\theta_t < \alpha_2^2/2$ и $\theta_t > 2\alpha_1^2$ очевидна.

Перейдем теперь к доказательству ограниченности частных производных от произведения $\nu(t)\ln\psi(t)$. В силу (5) справедливо равенство

$$\nu(t)\ln\psi(t) = 0, \quad t \in R^2_{>1}, \quad \theta_t \in (0, \alpha_2^2/2] \cup [2\alpha_1^2, +\infty), \tag{16}$$

из которого следует, что ограниченность производных $\partial(\nu(t)\ln\psi(t))/\partial t_i$, $i = 1, 2$, необходимо показать лишь при $\theta_t \in (\alpha_2^2/2, 2\alpha_1^2)$. С помощью (12) и (5) имеем неравенства

$$|\nu(t)\partial\ln\psi(t)/\partial t_1| \le \sqrt[4]{t_1}(2e^8(2\alpha_1^2/\alpha_2^2+1)(\ln t_1)/t_1 + 1/t_1) \le \sigma_2, \quad t \in R^2_{>1}, \quad \theta_t \in (\alpha_2^2/2, 2\alpha_1^2),$$

$$|\nu(t)\partial\ln\psi(t)/\partial t_2| \le \sqrt[4]{t_1}(2e^8/(t_1\alpha_2^2) + e^8/(t_1\alpha_1^2))\ln t_1 \le \sigma_2, \quad t \in R^2_{>1}, \quad \theta_t \in (\alpha_2^2/2, 2\alpha_1^2),$$

с некоторой постоянной $\sigma_2 > 0$.

Зафиксируем $l \in N$ и оценим производные функции ν_l в полосе $\Pi L(l)$. Пусть $\theta_t \in [(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1} + \tau_j/(2\sqrt{l}))^2]$ с некоторым $j \in \{1, \ldots, k+1\}$, $t \in \Pi L(l)$. Тогда из (6_1) и выполнения неравенства $\zeta(t) \ge \rho_l^2(1+\alpha_1^2)$, $t \in \Pi L(l)$, вытекают оценки

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_1| = |dP_l^{(j)}(\Delta)/d\Delta|_{\Delta=-\sqrt{\theta_t}}\sqrt{\theta_t}/(2t_1) \le -\rho_l\alpha_1/(2t_1) \le -\alpha_1/(2\sqrt{t_1}), \tag{17_1}$$

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_2| \le \rho_l/(2\sqrt{\theta_t}t_1) \le -1/(2\alpha_2\sqrt{t_1}). \tag{17_2}$$

Если же $\theta_t \in [(\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2]$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, либо $\theta_t \ge (\alpha_1 + \tau_1/(4\sqrt{l}))^2$, либо $\theta_t \le (\alpha_2 - \tau_{k+1}/(4\sqrt{l}))^2$, то имеет место равенство

$$\partial\nu_l(t)/\partial t_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{17_3}$$

В случае справедливости включения $\theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2)$, $j \in \{1, \ldots, k+1\}$, $t \in \Pi L(l)$, из (6_3) и неравенств $t_1 \ge \mu_l^4 l^2$, $t_1 \ge |g(\Delta_j)|^4 l^2$ по аналогии с (17_1), (17_2) получаем оценки

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_1| \le -\alpha_1/\sqrt{t_1} + 2e^8(|g(\Delta_j)| + \mu_l)\sqrt{l}\sqrt{\theta_t}/(t_1\tau_j) \le -\alpha_1/\sqrt{t_1} - 4e^8\alpha_1/(\sqrt[4]{t_1^3}\tau_j), \tag{17_4}$$

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_2| \le -1/(\alpha_2\sqrt{t_1}) + 2e^8(|g(\Delta_j)| + \mu_l)\sqrt{l}/(\sqrt{\theta_t}t_1\tau_j) \le -1/(\alpha_2\sqrt{t_1}) - 4e^8/(\alpha_2\sqrt[4]{t_1^3}\tau_j). \tag{17_5}$$

Наконец, если имеет место включение $\theta_t \in ((\Delta_j + \tau_{j+1}/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2)$, $j \in \{0, \ldots, k\}$, $t \in \Pi L(l)$, то из (6_4) аналогичным образом следуют неравенства

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_1| \le -\alpha_1/(2\sqrt{t_1}) + 2e^8(\mu_l + |g(\Delta_j)|)\sqrt{l}\sqrt{\theta_t}/(t_1\tau_{j+1}) \le$$
$$\le -\alpha_1/(2\sqrt{t_1}) - 4e^8\alpha_1/(\sqrt[4]{t_1^3}\tau_{j+1}), \tag{17_6}$$

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_2| \le -1/(2\alpha_2\sqrt{t_1}) + 2e^8(\mu_l + |g(\Delta_j)|)\sqrt{l}/(\sqrt{\theta_t}t_1\tau_{j+1}) \le$$
$$\le -1/(2\alpha_2\sqrt{t_1}) - 4e^8/(\alpha_2\sqrt[4]{t_1^3}\tau_{j+1}). \tag{17_7}$$

Оценки (17_1) – (17_7) устанавливают неравенство

$$|\partial\nu_l(t)/\partial t_i| \le \sigma_3/\sqrt{t_1}, \quad t \in \Pi L(l), \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

с некоторой постоянной $\sigma_3 > 0$.

Из определения (7_1) функции $\nu(t)$ в "основных" полосах $\Pi(l)$ и (18) получаем оценки

$$|\partial\nu(t)/\partial t_i| \le \sigma_3/\sqrt{t_1}, \quad t \in \Pi(l), \quad l \in N, \quad i = 1, 2. \tag{19_1}$$

В силу (7_2), (7_3), (18) и (11), применяя второе неравенство из (15), имеем оценки

$$|\partial\nu(t)/\partial t_i| \le \sigma_3/\sqrt{t_1} + 8\sqrt[4]{t_1}/\zeta(t) \le \sigma_3/\sqrt{t_1} + 8/\sqrt[4]{t_1^3}, \quad t \in \tilde{\Pi}(l),\ l \in N,\ \theta_t \le 2\alpha_1^2,\ i = 1, 2. \tag{19_2}$$

Таким образом, из неравенств (19_1), (19_2), равенства $\nu(t)=0$, $t\in T$, и оценки $|\ln\psi(t)|\le\le\ln t_1$, $t\in R^2_{>1}$, а также (16) вытекает ограниченность произведений $(\partial\nu(t)/\partial t_i)\ln\psi(t)$, $t\in R^2_{>1}$, $i=1,2$. Тем самым установлена ограниченность коэффициентов построенной системы (1_1). Теорема 1 в случае $\alpha_1<\alpha_2<0$ полностью доказана.

В случае же $\alpha_2\ge 0$ на основе функции g определим новую функцию $g_1:[\alpha_1-\alpha_2-1,-1]\to R$, $g_1(\Delta)=g(\Delta+\alpha_2+1)$. Тогда, как и выше, для функции g_1 построим бесконечно дифференцируемую функцию $x_1>0$, имеющую ограниченные производные $\partial\ln x_1(t)/\partial t_i$, $i=1,2$, область определения кривой нижнего характеристического множества P_{x_1} которой совпадает с отрезком $[\alpha_1-\alpha_2-1,-1]$ и для которой справедливо равенство $\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])=g_1(p_1[x_1])$, $\forall p_1[x_1]\in(\alpha_1-\alpha_2-1,-1)$. Нижние характеристические векторы $(p_1[x],\varphi(p_1[x]))\in P_x$ и $(p_1[x_1],\varphi_1(p_1[x_1]))\in P_{x_1}$ соответственно функций $x(t)=x_1(t)\exp[(\alpha_2++1)t_1]$ и $x_1(t)$ связаны условиями $p_1[x]=p_1[x_1]+\alpha_2+1\in[\alpha_1,\alpha_2]$, $\varphi(p_1[x])=\varphi_1(p_1[x]--\alpha_2-1)$, а нижние характеристические степенные функции – равенствами $\underline{c}_x(p_1[x])==\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])=g_1(p_1[x_1])=g(p_1[x])$. Очевидно, функция x является решением вполне интегрируемого уравнения Пфаффа (1_1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, что полностью доказывает теорему 1.

Теорема 2. *Для произвольных натурального числа n и кусочно-непрерывной функции $g:[a_1,a_2]\to R$ существует такая вполне интегрируемая система Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, что для всякого ее нетривиального решения $x:R^2_{>1}\to R^n\setminus\{0\}$ область определения кривой Λ_x совпадает с отрезком $[a_1,a_2]$ и выполнено равенство $\overline{c}_x(\lambda_1)=g(\lambda_1)$, $\forall\lambda_1\in(a_1,a_2)$.*

Доказательство. С помощью функции g введем новую кусочно-непрерывную функцию $g_1:[-a_2,-a_1]\to R$, $g_1(\Delta)=-g(-\Delta)$. Как в теореме 1, построим бесконечно дифференцируемую функцию $x_1>0$, имеющую ограниченные производные $\partial\ln x_1(t)/\partial t_i$, $i=1,2$, область определения кривой P_{x_1} которой совпадает с отрезком $[-\alpha_2,-\alpha_1]$ и для которой справедливо равенство $\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])=g_1(p_1[x_1])$, $\forall p_1[x_1]\in(-\alpha_2,-\alpha_1)$. С помощью функции x_1 определим решение $x=x_1^{-1}$ вполне интегрируемого уравнения Пфаффа (1_1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_i(t)=\partial\ln x(t)/\partial t_i$, $t\in R^2_{>1}$, $i=1,2$. Отметим, что характеристический вектор $\lambda[x]$ решения x равен нижнему характеристическому вектору $p[x_1]$ функции x_1, взятому с противоположным знаком, т.е. $\lambda[x]=-p[x_1]$. Тем самым выполнены равенства

$$\overline{c}_x(\lambda_1[x])=\sqrt{2}\,\overline{ln}_x(\lambda[x],0)=-\sqrt{2}\,\underline{ln}_{x_1}(p[x_1],0)=-\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])=$$
$$=-g_1(p_1[x_1])=g(-p_1[x_1])=g(\lambda_1[x])$$

для всех $\lambda_1[x]\in(a_1,a_2)$, доказывающие теорему 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.
2. *Гайшун И.В.* Линейные уравнения в полных производных. Минск, 1989.
3. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1623–1630.
4. *Грудо Э.И.* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 12. С. 2115–2128.
5. *Демидович Б.П.* // Мат. сб. 1965. Т. 66. № 3. С. 344–353.
6. *Крупчик Е.Н.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 899–908.
7. *Ласый П.Г.* К теории характеристических вектор-степеней решений линейных систем Пфаффа. Минск, 1982 (Препринт / Ин-т математики АН БССР: 14).
8. *Изобов Н.А., Крупчик Е.Н.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 616–627.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1978.
10. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
11. *Изобов Н.А., Крупчик Е.Н.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 3. С. 308–319.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
24.03.2004 г.