



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Бычков, В. А. Дремов, Е. М. Епифанов, Вычисление пар Белого шести-
рёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3,
Фундамент. и прикл. матем., 2007, том 13, выпуск 6, 137–148

<https://www.mathnet.ru/fpm1086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

28 апреля 2025 г., 19:07:35



Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3

Б. С. БЫЧКОВ, В. А. ДРЁМОВ, Е. М. ЕПИФАНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 515.162+519.17

Ключевые слова: теория детских рисунков Гротендика, пары Белого.

Аннотация

В статье рассматриваются шестирёберные рисунки рода 3 с единственной вершиной, имеющие группу автоморфизмов порядка не меньше трёх. Приведён метод нахождения всех таких рисунков. Для каждого из них вычислена пара Белого.

Abstract

B. S. Bychkov, V. A. Dremov, E. M. Epifanov, The computation of Belyi pairs of 6-edged dessins d'enfants of genus 3 with automorphism groups of order 12 and 3, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 137–148.

In this article, we study dessins d'enfants of genus three with six edges and only one vertex, having group of automorphisms of order at least three. We find all such dessins and explain the method of the enumeration. For each of them the Belyi pair is computed.

1. Введение

В данной работе рассматриваются шестирёберные рисунки рода 3 с единственной вершиной. Они получаются в результате склеек 12-угольников, таких что из склеенной поверхности нельзя вырезать лист Мёбиуса (по теореме о классификации двумерных многообразий в результате такого склеивания получится компактная ориентированная поверхность без края, см. [5]; граф получится как след от границы 12-угольника; если при этом считать, что его вершины перейдут в чёрные вершины, а середины сторон — в белые, то граф будет двудольным). Таким образом, стороны 12-угольника разбиваются на пары. Если каждой паре склеиваемых сторон приписать какую-нибудь букву (для разных пар выберем различные буквы), то каждой склейке будет соответствовать *гауссово слово*. Если зафиксировать начальную сторону и направление обхода (например, против хода часовой стрелки), то каждой склейке будет соответствовать единственное слово и разным склейкам — разные слова.

В разделе 3 введено понятие фактор-рисунка, в разделе 4 найдены все рисунки с автоморфизмом порядка 3. Далее (в разделах 5–8) вычислены пары Белого трёх найденных рисунков.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 6, с. 137–148.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Авторы выражают глубокую благодарность Г. Б. Шабату и Н. М. Адрианову за помощь в написании статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00441-а.

2. Определения и обозначения

Следуя [4, 8], дадим следующие определения.

Определение 2.1. *Детский рисунок* (часто мы будем называть его просто *рисунком*) — это пара (X, Γ) , где X — компактная ориентированная поверхность без края, Γ — 2-раскрашиваемый граф, вложенный в X так, что дополнение $X \setminus \Gamma$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков.

Определение 2.2. Пусть дана алгебраическая кривая \mathcal{X} над \mathbb{C} . Функция β на \mathcal{X} называется *функцией Белого*, если определяемое ей накрытие $\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ не разветвляется вне множества $\{0, 1, \infty\}$. Пара (\mathcal{X}, β) называется парой Белого.

Таким образом, каждой склейке можно поставить в соответствие детский рисунок, у которого, в свою очередь, существует и единственна функция Белого (см. [1, 2, 8]).

Определение 2.3. *Морфизмом* μ пар Белого (\mathcal{X}_1, β_1) и (\mathcal{X}_2, β_2) называется морфизм алгебраических кривых $\mu: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mu} & X_2 \\ & \searrow \beta_1 & \swarrow \beta_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \end{array} .$$

Определение 2.4. Рассмотрим фактор детского рисунка по своей группе автоморфизмов. Полученный рисунок будем называть *фактор-рисунком* (подробнее см. раздел 3).

Определение 2.5. Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над 1 двукратны.

Определение 2.6. Множество (чистых) пар Белого с морфизмами из определения 2.3 образует *категорию (чистых) пар Белого над полем \mathbb{C}* (подробнее см. [8]).

Ясно, что категория чистых пар Белого является полной подкатегорией категории пар Белого над \mathbb{C} .

3. Фактор-рисунок

Поясним, почему в результате факторизации действительно получается детский рисунок. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Для любого детского рисунка D и любой группы его автоморфизмов G (не обязательно состоящей из всех автоморфизмов) существует морфизм $u: D \rightarrow D/G$, для которого выполняются следующие условия:

- 1) для любого рисунка H и для любых морфизмов f, g из D/G в H из равенства $f \circ u = g \circ u$ следует $f = g$ (т. е. u — эпиморфизм);
- 2) для любого $g \in G$ выполняется $u \circ g = u$ (т. е. u согласован с морфизмами группы);
- 3) для любого рисунка H и для любого морфизма $u': D \rightarrow H$, удовлетворяющего условию 2), существует такой морфизм $u'': D/G \rightarrow H$, что $u' = u'' \circ u$.

Замечание. Единственность u'' следует из пункта 1) (эпиморфизм u универсальный).

Доказательство. Воспользуемся тем, что категория (не обязательно чистых) 3-раскрашиваемых рисунков эквивалентна категории однородных $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ множеств (см. [6, теоремы 16.1.1 и 16.1.2]). Пусть при этой эквивалентности рисунку D и его группе автоморфизмов G ставятся в соответствие действие φ группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ на множестве X , а также действие G на X . Каждый автоморфизм группы G определяет биекцию множества X . Рассмотрим множество орбит X/G . По определению автоморфизмы из G согласованы с действием φ , поэтому поэлементное применение φ определяет транзитивное действие на множестве X/G , при этом отображение факторизации $u: X \rightarrow X/G$ будет морфизмом $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ -действий. Покажем, что морфизм u действительно удовлетворяет условиям 1)–3).

Условие 1) следует из сюръективности отображения u .

Условие 2) выполнено по построению, так как под действием морфизмов из G элемент множества X переходит в элемент той же орбиты.

Проверим, что морфизм u удовлетворяет условию 3). Так как из выполнения условия 2) для морфизма u' следует, что значения u' на всех элементах произвольной орбиты $t \in X/G$ должны совпадать, можно определить $u''(t)$ как значение u' на любом элементе $x \in t \subset X$. Непосредственно проверяется, что так определённое отображение u'' действительно оказывается морфизмом, удовлетворяющим соотношению $u' = u'' \circ u$. \square

4. Склейки рода 3 с более чем двумя автоморфизмами

Перечислим все шестирёберные склейки рода 3 с порядком группы автоморфизмов $n \geq 3$.

Если порядок группы автоморфизмов рисунка равен n , то на языке гауссовых слов это означает, что, с точностью до переименования букв, слово $\frac{12}{n}$ -периодично, т. е. если на местах i и j в слове стоят одинаковые буквы, то и на местах $(i + \frac{12}{n}) \bmod 12$ и $(j + \frac{12}{n}) \bmod 12$ стоят одинаковые буквы. (Здесь и далее места пронумерованы от 0 до 11, вычисления позиций в слове производятся по

модулю 12, так как длина слова равна 12.) На языке склеек это означает, что склейка правильного 12-угольника инвариантна относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$. Далее мы будем отождествлять группу автоморфизмов и циклическую группу соответствующего порядка и обозначать её \mathbb{Z}_n . Поскольку порядок группы автоморфизмов делит 12, то n может принимать значения 3, 4, 6 и 12. Разберём эти возможности.

Пусть n — порядок группы автоморфизмов склейки.

Утверждение 4.1. *Если $n = 12$, то возможна только одна склейка с гауссовым словом $(a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e, f)$.*

Доказательство. Если i, j ($i < j$) — места, на которых стоят одинаковые буквы, то на месте $j + (j - i) = 2j - i$ стоит такая же буква, т. е. $2j - i \equiv i$, следовательно, $j = i + 6$. \square

Утверждение 4.2. *Склеек с $n = 6$ и $n = 4$ нет.*

Доказательство. Пусть $n = 6$ и буква a встречается в слове на позициях i и j ($i < j$). Предположим, что $j - i < 6$ (если $j - i = 6$ для всех букв, то $n = 12$). Если $j - i$ чётно, то, поскольку слово 2-периодично, получим, что на месте $j + (j - i) \bmod 12$ тоже стоит буква a . Следовательно, $j - i$ нечётно, и в силу 2-периодичности получим, что в слове на каждой паре мест с номерами $(2n + i, 2n + j)$, $n = 0, \dots, 5$, стоят одинаковые буквы. При заданной разности $j - i$ это условие однозначно определяет склейку. Легко проверить, что в каждом из трёх случаев $j - i = 1, 3, 5$ в графе будет более одной вершины и род не будет равен 3. Поясним, как это сделать. Если на склейке одна вершина, то, обходя её по часовой стрелке, мы будем пересекать выходящие из неё ребра, каждое по два раза. Этому обходу соответствует перестановка сторон исходного 12-угольника (так как его стороны суть рёбра графа, причём каждое проходится по два раза). Если эта перестановка является циклом длины 12, то вершина единственна.

При $n = 4$ можно провести аналогичные рассуждения. Пусть опять буква a встречается в слове на позициях i и j ($i < j$) и $j - i < 6$. В данном случае слово 3-периодично, поэтому сразу заключаем, что $j - i \neq 3$ (для номеров позиций любой буквы). Остаются возможности $j - i = 2, 4, 5$. Соответствующие слова — это $(a, b, a, c, d, c, e, b, e, f, d, f)$, $(a, b, c, d, a, e, f, d, c, b, f, e)$, $(a, b, c, d, e, a, f, b, d, c, e, f)$. Нетрудно убедиться в том, что в заданных этими словами графах будет больше одной вершины. Утверждение доказано. \square

Утверждение 4.3. *Существуют ровно две склейки с $n = 3$.*

Доказательство. Пусть буква a встречается в слове на позициях i и j ($i < j$). Опять можно считать, что $j - i < 6$. Поскольку слово 4-периодично, то $j - i \neq 4$. Если $j - i = 3$, слово будет иметь вид $(a, *, *, a, b, *, *, b, c, *, *, c)$, где на местах $*$ стоят остальные три буквы. Здесь сразу выделяется вершина степени 3, из которой выходят рёбра (a, c, b) . Следовательно, $j - i \neq 3$ для номеров любой буквы в слове. Аналогично доказывается, что $j - i \neq 5$. В случае $j - i = 1$ сразу получаем вершину степени 1, поэтому $j - i \neq 1$. Остались возможности

$j - i = 2$ и $j - i = 6$, которые и дают два слова $(a, b, a, b, c, d, c, d, e, f, e, f)$ и $(a, b, a, c, d, e, d, b, f, c, f, e)$. Утверждение доказано. \square

Обозначение 4.4. Обозначим рисунки с этими гауссовыми словами $L[1]$ и $L[2]$ соответственно.

5. Рисунок с \mathbb{Z}_{12} -симметрией

На рис. 1 изображено последовательное сведение рисунка рода 3 к рисунку рода 0, «ёжику». Стрелка с $/\mathbb{Z}_2$ означает, что мы склеиваем противоположные стороны 12-угольника по стрелкам. При этом каждое ребро «ломается» в середине (потому что стороны 12-угольника мы считаем ориентированными), и его половинки должны склеиться в одно ребро.

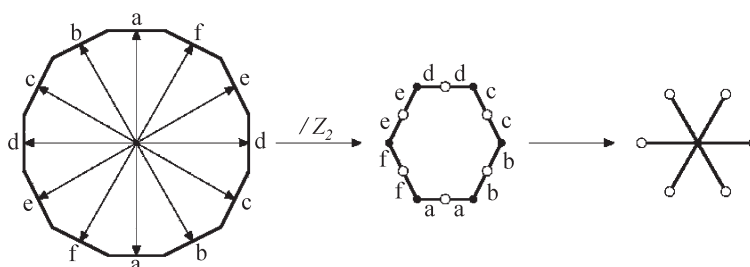


Рис. 1

Функция Белого рисунка «ёжик» хорошо известна: $\beta = x^6$, причём она поднимается на кривую $y^2 = x(x^6 - 1)$.

6. Рисунки с \mathbb{Z}_3 -симметрией

Исследуем плоские проективные алгебраические кватрики с симметрией третьего порядка. Изначально, вообще говоря, не ясно, почему кривые, соответствующие этим рисункам, не гиперэллиптические. Однако поскольку функция Белого рисунка единственна (если она существует), а в этом случае (негиперэллиптическом) они найдены, то других не существует и пробела в рассуждениях нет.

Обозначение 6.1. Рассмотрим диагональные (3×3) -матрицы, у которых на диагонали стоят числа $e^{2\pi i k_j / 3}$, $j = 1, 2, 3$, $k_j \in \{0, 1, 2\}$. Всего таких матриц $3^3 = 27$, но если рассматривать их с точностью до умножения на константу и не учитывать скалярные матрицы, то останется всего три типа: с двумя единицами и $e^{2\pi i / 3}$ на диагонали (тип 1), с двумя единицами и $e^{4\pi i / 3}$ на диагонали (тип 2)

и случай, когда все три корня кубических из 1, стоящие на диагонали, различны (тип 3).

Утверждение 6.2. *Каждый автоморфизм \mathbb{P}^2 , имеющий порядок 3, проективно эквивалентен автоморфизму с матрицей одного из этих трёх типов.*

Доказательство. В проективном пространстве \mathbb{P}^2 перейдём к жорданову базису матрицы автоморфизма.

Лемма 6.3. *Жорданова нормальная форма матрицы автоморфизма \mathbb{P}^2 , имеющего порядок 3, диагональна.*

Доказательство. Возможны три случая: 1) матрица диагональна, 2) получились две жордановы клетки и 3) получилась одна клетка. Рассмотрим эти возможности, учитывая, что, так как симметрия имеет третий порядок, матрица в третьей степени должна быть равна матричной единице.

Рассмотрим случай 2). Матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix},$$

т. е. она диагональна только при $a = 0$. Поэтому матрица автоморфизма вырождена, что невозможно. Аналогично рассматривается случай 3):

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, возможен только случай 1). \square

Поскольку матрица проективного преобразования определена с точностью до пропорциональности и оказалась диагональной, то она принадлежит одному из трёх типов, определённых в пункте 6.3. \square

Итак, рассматриваются \mathbb{Z}_3 -симметричные однородные кватрики в \mathbb{P}^2 с координатами $(x : y : z)$, которые инвариантны относительно автоморфизма третьего порядка (обозначим его α). В силу утверждения 6.2 можно считать, что α принадлежит одному из трёх типов. Разберём случай конкретного α , имеющего тип 3, поскольку именно этот случай даёт результат. Зафиксируем автоморфизм

$$\alpha: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x : y : z) \mapsto (y : z : x).$$

Утверждение 6.4. *Уравнение \mathbb{Z}_3 -симметричной неприводимой однородной кватрики в \mathbb{P}^2 с координатами $(x : y : z)$, инвариантной относительно автоморфизма α , с точностью до проективного сопряжения имеет вид*

$$a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^3y + y^3z + z^3x) + c(x^3z + y^3x + z^3y) + d(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + e(xyz(x + y + z)) = 0. \quad (1)$$

Доказательство. Заметим сначала, что любое такое уравнение допускает три записи, с точностью до проективного сопряжения. А именно, если заменить тройку $(x : y : z)$ на $(x : \varepsilon y : \varepsilon^2 z)$ (или $(x : \varepsilon^2 y : \varepsilon z)$), $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$, то оно останется неизменным под действием α (при перестановке координат каждый моном умножится на ε^2 (или ε), так как они все имеют одинаковую степень 4). Сопряжение $(x : y : z) \mapsto (x : \varepsilon^2 y : \varepsilon z)$ (соответственно $(x : y : z) \mapsto (x : \varepsilon y : \varepsilon^2 z)$) переводит уравнение в тот вид, который оно имело до замены.

Таким образом, можно рассматривать только случай, когда под действием α все мономы умножаются на 1.

Множество мономов, которые входят в однородный полином, задающий кватрику, под действием автоморфизма α распадается на следующие орбиты:

$$O_1 := \{x^4, y^4, z^4\}, \quad O_2 := \{x^3y, y^3z, z^3x\},$$

$$O_3 := \{x^3z, y^3x, z^3y\}, \quad O_4 := \{x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2\}, \quad O_5 := \{x^2yz, xy^2z, xyz^2\}.$$

Это, а также то, что других мономов нет, проверяется перебором всех случаев, который мы сейчас проведём. В самом деле, моном с x^4 только один и он лежит в орбите O_1 . Мономов с x^3 два: x^3y и x^3z . Они принадлежат орбитам O_2 и O_3 соответственно. Мономов, содержащих x^2 , три: x^2y^2 , x^2z^2 и x^2yz . Первые два лежат в одной орбите (O_4), а третий принадлежит орбите O_5 . Каждый из мономов с x (xy^3 , xy^2z , xyz^2 и xz^3) также принадлежит одной из рассматриваемых орбит. Мономов с x^0 два: y^4 и z^4 . Они лежат в орбите O_1 . Других вариантов нет. Поскольку под действием автоморфизма уравнение переходит в себя, то мономы, принадлежащие одной орбите, должны иметь одинаковые коэффициенты в полиноме. Поэтому уравнение и имеет нужный вид. \square

Обозначение 6.5. Пусть

$$p := x^4 + y^4 + z^4, \quad q := x^3y + y^3z + z^3x,$$

$$r := x^3z + y^3x + z^3y, \quad s := x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \quad t := xyz(x + y + z).$$

Рассмотрим отображение

$$\psi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^4, \quad (x : y : z) \mapsto (p : q : r : s : t).$$

Следующее утверждение легко следует из леммы 7.2.

Утверждение 6.6. *Отображение ψ осуществляет факторизацию кривой (1) по группе, порождённой автоморфизмом α .*

При этом фактор-кривая лежит в пересечении образа проективного пространства \mathbb{P}^2 с координатами $(x : y : z)$ и гиперплоскости, задаваемой уравнением $ap + bq + cr + ds + et = 0$. Из соображений размерности вытекает, что образ \mathbb{P}^2 лежит в пересечении двух кривых второго порядка, задаваемых квадратичными соотношениями на p, q, r, s, t .

7. Квадратичные зависимости

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 7.1. *Многочлены p, q, r, s, t , определённые в конце раздела 6, удовлетворяют квадратичным соотношениям*

$$s^2 + pt + st = qr + qt + rt, \quad (2)$$

$$q^2 + r^2 + t^2 = ps + 2st. \quad (3)$$

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько лемм. Перейдём от координат $(x : y : z)$ к координатам $(l_0 : l_1 : l_{-1})$, где

$$l_0 = x + y + z, \quad l_1 = x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z, \quad l_{-1} = x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{1}.$$

Лемма 7.2. *Матрица перехода от базиса $(p : q : r : s : t)$ к базису $(l_1^3 l_0 : l_{-1}^3 l_0 : (l_1 l_{-1})^2 : l_0^4 : l_0^2 (l_1 l_{-1}))$ в $\psi(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^4$ имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & \frac{4}{9} \\ \frac{-3\varepsilon-2}{9} & \frac{3\varepsilon+1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \\ \frac{3\varepsilon+1}{9} & \frac{-3\varepsilon-2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & 0 & \frac{1}{27} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Многочлены p, q, r, s, t линейно выражаются через мономы $l_1^3 l_0, l_{-1}^3 l_0, (l_1 l_{-1})^2, l_0^4, l_0^2 (l_1 l_{-1})$, это проверено непосредственно на Maple. Матрица A невырождена:

$$\det A = \frac{58\varepsilon + 29}{3 \cdot 27^3} \neq 0. \quad \square$$

Из леммы 7.2 вытекает следующая лемма.

Лемма 7.3. *Обратная замена имеет вид*

$$\begin{aligned} (l_1 l_{-1})^2 &= p - 2q - 2r + 3s, & l_0^4 &= p + 4q + 4r + 6s + 12t, \\ l_0^2 (l_1 l_{-1}) &= p + q + r - 3t, & l_1^3 l_0 &= p + (3\varepsilon + 1)q - (3\varepsilon + 2)r - 3s + 3t, \\ l_{-1}^3 l_0 &= p - (3\varepsilon + 2)q + (3\varepsilon + 1)r - 3s + 3t. \end{aligned}$$

Доказательство. Эти равенства также проверены на Maple. □

Легко убедиться, что

$$l_0^4 (l_1 l_{-1})^2 - (l_1 l_{-1} l_0^2)^2 = 0, \quad (4)$$

$$(l_1^3 l_0)(l_{-1}^3 l_0) - (l_1 l_{-1} l_0^2)(l_1 l_{-1})^2 = 0. \quad (5)$$

Замечание. Смысл перехода к сложным, на первый взгляд, координатам $(l_0 : l_1 : l_{-1})$ заключается в том, что в них эти квадратичные зависимости очень легко увидеть.

Лемма 7.4. *Многочлены от $l_1^3 l_0, l_{-1}^3 l_0, (l_1 l_{-1})^2, l_0^4, l_0^2 (l_1 l_{-1})$, стоящие в левых частях соотношений (4) и (5), линейно независимы.*

Доказательство. В самом деле, они имеют разные степени по $l_0^2 (l_1 l_{-1})$. \square

Подставляя в (4) и (5) вместо мономов $l_1^3 l_0, l_{-1}^3 l_0, (l_1 l_{-1})^2, l_0^4, (l_1 l_{-1}) l_0^2$ их выражения через p, q, r, s и t , взятые из леммы 7.3, получим квадратичные соотношения

$$ps + 2pt - q^2 - 2qr - 2qt - r^2 - 2rt + 2s^2 + 4st - t^2 = 0, \quad (6)$$

$$-ps + pt + q^2 - qr - qt + r^2 - rt + s^2 - st + t^2 = 0. \quad (7)$$

Сложим (6) и (7), получится соотношение (2). Вычтем из (6) равенство (7), умноженное на 2, получится (3).

Теорема 7.1 доказана. \square

8. Пары Белого рисунков $L[1]$ и $L[2]$

Теорема 8.1. *Рисунку $L[1]$ соответствует пара Белого*

$$\beta = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} x^2$$

на кривой

$$y^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad u^3 = x \left(y - 1 + (x - 1) \left(\frac{-\sqrt{3} - 3}{2} \right) \right).$$

Рисунку $L[2]$ соответствует пара Белого

$$\beta = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} x^2$$

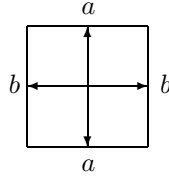
на кривой

$$y^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad u^3 = x \left(y - 1 + (x - 1) \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2} \right) \right).$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку замен координат:

$$(x : y : z) \longrightarrow (l_0 : l_1 : l_{-1}) \xrightarrow{/\mathbb{Z}_3} (l_0^2 l_1 : l_1^2 l_{-1} : l_{-1}^2 l_0) \longrightarrow \left(\frac{l_0 l_{-1}^2}{l_1^2 l_{-1}} : \frac{l_0^2 l_1}{l_1^2 l_{-1}} : 1 \right).$$

При последовательном проведении этих замен из уравнения (1) получится уравнение эллиптической кривой с неизвестными коэффициентами, которые находятся из следующих соображений. При факторизации склеек $L[1]$ (с гауссовым словом $(a, b, a, b, c, d, c, d, e, f, e, f)$) и $L[2]$ (с гауссовым словом $(a, b, a, c, d, e, d, b, f, c, f, e)$) по их группе автоморфизмов \mathbb{Z}_3 получается рисунок рода 1



с гауссовым словом (a, b, a, b) , пара Белого которого известна:

$$X_0: y^2 = x^3 - x, \quad \beta = x^2.$$

Из совпадения j -инвариантов и соотношения на точки ветвления находятся коэффициенты кривой (точнее, двух кривых).

Соответствующие вычисления на Maple дали результат, сформулированный в теореме 8.1.

Будем обозначать пару Белого рисунка $L[1]$ через (\mathcal{X}_1, β_1) и пару Белого рисунка $L[2]$ через (\mathcal{X}_2, β_2) .

Лемма 8.2. Пары Белого (\mathcal{X}_1, β_1) и (\mathcal{X}_2, β_2) не изоморфны.

Доказательство. Предположим, что существует изоморфизм $\varphi: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$, для которого выполнено тождество $\beta_1 = \beta_2 \circ \varphi$. Тогда этот изоморфизм имеет вид $x = P(x, y, u)$, $y = Q(x, y, u)$, $z = R(x, y, u)$, где P, Q, R — рациональные функции (x, y, u) .

Так как

$$\beta_2 \circ \varphi = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} P(x)^2, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} x^2,$$

то сразу получаем, что $P(x) = kx$, где k — один из корней уравнения $k^2(\sqrt{3}-2) = \sqrt{3}+2$.

Так как точка с координатами (P, Q, R) лежит на кривой \mathcal{X}_2 , то на кривой \mathcal{X}_1 выполняется тождество

$$Q^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) P^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} P.$$

Следовательно,

$$Q^2 = k \left(k^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x^3 + x \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Упростив выражение, получим

$$Q^2 = -k \left(\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x^3 - x \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -ky^2.$$

Следовательно, $Q = ty$, $k = -t^2$.

Таким образом, многочлен

$$R^3 = P \left(Q - 1 + (P - 1) \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2} \right) \right)$$

не зависит от u . Действительно,

$$R^3 = -m^2x \left(my + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}m^2x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right).$$

Найдём нули функции R . Для этого рассмотрим произведение сопряжённых

$$W := \left(Q - 1 + (P - 1) \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2} \right) \right) \left(-Q - 1 + (P - 1) \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2} \right) \right),$$

упростив которое (с использованием выражения для Q^2), получим

$$W = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{3})(P - 1)^3.$$

Итак, функция R имеет нуль второго порядка в точке $(x, y, u) = (0, 0, 0)$ и нули в одной или нескольких из шести точек, отвечающих $x = 1/k$. Так как функция R^3 не зависит от u , то порядок нулей в точках с одинаковыми x , y совпадает. Так как степень R равна степени u и равна 5, то R имеет нули порядка 1 в трёх точках, отвечающих $x = 1/k$, $y = 1/m$.

С другой стороны, R можно единственным образом записать в виде

$$R = R_0(x) + R_1(x)u + R_2(x)u^2 + (R_3(x) + R_4(x)u + R_5(x)u^2)y,$$

где $R_j(x)$ — рациональные функции x . Сопряжение $u \mapsto \sqrt[3]{1}u$ переводит R^3 в себя, R при этом умножается на некоторый кубический корень из 1. Поэтому либо $R = R_0(x) + R_3(x)y$, либо $R = u(R_1(x) + R_4(x)y)$, либо $R = u^2(R_2(x) + R_5(x)y)$. Используя тот факт, что порядок в точке $(x, y, u) = (0, 0, 0)$ выражения вида $R_j(x) + yR_k(x)$ кратен 3, получаем, что $R = u(R_1(x) + R_4(x)y)$.

Тогда R/u — функция на эллиптической кривой

$$y^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

с единственными нулём (в точке $x = 1/k$, $y = 1/m$) и полюсом (в точке $x = 1$, $y = 1$) первого порядка. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Таким образом, установлено, что две найденные пары Белого находятся в однозначном соответствии с двумя рассматриваемыми рисунками. Соответствие знаков получено вычислениями на Maple. \square

Литература

- [1] Адрианов Н. М. Классификация примитивных групп вращений рёбер плоских деревьев // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1069–1083.
- [2] Адрианов Н. М. Правильные карты с группой автоморфизмов $\text{PSL}_2(q)$ // *Успехи мат. наук.* — 1997. — Т. 52, № 4. — С. 195–196.

- [3] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Суворов А. Д., Шабат Г. Б. Группы Матье и плоские деревья // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 377—384.
- [4] Амбург Н. Я. Симметрии графов на поверхностях и алгебраические кривые: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2005.
- [5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал, 2000.
- [6] Шабат Г. Б. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 1999.
- [7] Amburg N. Regular unicellular dessins d'enfants and Weil curves // *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Proc. of the 12th Int. Conf., FPSAC '00, Moscow, Russia, June 26—30, 2000* / D. Krob (ed.). — Berlin: Springer, 2000. — P. 393—401.
- [8] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // *The Grothendieck Festschrift. Vol. III.* — Birkhäuser, 1990. — (Progress Math.; Vol. 88). — P. 199—227.
- [9] Shabat G. B., Zvonkin A. K. Plane trees and algebraic numbers // *Jerusalem Combinatorics '93* / H. Barcelo, G. Kalai, eds. — Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 178). — P. 233—275.