

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ: НЕРАВЕНСТВА И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

Ю. В. Прохоров

Настоящий обзор касается темы, интенсивно изучаемой в последнее десятилетие. Он разделен на несколько частей. Объем этих частей определяется не только важностью рассматриваемых в них вопросов, но и тем, в какой мере соответствующие результаты суммированы в опубликованных статьях.

§ 1. НОРМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Роль нормального распределения в многомерном случае пожалуй еще более заметна, чем в одномерном, в частности потому, что почти все выводы многомерной статистики опираются на предположения о нормальности рассматриваемых распределений.

1. Вероятности шаров. Пусть $X \in R^s$ — случайный вектор с невырожденным (т. е. не сосредоточенным ни на каком линейном подпространстве R^s) нормальным распределением. Пусть $a = EX$, V — матрица ковариаций вектора X , $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s > 0$ — собственные числа V . Рассмотрим случай $a = 0$. Обозначим $\|X\|$ евклидову длину X . Тогда, как известно, распределение $\|X\|^2$ совпадает с распределением

суммы $\sum_{j=1}^s \lambda_j Z_j^2$, где Z_j — независимые нормальные $(0,1)$ случайные величины. Следовательно, $P(\|X\|^2 > x) =$

$= P\left(\sum_{j=1}^s \lambda_j Z_j^2 > x\right)$. Подобная же формула верна, если X — нормально распределенный вектор в сепарабельном гильбертовом пространстве H (с той лишь разницей, что следует

взять $s = \infty$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$). В. М. Золотарев [19] получил асимптотическую формулу при $x \rightarrow \infty$ для плотности $p_{\xi}(x)$ величины $\xi = \|X\|^2$, а именно,

$$p_{\xi}(x) = \frac{K}{(2\lambda_1)^{n_1/2} \Gamma(n_1/2)} x^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\lambda_1}} (1 + \varepsilon(x)), \quad (1)$$

где $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $K = K(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = \prod_{j \geq n_1+1} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{-1/2}$ (короче мы будем писать $K = K(\lambda)$); здесь предполагается, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n_1} > \lambda_{n_1+1} \geq \dots$. Иными словами, при $x \rightarrow \infty$ плотность $p_{\xi}(x)$ эквивалентна умноженной на $K(\lambda)$ плотности $p_{\zeta}(x)$ случайной величины

$$\zeta = \lambda_1 Z_1^2 + \dots + \lambda_{n_1} Z_{n_1}^2 = \lambda_1 (Z_1^2 + \dots + Z_{n_1}^2) = \lambda_1 \zeta_{n_1}^2.$$

В [19] отмечено, что при $n_1 \geq 3$ функция $\varepsilon(x)$ имеет при $x \rightarrow \infty$ порядок $1/x$, и высказывается предположение, что при $n_1 = 1$ и при $n_1 = 2$ порядок убывания может быть другим. Из (1) вытекает, что при $x \rightarrow \infty$

$$P(\xi \geq x) \sim K(\lambda) P(\zeta \geq x).$$

В. Геддинг [18] показал, что при $n_1 \geq 2$ имеет место неравенство $p_{\xi}(x) \leq K(\lambda) p_{\zeta}(x)$ и вытекающее из него неравенство $P(\xi \geq x) \leq K(\lambda) P(\zeta \geq x)$. Предположение $n_1 \geq 2$ существенно при выводе двух последних неравенств. Можно получить и более грубые неравенства, учитывающие лишь значенные суммы $\Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_s = E\|X\|^2$ (а не роль отдельных λ_j), например, [58]

$$P(\|X\|^2 \geq x) \leq \sqrt{2} e^{-x^2/4\Lambda}.$$

Утверждение, несколько более слабое, чем содержащееся в приведенных неравенствах, состоит в том, что при любом h ,

$$0 < h < \frac{1}{2\lambda_1}, \quad E e^{h\|X\|^2} < \infty \quad (2)$$

(здесь X — нормальный вектор и $X \in R^s$ или $X \in H$). Для случайных нормальных векторов со значениями в банаховых пространствах справедливость утверждения, аналогичного (2), долгое время не удавалось установить. А. В. Скороход [53] доказал, что для всякого нормально распределенного вектора X в сепарабельном банаховом пространстве B можно указать такое $\alpha > 0$, что $E e^{\alpha\|X\|} < \infty$. Более сильный результат получается из статьи Ландау и Шеппа [90] (ср. также [71]), а именно, что для некоторого $\alpha > 0$ $E e^{\alpha\|X\|^2} < \infty$. Используемые при доказательстве последнего соотношения приемы позволяют дать более или менее законченное реше-

ние вопроса об условиях непрерывности гауссовских процессов. Одно из основных неравенств представляет самостоятельный интерес: пусть $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(s)})$ — нормально распределенный случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и пусть C — выпуклое множество в R^s ; если при некотором $\gamma > 0$ $P(X \in C) \geq \Phi(\gamma)$, где Φ — нормальная $(0, 1)$ функция распределения, то при любом $a > 1$

$$P(X \in aC) \geq \Phi(a\gamma),$$

где $aC = \{ax : x \in C\}$. Пример полупространств показывает, что последнее неравенство не может быть улучшено.

Заканчивая этот раздел, добавим следующее замечание о вероятностях шаров. Для невырожденного нормального распределения в конечномерном случае вероятность попадания в любой шар положительна. Это же свойство сохраняется, например, и в пространствах l_p ($1 < p < \infty$). Однако в других банаховых пространствах оно может не выполняться (см. [14], стр. 73). Так, в пространстве l_∞ бесконечных ограниченных последовательностей $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_j |x^{(j)}|$ для любого $r > 0$ можно указать нормальное распределение, такое, что мера каждого шара радиуса r равна нулю.

2. Вероятности некоторых выпуклых множеств. Отметим теперь ряд других полезных неравенств, связанных с многомерными нормальными распределениями. В работе Кхатри [85] для совместно нормальных случайных векторов Y_1, Y_2, \dots, Y_q размерностей соответственно s_1, s_2, \dots, s_q , имеющих нулевое математическое ожидание, установлены следующие неравенства:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^q (Y_i \in D_i)\right) \geq \prod_{i=1}^q P(Y_i \in D_i)$$

и

$$P\left(\bigcap_{i=1}^q (Y_i \in \bar{D}_i)\right) \geq \prod_{i=1}^q P(Y_i \in \bar{D}_i),$$

где $D_i \in R^{s_i}$ — выпуклые и симметричные относительно начала области.

Неравенства другого типа необходимы при доказательстве предельных теорем со сходимостью, равномерной на классе выпуклых множеств. Эти неравенства дают оценку для вероятности попадания нормального случайного вектора в окрестность границы выпуклых множеств. Пусть C обозначает борелевское выпуклое множество в R^s и C_h — совокупность точек, отстоящих от границы C менее чем на дан-

ное $h > 0$. Тогда для нормального распределения Φ в R^s с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариаций

$$\Phi(C_h) \leq 2\sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} h$$

(см. [64] и аналогичные леммы в [98, 31]; в [47] высказана гипотеза, что множитель при h может быть сделан не зависящим от размерности).

Отметим в заключение этого параграфа, что вероятности попадания в «прямоугольники» и в «углы» типа $X^{(1)} > a_1, \dots, X^{(s)} > a_s$ ($X^{(i)}$ — компоненты X) рассматривались в [101, 93, 80]. При этом в [93] подробно изучен случай $s=4$.

3. Квадратичные формы. В пункте 1 мы касались в какой-то мере распределений квадратичных форм от компонент нормального случайного вектора. Работы, посвященные этому вопросу, появляются все вновь и вновь, ввиду практической важности вопроса (укажем статьи [73, 75, 87, 88, 95]). Уме-

стно добавить также, что распределения $\sum_{j=1}^s \lambda_j Z_j^2$ (Z_j — независимые нормальные $(0, 1)$ случайные величины, λ_j — положительные числа) табулированы для $s=2, 3, 4, 5$ (см. [91, 100, 81, 82]).

4. Несколько разрозненных результатов. Здесь мы отметим несколько поучительных фактов, касающихся многомерных нормальных распределений.

А. Известно, что линейная функция компонент нормально распределенного случайного вектора $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(s)})$ нормально распределена. Однако имеются и нелинейные функции с подобным же свойством. Например, если $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ независимы и нормальны $(0, 1)$, f и g — полиномы от $X^{(3)}$, то случайная величина

$$\eta = \frac{X^{(1)}(f^2 - g^2) + X^{(2)} \cdot 2fg}{f^2 + g^2}$$

нормальна $(0, 1)$. В заметке [27] доказано, что сохраняющее нормальность преобразование, являющееся вещественной целой функцией, растущей достаточно медленно, обязательно линейно.

Б. Известны примеры двумерных случайных векторов $X = (X^{(1)}, X^{(2)})$, распределения которых отличаются от нормального, но при этом $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ некоррелированы и нормальны [72, 51].

В. Для любого $n = 1, 2, \dots$ можно привести пример двумерного случайного вектора $X = (X^{(1)}, X^{(2)})$ с распределением,

отличающимся от нормального, для которого все линейные комбинации вида $X^{(1)} \cos \frac{2k\pi}{2^n} + X^{(2)} \sin \frac{2k\pi}{2^n}$, $k=0, \dots, 2^n-1$, распределены нормально (см. [76]).

§ 2. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. **Неравенства для больших значений $\|t\|$.** Известно, что если распределение P на борелевских множествах пространства R^s абсолютно непрерывно по отношению к лебеговой мере в R^s , то его характеристическая функция

$$f(t) = \int_{R^s} e^{i(t, x)} P(dx) = \int_{R^s} e^{i(t, x)} p(x) dx$$

стремится к нулю при $\|t\| \rightarrow \infty$ (здесь (t, x) — скалярное произведение векторов t и $x \in R^s$, $\|t\|$ — длина вектора t). Так же, как и в одномерном случае, при дополнительных ограничениях на плотность $p(x)$ можно дать оценки скорости стремления $|f(t)|$ к нулю при $\|t\| \rightarrow \infty$. Например, если $p(x)$ дифференцируема и

$$J = \int_{R^s} \left(\sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial p}{\partial x_j} \right| \right) dx < \infty,$$

то $|f(t)| \leq \frac{V_s}{\|t\|} J$. Если при всех $h \in R^s$ и некоторых $K > 0$, $\alpha > 0$

$$\int_{R^s} |p(x+h) - p(x)| dx \leq K \|h\|^\alpha,$$

то

$$|f(t)| \leq \frac{\pi^\alpha}{2} \cdot \frac{K}{\|t\|^\alpha}.$$

Специальный интерес представляют равномерные распределения на выпуклых множествах. Для соответствующих характеристических функций имеются асимптотические формулы для $\|t\| \rightarrow \infty$ и оценки (см. примеры и ссылки в [84, 43]). Например, для равномерного распределения внутри гладкого овала A на плоскости имеем

$$|f(t)| \leq \frac{32 V_2}{S} \frac{1}{\|t\|^{3/2} \kappa^{1/2}},$$

где S — площадь, ограниченная A , и κ — минимальная кривизна контура A . Интересное применение этих оценок и асимптотических формул к подсчету числа целых точек в случайном овале дано в работе [84]. Если о плотности $p(x)$ известно лишь,

что она ограничена $\sup_x p(x) \leq M$, и известна матрица ковариаций V , соответствующая p , то $|f(t)|$ можно ограничить вне любого шара с центром в нуле числом, меньшим единицы и зависящим лишь от M, V , радиуса шара и размерности пространства. Точнее (см. [8]), при всех t

$$|f(t)| \leq \exp \left\{ - \frac{C_1(s) Q(t)}{M^2 \cdot \det V (2\pi + \sqrt{sQ(t)})^2} \right\},$$

где $Q(t) = t' V t$ — квадратичная форма, соответствующая V и

$$C_1(s) = \frac{\pi^2}{27} \cdot \frac{((s-1)!!)^2}{(8\pi)^s s^{s-1}}.$$

Последнее неравенство полезно при оценке интегралов типа

$\int_{\|t\| > \varepsilon} |f(t)|^n dt$, встречающихся при доказательстве предельных теорем.

В многомерном случае существует также много интересных примеров распределений, сингулярных относительно лебеговой меры в R^s (и без точек положительной массы). Таковы, скажем, непрерывные распределения на тех или иных кривых, поверхностях, совместные распределения функций от одной и той же случайной величины и т. п. При широких допущениях характеристические функции этих сингулярных распределений убывают степенным образом относительно $1/\|t\|$ при $\|t\| \rightarrow \infty$. Как следствие отсюда вытекает, что после некоторого числа r композиций с собою соответствующее распределение становится абсолютно непрерывным (более того, плотность будет k раз дифференцируемой, если функция $\|t\|^k |f(t)|^r$ интегрируема). Так, например, для равномерного распределения на контуре гладкого овала A на плоскости имеем

$$|f(t)| \leq \frac{16\sqrt{2}}{L} \frac{1}{\|t\|^{1/2} \kappa^{1/2}},$$

где L — длина этого контура, а κ — его минимальная кривизна (для случая, когда A — единичная окружность, подобное неравенство вытекает сразу из явной формулы $f(t) = \int_0^2 \cos(\|t\|x) dx$). Рассмотрим, далее, случайную величину X , равномерно распределенную на отрезке $(0, 1)$, и возьмем совместную характеристическую функцию степеней X, X^2, \dots, X^s , т. е.

$$f(t) = f(t^{(1)}, \dots, t^{(s)}) = \int_0^1 e^{it^{(1)}x + \dots + it^{(s)}x^s} dx.$$

Тогда (см. [17], стр. 28)

$$|f(t)| \leq \frac{62s(2\pi)^{1/s} s^{1/2s}}{\|t\|^{1/s}}.$$

Если вместо предположения о равномерном на $(0, 1)$ распределении X сделать предположение, что X имеет плотность $p(x)$ и интегралы

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |p'(x)| dx, \quad \beta_j = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j p(x) dx, \quad j=1, \dots, s-1,$$

конечны, то предыдущее неравенство можно заменить, например, таким

$$|f(t)| \leq \frac{D}{\|t\|^\gamma},$$

где $D = D(I, \beta_1, \dots, \beta_{s-1})$ и показатель степени у $1/\|t\|$ становится хуже:

$$\gamma = \left[\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s-1} \cdot s! \right]^{-1},$$

Наиболее общие оценки подобного типа получены в работах [61, 62], где рассмотрено совместное распределение некоторого числа функций от одного и того же случайного вектора $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(s)})$. Один из примеров применений указывается ниже. Рассмотрим совместное распределение случайных величин

$$(X^{(1)})^2, \dots, (X^{(s)})^2, X^{(1)}X^{(2)}, \dots, X^{(s-1)}X^{(s)}$$

в пространстве $\frac{s(s+1)}{2}$ измерений. В предположении достаточной гладкости плотности случайного вектора X и существования определенного числа моментов, указанное совместное распределение (которое можно интерпретировать как распределение $\frac{s(s+1)}{2}$ -мерного вектора Y) имеет характеристическую функцию, убывающую на бесконечности степенным образом. Отсюда стандартными приемами можно вывести утверждение: для последовательности независимых векторов X_1, X_2, \dots , распределенных так же, как и X , последовательность соответствующих Y -ов, Y_1, Y_2, \dots такова, что распределение нормированных сумм

$$\zeta_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n - nEY_1}{\sqrt{n}}$$

сходится «по вариации» к соответствующему нормальному распределению. Поэтому распределение любой функции от компонент ζ_n сходится «по вариации» к распределению соответствующей функции от компонент вектора, имеющего предельное нормальное распределение. Следовательно, выборочная матрица ковариаций имеет распределение, при $n \rightarrow \infty$ сближающееся с нормальным не только в «слабом смысле», но и «по вариации» и т. д.

Основным аналитическим орудием при доказательстве степенных оценок для характеристических функций являются аналог известной леммы ван дер Корпута: если при всех x $g''(x) \geq r > 0$, то при любых a и b

$$\left| \int_a^b e^{ig(x)} dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{r}}.$$

Например, в [61, 62] используется неравенство: если $g(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $\rho \geq 2$ включительно и всюду на некотором интервале (a, b) выполняется неравенство $|g^{(\rho)}(x)| \geq r$, то

$$\left| \int_a^b e^{ig(x)} dx \right| \leq C_\rho r^{-1/\rho},$$

где константа C_ρ зависит только от ρ .

2. Неравенства при малых $\|t\|$. Здесь положение не отличается существенно от одномерного случая. Следует лишь отметить, что в асимптотических разложениях для характеристических функций нормированных сумм в окрестности нуля установлены лучшие, чем были известны ранее, оценки остаточных членов (А. Бикялис [7]).

§ 3. МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

1. Неравенства. Пусть $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(s)})$ — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и конечным вторым моментом $E\|X\|^2$. Пусть D обозначает прямоугольник

$$D = \{x: |x^{(1)}| < a_1, \dots, |x^{(s)}| < a_s\}.$$

Для оценки вероятности $P(X \in D)$ берут какую-либо неотрицательно определенную квадратичную форму $\tilde{Q}(x)$, для которой $\tilde{Q}(x) \geq 1$ при всех $x \in D$. Тогда

$$P(X \in D) \leq E\tilde{Q}(X).$$

Известны способы наилучшего выбора \tilde{Q} ; подходящим предельным переходом отсюда можно получить оценку для вероятности событий типа $\max_{0 \leq t \leq 1} |X(t)| > \alpha$, где $X(t)$ — некоторый случайный процесс. При $EX(t) = 0$, $EX(s)X(t) = v(s, t)$ указанная вероятность не превосходит величины $\frac{1}{\alpha^2} F(v)$, где функционал $F(v)$ имеет вид

$$\frac{\varphi^2(0) + \varphi^2(1)}{2} + \int_0^1 \varphi(t) \psi(t) dt$$

$$\varphi^2(t) = v(t, t), \quad \psi^2(t) = \left[\frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial s \partial t} \right]_{s=t}$$

(см. работу Уитла [102]). Различные оценки в терминах дисперсий обсуждаются в статье [92] и книге [83]. В [94] приведен ряд аналогов неравенства Чебышева. Выводы опираются на лемму: пусть $Y \in R^s$ — случайный вектор с неотрицательными компонентами и математическим ожиданием μ ; пусть $\varphi \geq 0$ — однородная вогнутая в ортанте R_+^s пространства R^s функция; тогда

$$P(\varphi(Y) \geq \varepsilon) \leq \frac{\varphi(\mu)}{\varepsilon}.$$

Известно, что одномерное неравенство Чебышева особенно полезно в применении к суммам независимых случайных величин. С этой точки зрения наиболее интересны те из многомерных аналогов неравенства Чебышева, которые содержат в правой части характеристики, аддитивные по отношению к сложению независимых случайных векторов (таким свойством обладают, например, упомянутые выше неравенства Уитла). В одномерном случае подобным качеством обладает так называемое экспоненциальное неравенство Чебышева

$$P(X_1 + \dots + X_n > x) \leq e^{-hx} E e^{h(X_1 + \dots + X_n)},$$

правая часть которого может быть записана в виде

$$\exp \left\{ -hx + \sum_{j=1}^n \ln E e^{hX_j} \right\}.$$

Известно, что из указанного неравенства получаются (при соответствующих ограничениях) неравенства Бернштейна—Колмогорова. Например, для одинаково распределенных независимых X_j с

$$|X_j| \leq L \text{ и } EX_j = 0, \quad EX_j^2 = \sigma^2$$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) \leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{a}{3}\right)^{-1} \right\},$$

где $a = Lx/\sigma\sqrt{n}$. Многомерный аналог этого подхода был предложен в [36]. Его основой служит следующее замечание: пусть $q(x) \geq 0$, $x \in R^s$ такая функция, что при всех $h \in R^s$

$$\chi(h) = \int_{R^s} e^{(h, x)} q(x) dx < \infty.$$

Тогда

$$E\chi(Y) = \int_{R^s} (Ee^{(x, Y)}) q(x) dx$$

и при $a > 0$

$$P\{\chi(Y) \geq a\} \leq a^{-1} \int_{R^s} (Ee^{(x, Y)}) q(x) dx.$$

В [36] было выбрано $q(x) = (2\pi)^{-s/2} \cdot \sigma^{-s} \cdot e^{-\|x\|^2/2\sigma^2}$ (что дает $\chi(h) = e^{\sigma^2 \|h\|^2/2}$), $a = e^{\frac{\sigma^2 r^2}{2}}$ и была получена некоторая экспоненциальная оценка для

$$P\{\|Y_n\| \geq r\} = P\{e^{\sigma^2 \|Y_n\|^2/2} \geq a\},$$

где $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ — нормированная сумма независимых случайных векторов $X_j \in R^s$ с $EX_j = 0$, $|X_j| \leq L$. Именно, при $n \geq s$

$$P\{\|Y_n\| \geq r\} \leq C_1 \exp\left\{-C_2 \frac{r^2}{L^2}\right\},$$

где можно взять $C_1 = 2$, $C_2 = 1/8e^2$. Этот метод развивался далее в [33, 34, 35] (случай слагаемых, распределенных сферически симметрично разобран в [20]). При этом в работах [34] и [35] правая часть неравенств уже напоминает правую часть указанных в § 1 неравенств для нормальных распределений (в частности, учитывается или роль отдельных собственных значений матрицы ковариаций для Y_n или их суммы, равной $E\|Y_n\|^2$). Однако в этих работах по-прежнему присутствуют ограничения на соотношение между числом слагаемых и размерностью. В статье [59] Юринский предложил метод, основанный на некоторых экстремальных соображениях, который позволил ему устранить эти ограничения и получить весьма просто неравенство

$$P(\|X_1 + \dots + X_n\| \geq rB_n) \leq 2 \exp\left\{-\frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{rL}{3B_n}\right)\right\},$$

где $X_j \in R^s$ или $X_j \in H$ и $EX_j = 0$, $|X_j| \leq L$, $B_n^2 = E\|X_1 + \dots + X_n\|^2$.

$L = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{L_j}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4E\|X_j\|^2}{L_j^2}}\right) \right\}$. Позже в [60] этот метод

был видоизменен так, что позволил учесть и роль отдельных собственных чисел матрицы ковариаций суммы $X_1 + \dots + X_n$. В [60] также дано применение этих результатов к многомерным непараметрическим критериям. Основное соображение здесь состоит в следующем. Обозначим через D_n верхнюю грань модуля уклонений эмпирической функции распределения построенной по n независимым наблюдениям, от теоретической. В многомерном случае (в отличие от одномерного) вероятность $P(D_n > x)$ зависит от исходного распределения, однако она допускает оценку сверху типа $C_1 e^{-C_2 x^2}$, где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ от этого распределения не зависят (впервые это обстоятельство по отношению к аналогу критерия Колмогоро-

рова было отмечено в [86], а по отношению к аналогу ω^2 -критерия — в [60]). В [58] результаты Юринского перенесены на некоторые неограниченные слагаемые, благодаря чему удалось получить для нормированных сумм $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ независимых случайных векторов $X_j \in R^s$ или $X_j \in H$ с $EX_j = 0$, $E\|X_j\|^3 = M_j < \infty$ неравенство (аналогичное одномерному неравенству работы [29])

$$P(\|Y_n\| \geq x) \leq K_1 \exp\left(-K_2 \frac{x^2}{\Lambda}\right) + K_3 \frac{M}{x^3 \sqrt{n}},$$

где $\Lambda = \frac{1}{n} \sum_1^n E\|X_j\|^2$, $M = \frac{1}{n} \sum_1^n E\|X_j\|^3$ и константы $K_1, K_2,$

K_3 не зависят от размерности.

2. Асимптотика вероятностей больших отклонений для сумм случайных векторов. Соответствующая теория развита несравненно меньше, чем в одномерном случае. Подробно изучено полиномиальное распределение (см., например, [97, 50, 77]). Более общий случай разобран в статье Боровкова и Рогозина [13], которая дает также общее представление о возникающих в многомерном случае трудностях.

§ 4. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ: ОЦЕНКИ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

В одномерном случае в качестве «расстояния» между распределениями широко используют «равномерное» отклонение соответствующих функций распределения: $\rho(F, S) = \sup_x |F(x) - S(x)|$. Величина $\rho(F, S)$ оценивается в терминах характеристических функций $f(t)$ и $g(t)$ с помощью хорошо известного неравенства Эссеена: при любом $T > 0$

$$\rho(F, S) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi T} \sup_x \frac{dS}{dx}.$$

Повторение рассуждений Эссеена в R^2 приводит к аналогичному неравенству, в правую часть которого входит двойной интеграл

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T \left| \frac{f(t^{(1)}, t^{(2)}) - g(t^{(1)}, t^{(2)})}{t^{(1)} t^{(2)}} \right| dt^{(1)} dt^{(2)},$$

в типичных случаях оказывающийся бесконечным. В [42] показано, как можно обойти это затруднение и получить неравенство, заменяющее в двумерном случае неравенство Эссеена. Однако равномерная оценка близости функций распределения в многомерном случае менее интересна, чем в

одномерном. В многомерном случае обычно рассматривают $\sup |P(A) - Q(A)|$, взятый или по классу \mathcal{C} всех борелевских выпуклых множеств ($\rho_{\mathcal{C}}$) или по классу \mathcal{A} всех борелевских множеств ($\rho_{\mathcal{A}}$). Оценка $\rho_{\mathcal{A}}$ через характеристические функции может быть проведена с помощью леммы [40], оценивающей значения $\mu(A)$ конечной обобщенной меры μ в R^s через преобразование Фурье $\omega(t)$ и расстояние $\beta(A)$ от границы $A \in \mathcal{A}$ до начала координат:

$$|\mu(A)| \leq C(s) \left\{ \frac{1}{s} Z_0 + \frac{1}{r} Z_{r+s} \right\} \frac{1}{1 + \beta^r},$$

где $r > 0$ — целое число, $C(s)$ зависит только от s ,

$$Z_l = \sup_{\theta} \int_{R^s} |\omega_{\theta}^{(l)}(t)| dt,$$

$\omega_{\theta}^{(l)}$ — l -я производная ω по направлению единичного вектора θ . Здесь предполагается дополнительно, что $\int \|\chi\|^{r+s} |\mu(dx)| <$

$< \infty$ и что Z_0, Z_1, \dots, Z_{r+s} определены.

Расстояние $\rho_{\mathcal{C}}(P, Q)$ можно оценить через $\rho_{\mathcal{A}}(P * N, Q * N)$, где N — надлежаще подобранное «сглаживающее» распределение (можно, впрочем, использовать основное неравенство работы [44], однако в конкретных случаях с его помощью пока получены более слабые оценки, чем с помощью сглаживания). Все указанные выше приемы применялись в доказательстве различных вариантов центральной предельной теоремы (см. ниже). О «расстоянии Леви» см. [21].

§ 5. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В R^s

В последние годы в этом направлении отмечается весьма существенный сдвиг. Можно напомнить, что суммирование независимых векторов (с наброском доказательства центральной предельной теоремы в двумерном случае) рассматривалось уже акад. А. А. Марковым («Исчисление вероятностей», изд. 4-ое, М., 1924, стр. 271—275). Первый строго доказанный результат (для двумерного случая) относится к 1926 году (С. Н. Берштейн). После работы Жуковского (1933 г.) к центральной предельной теореме в R^s обращались К. Эссен и Г. Бергстрём (1945), а затем наступил длительный перерыв. В последнее десятилетие эта тема снова привлекла внимание специалистов, и был получен ряд интересных результатов. Почти все они отражены в статьях А. Бикялиса [10, 11, 12], В. Ротаря [41] и В. Сазонова [47]. В доказательствах используются два основных метода: «метод композиций», восходящий к Бергстрёму, и метод характеристических функций.

В отличие от одномерного случая, где метод характеристических функций играет исключительную роль в исследовании предельных распределений для сумм независимых случайных величин, в многомерном случае пока такого положения нет. Некоторые результаты, полученные методом композиций, пока не удалось перекрыть методом характеристических функций.

Для того, чтобы сформулировать несколько наиболее типичных результатов, предположим, что случайные векторы X_1, X_2, \dots независимы, имеют одно и то же распределение P с нулевым математическим ожиданием, единичной матрицей ковариаций и конечными третьими моментами. Обозначим через P_n распределение нормированной суммы $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$, а через Φ — нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариаций. Тогда, как показано в [40, 41], для любого борелевского выпуклого $A \in R^s$

$$|P_n(A) - \Phi(A)| \leq C_2(s) \frac{E\|X_1\|^3}{1 + \beta^2(A)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где $C_2(s)$ зависит только от s и $\beta(A)$ обозначает расстояние от границы A до начала координат. Этот результат получен методом характеристических функций. Как все неравенства для разности $P_n - \Phi$, формулируемые в терминах моментов, он имеет тот недостаток, что при фиксированном n и распределении слагаемых, неограниченно приближающемся к нормальному, правая часть не стремится к нулю. Этот недостаток устраняется переходом к оценкам, в которые вместо моментов входят «псевдомоменты» (последнее понятие различными авторами определяется по-разному, но в любом случае для распределений, совпадающих с нормальными, «псевдомоменты» равны нулю). Так методом композиций в работе [30] установлена оценка: для любого борелевского выпуклого $A \in R^s$

$$|P_n(A) - \Phi(A)| \leq C_3(s) \max(\nu_3, \nu_3^{1/4}) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где $C_3(s)$ зависит только от s , $\nu_3 = \int_{R^s} \|x\|^3 |P - \Phi|(dx)$ и $|P - \Phi|$ означает вариацию меры $P - \Phi$. Наконец, также методом композиций в [47] доказано (для выпуклых борелевских $A \in R^s$) неравенство

$$|P_n(A) - \Phi(A)| \leq C_4(s) \frac{\bar{\nu}_3}{1 + \beta^2(A)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{\nu}_3 = |P - \Phi|(\{x : \|x\| \leq 1\}) + \int_{\|x\| > 1} \|x\|^3 |P - \Phi|(dx)$. Другие на-

правления исследования сходимости к нормальному закону в R^s (сходимость по вариации, локальные теоремы с той или иной метрикой для плотностей и т. п.) представлены в работах [96, 66—68, 54, 28, 5, 6, 55—57].

Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в сепарабельных гильбертовых пространствах пока весьма далеки от окончательных (см. [37, 16]), хотя условия сходимости изучены довольно полно ([24—26]).

§ 6. УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В R^s

Теория многомерных устойчивых распределений еще весьма далека от завершения. Условимся обозначать символом $X \sim Y$ тот факт, что случайные величины (или векторы) одинаково распределены. Как известно, распределение F случайной величины X называют устойчивым, если для независимых $X_1 \sim X$ и $X_2 \sim X$ и любых $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ существуют такие $a > 0$ и b , что

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim aX + b.$$

Устойчивые распределения и только они могут быть предельными для нормированных сумм

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{c_n} \rightarrow d_n, \quad c_n > 0,$$

независимых одинаково распределенных случайных величин. В многомерном случае можно определять устойчивость распределений так же, как это сделано выше, понимая под a , a_i и b константы (такое определение принадлежит П. Леви и Э. Фельдхейму; устойчивые в этом смысле распределения описаны в известной монографии П. Леви 1937 г., см. также [79]). Можно, однако, понимать под a и a_i матрицы и под b — вектор. Эта последняя возможность рассматривалась в [49] (полные доказательства имеются в диссертации Г. Н. Саковича). Но при столь общем определении теряется связь с предельными распределениями для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов. Естественнее поэтому пытаться выделить такое определение устойчивости, которое наиболее тесно было бы связано с задачей суммирования одинаково распределенных векторов. Отметим прежде всего, что в этой задаче (если рассматривать предельные распределения, отличные от нормальных) неизбежно обращение к матричной нормировке. Так, в двумерном случае нетрудно привести пример последовательности $\{X_i\}$ независимых одинаково распределенных векторов со следующими свойствами: обозначим ортогональное преобразование — поворот на угол θ . Тогда при некоторых t и λ , $0 < \lambda < t$, нормированные суммы

$$U_{-\theta_n} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n^\alpha}, \quad \alpha = \frac{m}{\lambda}, \quad \theta_n = \frac{1}{\lambda} \ln n,$$

имеют при любом n то же самое распределение, что и отдельные слагаемые (таким образом, при увеличении числа слагаемых распределение суммы существенно «вращается», причем углы $-\theta_n$, приведенные по модулю 2π , образуют всюду плотное множество на $(0, 2\pi)$). В то же время ни при каком фиксированном θ и диагональных матрицах D_n и случайных векторах d_n распределения сумм

$$D_n U_\theta (X_1 + \dots + X_n) - d_n$$

не могут сходиться к невырожденному предельному закону (иными словами, ни в каком фиксированном базисе «диагональная» или покоординатная, нормировка не приводит к сходимости). В этой связи заслуживает внимания результат статьи [99]. В ней невырожденное распределение в R^s называется устойчивым, если его можно представить как слабый предел распределений нормированных сумм $A_n(X_1 + \dots + X_n) + b_n$, где X_j — независимые одинаково распределенные случайные векторы в R^s , A_n — невырожденные линейные преобразования пространства R^s и $b_n \in R^s$. Распределение устойчиво в этом смысле тогда и только тогда, когда его характеристическая функция $f(t)$ для всех $u > 0$ удовлетворяет соотношению

$$f^u(t) = e^{i(t, b_u)} f((u^B)^* t),$$

где $b_u \in R^s$, B — некоторое невырожденное линейное преобразование R^s , $u^B = \exp\{B \log u\}$. В [99] описаны преобразования B и функции b_u , которые могут возникать таким образом. В частности, спектр B должен быть расположен в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 1/2$, и все собственные значения B , лежащие на прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, должны быть простыми. Если единица не является собственным значением B , то найдется такое $x_0 \in R^s$, что $b_u = ux_0 - u^B x_0$.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Архаров Л. В., О неравенстве Чебышева для двумерного случая. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 2, 353—360 (РЖМат, 1971, 12В35)
2. Бикялис А. Об уточнении остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1964, 4, № 2, 153—158 (РЖМат, 1965, 2В36)
3. —, Об остаточных членах в многомерных предельных теоремах. Докл. АН СССР, 1966, 168, № 4, 731—732 (РЖМат, 1967, 1В12)
4. —, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для харак-

- теристических функций и их производных. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1968, 7, № 4, 571—582 (РЖМат, 1969, 6В14)
5. —, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 8, № 3, 405—422 (РЖМат, 1969, 8В13)
 6. —, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых одинаково распределенных решетчатых случайных векторов. Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, № 3, 499—507 (РЖМат, 1970, 4В17)
 7. —, Об асимптотическом разложении для произведений многомерных характеристических функций. Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, № 3, 508—511 (РЖМат, 1970, 4В18)
 8. —, Неравенства для многомерных характеристических функций. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1970, 10, № 1, 5—12 (РЖМат, 1970, 10В19)
 9. —, Асимптотические разложения для распределения сумм независимых нерешетчатых случайных векторов. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1970, 10, № 4, 673—679 (РЖМат, 1971, 7В44)
 10. —, О центральной предельной теореме в R^k . I. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1971, II, № 1, 27—58 (РЖМат, 1971, 10В39)
 11. —, О центральной предельной теореме в R^k . II. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1972, XII, № 1, 73—84 (РЖМат, 1972, 10В37)
 12. —, О центральной предельной теореме в R^k . III. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1972, XII, № 3
 13. **Боровков А. А., Рогозин Б. А.**, О центральной предельной теореме в многомерном случае. Теория вероятностей и ее применения, 1966, 10, № 1, 61—69 (РЖМат, 1966, 4В11)
 14. **Вахания Н. Н.**, Вероятностные распределения в линейных пространствах. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академия. Гамотвлиტი центрис шромеби, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР, 1971, 10, № 3, 165с. (РЖМат, 1971, 12В11)
 15. —, **Канделаки Н. П.**, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академия. Сообщ. АН ГрузССР, 1968, 50, № 2, 273—276 (РЖМат, 1968, 12В39)
 16. —, —, Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространстве Гильберта. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академия. Гамотвлиტი центрис шромеби, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР, 1969, 9, № 1, 160—160 (РЖМат, 1970, 4В14)
 17. **Виноградов И. М.**, Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., «Наука», 1971, 159с. (РЖМат, 1971, 8А77К)
 18. **Гефдинг В.**, Об одной теореме В. М. Золотарева. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 1, 96—99 (РЖМат, 1966, 10В12)
 19. **Золотарев В. М.**, Об одной вероятностной задаче. Теория вероятностей и ее применения, 1961, 6, № 2, 219—222 (РЖМат, 1962, 3В8)
 20. —, Несколько замечаний о многомерных неравенствах типа неравенств Бернштейна—Колмогорова. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 2, 289—294 (РЖМат, 1969, 3В10)
 21. —, Оценки различия распределений в метрике Леви. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1971, 112, 224—231 (РЖМат, 1972, 2В8)
 22. **Калинин В. М.**, Сходящиеся и асимптотические разложения для вероятностных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, № 1, 24—38 (РЖМат, 1967, 10В7)
 23. —, Предельные свойства вероятностных распределений. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1968, 104, 88—134 (РЖМат, 1969, 9В10)
 24. **Канделаки Н. П., Сазонов В. В.**, К центральной предельной теореме для случайных элементов, принимающих значения из гильбертова

- пространства. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 1, 43—52 (РЖМат, 1964, 8В14)
25. **Круглов В. М.**, Сходимость распределений сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 2, 346—347 (РЖМат, 1971, 12В62)
 26. —, Сходимость распределений сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве к нормальному и пуассоновскому распределениям. Докл. АН СССР, 1971, 197, № 6, 1258—1260 (РЖМат, 1971, 12В61)
 27. **Линник Ю. В.**, Эйдлин В. Л., Замечание об аналитических преобразованиях нормальных векторов. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 4, 751—754 (РЖМат, 1969, 8В7)
 28. **Маматов М.**, Халиков М. К., О глобальных предельных теоремах для плотностей в многомерном случае. УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-мат. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1964, № 1, 18—21 (РЖМат, 1964, 9В9)
 29. **Нагаев С. В.**, Фук Д. Х., Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 4, 660—675
 30. **Паулаускас В.**, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 9, № 2, 329—343 (РЖМат, 1970, 5В20)
 31. —, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 9, № 4, 791—815 (РЖМат, 1970, 8В21)
 32. —, Слушник А., Оценка скорости сходимости в двумерной центральной предельной теореме. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 8, № 3, 591—595 (РЖМат, 1969, 8В14)
 33. **Прохоров А. В.**, О многомерных аналогах неравенств С. Н. Бернштейна. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 2, 275—288 (РЖМат, 1969, 1В21)
 34. —, Неравенства С. Н. Бернштейна в многомерном случае. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 3, 462—470 (РЖМат, 1969, 5В18)
 35. —, Об одном вероятностном неравенстве. Мат. заметки, 1968, 3, № 6, 731—738 (РЖМат, 1969, 9В15)
 36. **Прохоров Ю. В.**, Распространение неравенств С. Н. Бернштейна на многомерный случай. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 2, 266—274 (РЖМат, 1969, 1В20)
 37. —, Сазонов В. В., Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме в бесконечномерном случае. В сб. «Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969. Ч. I». Новосибирск, 1969, 223—229 (РЖМат, 1970, 4В12)
 38. **Рвачева Е. Л.**, Многомерная локальная теорема для предельных устойчивых распределений. Тр. Ин-та мат. и мех. АН УССР, 1953, 10, № 1, 106—121 (РЖМат, 1954, 2640)
 39. —, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1955, 29, № 6(1), 5—44 (РЖМат, 1957, 679)
 40. **Ротарь В. И.**, О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 2, 370—372 (РЖМат, 1970, 12В26)
 41. —, Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 4, 647—665 (РЖМат, 1971, 3В16)
 42. **Садикова С. М.**, Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением к центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения, 1966, 11, № 3, 369—380 (РЖМат, 1967, 3В27)
 43. —, Некоторые неравенства для характеристических функций. Теория

- вероятностей и ее применения, 1966, 11, № 3, 500—506 (РЖМат, 1967, 3В11)
44. —, Расстояние между распределениями, связанное с их значениями на выпуклых множествах. Докл. АН СССР, 1967, 176, № 4, 787—789 (РЖМат, 1968, 4В21)
 45. —, О многомерной центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 1, 164—170 (РЖМат, 1969, 1В33)
 46. Сазонов В. В., К оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, № 1, 82—95 (РЖМат, 1967, 10В17)
 47. —, К оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Тр. 6-го Симпозиума по теории вероятностей и мат. статистике, Беркли, 1970
 48. —, О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 1, 191—194 (РЖМат, 1968, 10В33)
 49. Сакович Г. Н., О многомерных устойчивых распределениях. Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 2, 254
 50. Санов И. Н., Способ получения асимптотики вероятностей больших отклонений нелинейных статистик от мультиномиального распределения и его применения. Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, № 4, 761—763
 51. Сарманов О. В., Замечания о некоррелированных гауссовских зависимых случайных величинах. Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, № 1, 141—143 (РЖМат, 1967, 10В9)
 52. —, Об одном свойстве коэффициента корреляции. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 3, 562—563 (РЖМат, 1971, 3В14)
 53. Скороход А. В., Замечание о гауссовских мерах в банаховом пространстве. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 3, 519—520 (РЖМат, 1971, 4В88)
 54. Халиков М. К., Локальная предельная теорема для сумм независимых случайных векторов. УзССР Фанлар Акад ахбороти. Физ.-мат фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1958, № 2, 95—105 (РЖМат, 1961, 8В18)
 55. Шервашидзе Т. Л., Предельные теоремы для одного класса случайных векторов. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1971, 61, № 1, 21—24 (РЖМат, 1971, 6В28)
 56. —, О равномерной оценке скорости сходимости в многомерной локальной предельной теореме для плотностей. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 4, 765—767 (РЖМат, 1972, 2В23)
 57. —, Саулис Л. И., О многомерных предельных теоремах для плотностей распределения. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1970, 60, № 3, 533—536 (РЖМат, 1971, 7В51)
 58. Эбралидзе Ш. С., Неравенства для вероятностей больших отклонений в многомерном случае. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 4, 765—769 (РЖМат, 1972, 2В33)
 59. Юринский В. В., О бесконечномерном варианте неравенств С. Н. Бернштейна. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 1, 106—107 (РЖМат, 1970, 9В8)
 60. —, О неравенствах для больших отклонений некоторых статистик. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 2, 386—389 (РЖМат, 1971, 11В56)
 61. —, О применении леммы ван дер Корпута для оценки характеристических функций некоторых сингулярных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 2, 389—391 (РЖМат, 1971, 12В29)
 62. —, Оценки для характеристических функций некоторых вырожденных

- многомерных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, № 1, 99—110 (РЖМат, 1972, 6B9)
63. Bahr B. von, On the central limit theorem in R_k . Ark. mat., 1967, 7, № 1, 61—69 (РЖМат, 1968, 9B17)
64. —, Multi-dimensional integral limit theorems. Ark. mat., 1967, 7, № 1, 71—88 (РЖМат, 1969, 2B22)
65. Bergström H., On the central limit theorem in R^h . The remainder term special Borel sets. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, 14, № 2, 113—126 (РЖМат, 1970, 8B20)
66. Bhattacharya R. N., The central limit theorem in R^h , $k > 1$, and normal approximation to the probabilities of Borel sets. Ann. Math. Stat., 1968, 39, № 4, 1360—1361
67. —, Rates of weak convergence for the multi-dimensional central limit theorem. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 1, 69—85 (РЖМат, 1970, 9B20)
68. —, Berry—Esseen bounds for the multi-dimensional central limit theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, 74, № 2, 285—287 (РЖМат, 1971, 6B21)
69. Ciesielski Z., Lectures on Brownian motion, heat conduction and potential theory. Lect. Notes Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1966, № 3, ii, 259 pp. (РЖМат, 1971, 12B162)
70. Cuppens R., Ensembles indépendants et décomposition des fonctions caractéristiques. C. r. Acad. sci., 1971, 272, № 22, A1464—A1466 (РЖМат, 1971, 12B26)
71. Fernique X., Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C. r. Acad. sci., 1970, 270, № 25, A1698—A1699 (РЖМат, 1971, 2B6)
72. Firestone C. D., Hanson J. E., Uncorrelated Gaussian dependent random variables. Amer. Math. Mon., 1963, 70, № 6, 659—660 (РЖМат, 1964, 3B22)
73. Fleiss J. L., On the distribution of a linear combination of independent chi-squares. J. Amer. Statist. Assoc., 1971, 66, № 333, 142—144 (РЖМат, 1971, 12B256)
74. Griffiths R. C., Infinitely divisible multivariate gamma distributions. Sankhya. Indian J. Statist., 1970, A32, № 4, 393—404 (РЖМат, 1971, 12B18)
75. Harville D. A., On the distribution of linear combinations of non-central chi-squares. Ann. Math. Stat., 1971, 42, № 2, 809—811 (РЖМат, 1971, 11B180)
76. Heppes A., On the determination of probability distributions of more dimensions by their projections. Acta math., 1956, 7, № 3-4, 403—410 (РЖМат, 1958, 2226)
77. Hoeffding W., On sequences of sums of independent random vectors. Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1960. Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 213—226 (РЖМат, 1963, 4B100)
78. —, On probabilities of large deviations. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1965—1966. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1967, 203—219 (РЖМат, 1970, 1B44)
79. Jajte R., On stable distributions in Hilbert space. Stud. math., 1968, 30, № 1, 63—71 (РЖМат, 1969, 5B19)
80. Jogdeo Kumar, A simple proof of an inequality for multivariate normal probabilities of rectangles. Ann. Math. Stat., 1970, 41, № 4, 1357—1359 (РЖМат, 1971, 6B10)
81. Johnson N. L., Kotz S., Tables of distributions of quadratic forms in central normal variables. I. 1967, Inst. of Stat. Mimeo Series № 543, Dept. Stat., University of North Carolina, Chapel Hill, N. C.
82. —, —, Tables of distribution of quadratic forms in central normal variables. II. 1967, Inst. of Stat. Mimeo Series № 557, Dept. Stat., University of North Carolina, Chapel Hill, N. C.

83. Karlin S., Studden W. J., Tschebysheff systems: with applications in analysis and statistics. 1966, N. Y., Intersci. Publ.
84. Kendall D. S., On the number of lattice points inside a random oval. Quart. J., 1948, 19, № 1, 1—26
85. Khatri C. G., Further contributions to some inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds. Ann. Inst. Statist. Math., 1970, 22, № 3, 451—458 (PЖMat, 1971, 10B222)
86. Kiefer J., On large deviations of the empiric d. f. of vector chance variables and a law of iterated logarithm. Pacif. J. Math., 1961, 11, № 2, 649—660 (PЖMat, 1962, 7B56)
87. Kotz S., Johnson N. L., Boyd D. W., Series representations of distributions of quadratic forms in normal variables. I. Central case. Ann. Math. Stat., 1967, 38, № 3, 823—837 (PЖMat, 1971, 11B28)
88. —, —, —, Series representations of distributions of quadratic forms in normal variables. II. Non-central case. Ann. Math. Stat., 1967, 38, № 3, 838—848 (PЖMat, 1971, 11B29)
89. Kullback S., A bound for the variation of Gaussian densities. Ann. Math. Stat., 1969, 40, № 6, 2180—2182 (PЖMat, 1971, 8B134)
90. Landau H. J., Shepp L. A., On the supremum of a Gaussian process. Sankhya. Indian J. Statist., 1970, A32, № 4, 369—378 (PЖMat, 1971, 12B214)
91. Marsaglia G., Tables of the distribution of quadratic forms of ranks two and three. 1960, Tech. Rep., № D1-82-0015-1, Boeing Scientific Research laboratories
92. Marshall A. W., Olkin I., Multivariate Chebyshev inequalities. Ann. Math. Stat., 1960, 31, № 4, 1001—1014 (PЖMat, 1962, 2B11)
93. Meyer R. M., Note on a 'multivariate' form of Bonferroni's inequalities. Ann. Math. Stat., 1969, 40, № 2, 692—693 (PЖMat, 1971, 8B7)
94. Mudholkar Govind S., Rao Poduri S. R. S., Some sharp multivariate Tchebycheff inequalities. Ann. Math. Stat., 1967, 38, № 2, 393—400 (PЖMat, 1971, 12B36)
95. Press S. J., Linear combinations of non-central chi-square variates. Ann. Math. Stat., 1966 37, № 2, 480—487 (PЖMat, 1971, 11B168)
96. Ranga Rao R., On the central limit theorem in R^k . Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67, № 4, 359—361 (PЖMat, 1962, 7B12)
97. Richter W., Mehrdimensionale Grenzwertsätze für grosse Abweichungen und ihre Anwendung auf die Verteilung von χ^2 . Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 1, 31—42 (PЖMat, 1966, 1B80)
98. Sazonov V. V., On the multi-dimensional central limit theorem. Sankhya. Indian J. Statist., 1968, A30, № 2, 181—204 (PЖMat, 1969, 6B21)
99. Sharpe M., Operator-stable probability distributions on vector groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 136, № 1, 51—65 (PЖMat, 1970, 4B9)
100. Solomon H., Distribution of quadratic forms-tables and applications. 1960, Tech. Rep., № 45, Appl. Math. Lab. Stanford University
101. Webster J. T., On the application of the method of Das in evaluating a multivariate normal integral. Biometrika, 1970, 57, № 3, 657—660 (PЖMat, 1971, 7B156)
102. Whittle P., Continuous generalizations of Tchebichev's inequality. Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 4, 386—394 (PЖMat, 1960, 10631)