С. А. Айсагалиев, С. С. Айсагалиева, Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений, *Дифференц. уравнения*, 1993, том 29, номер 4, 555–567

АПРЕЛЬ 1993 г., ТОМ 29, № 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

С. А. АЙСАГАЛИЕВ, С. С. АЙСАГАЛИЕВА

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть уравнение движения управляемой системы имеет вид

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(x(t),u(t),t),\quad x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1, \tag{1}$$

$$u(t)\in L_2[t_0,t_1], \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — заданные матрицы соответственно порядков $n\times n$, $n\times r$ с кусочно-непрерывными элементами, функция $f(x,u,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным (x,u) в области $x\in E^n$, $u\in E^r$, $t\in[t_0,t_1]$ и

$$|f(x,u,t)-f(y,u,t)|\leqslant\varphi(t)|x-y|,\quad \forall x,y\in E^n,\quad \varphi(t)\geqslant 0,\quad \varphi(t)\in L_1[t_0,t_1],$$

$$|f(x,u,t)|\leqslant c_0(|x|+|u|^2)+c_1(t),\quad c_0\geqslant 0,\quad c_1(t)\geqslant 0,\quad c_1(t)\in L_1[t_0,t_1],$$

t_0, t_1 — фиксированные моменты времени, x_0, $x_1\in E^n$ — заданные точки.

При указанных условиях для любого выбранного $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$ и начального условия $x_0\in E^n$ уравнения (1), (2) имеют единственное решение, причем решение $x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, является абсолютно непрерывной функцией.

Краевая задача (1), (2) сводится к интегральному уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)u(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)dt=a, \tag{3}$$

где пара $(x(t),u(t))\in C[t_0,t_1]\dotplus L_2[t_0,t_1]$, а вектор $a=\Phi(t_0,t_1)[x_1-\Phi(t_1,t_0)x_0]$, $\Phi(t,\tau)=\Theta(t)\Theta^{-1}(\tau)$, $\Theta(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi}=A(t)\xi$, $t,\tau\in[t_0,t_1]$, символ $\dotplus$ означает прямую сумму банаховых пространств.

Ставится задача: найти условия существования решения интегрального уравнения (3) и предложить конструктивный метод определения управления $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$, которое переводит траекторию системы (1), (2) из начального состояния $x_0\in E^n$ в состояние $x_1\in E^n$ за заданное время t_1-t_0.

Решение краевой задачи (1), (2) имеет многочисленные приложения в механике, энергетике и экономике, в частности формирование управляющих воздействий в робототехнических системах [1], управление состоянием источников электроэнергий, работающих на общую сеть [2], выход экономической системы в новый режим функционирования [3] и др.

Ряд методов решения краевой задачи (1), (2) предложен в [4—6]. В отличие от указанных работ здесь предлагается новый метод решения данной задачи на основе итерационного процесса Ньютона.

1. Свойства решения интегрального уравнения. Рассмотрим интегральное уравнение (3). Множество всех его решений обозначим через U_H, т. е.

$$U_H=\{(x(t),u(t))\in C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1]\mid\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)u(t)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),\ u(t),t)dt=a\}\subset C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1].$$

Введем следующие обозначения:

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt,\ C(t)=B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$t\in[t_0,t_1].$$

В пространстве $L_2[t_0,t_1]$ выделим множество V, определяемое по формуле

$$V=\{v(t)\in L_2[t_0,t_1]\mid v(t)=w(t)+C(t)a-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)w(t)dt,$$

$$\forall w(t),\ w(t)\in L_2[t_0,t_1]\}\subset L_2[t_0,t_1].$$

В пространстве $C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1]$ наряду с множеством U_H рассмотрим множество

$$V_H=\{(x(t),u(t))\in C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1]\mid u(t)=v(t)-$$

$$-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)dt,\ \forall v(t),\ v(t)\in V\}\subset$$

$$\subset C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1].$$

Теорема 1. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно-определенная. Для того чтобы пара $(x(t),u(t))\in C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1]$ была решением интегрального уравнения (3), необходимо и достаточно, чтобы $(x(t),u(t))\in V_H$, т. е. множество $U_H=V_H$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать включения $U_H\subset V_H$ и $V_H\subset U_H$. Как следует из теоремы 2 [5], множество $V_H\subset U_H$. Поэтому ограничимся только доказательством необходимости, т. е. покажем, что множество $U_H\subset V_H$.

Действительно, по известной паре $(x(t),u(t))\in U_H$ можно определить вектор $q(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)dt.$

Теперь интегральное уравнение (3) запишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)u(t)dt=a-q(t_1)=\bar{a}. \tag{4}$$

Согласно лемме 1 [5], функция $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$ как решение интегрального уравнения (4) представима в виде

$$u(t)=w(t)+C(t)\bar{a}-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)w(t)dt.$$

Отсюда с учетом того, что вектор $\bar{a}=a-q(t_1)$, получим

$$u(t)=v(t)-C(t)q(t_1)=v(t)-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)dt,$$

$$t\in[t_0,t_1].$$

Последнее соотношение означает, что пара $(x(t),u(t))\in V_H$. Отсюда следует, что множество $U_H\subset V_H$. Необходимость доказана. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Интегральное уравнение (3) равносильно интегральному уравнению*

$$u(t)=v(t)-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)\,dt,\quad v(t)\in V, \tag{5}$$

где пара $(x(t),u(t))\in C[t_0,t_1]\dot{+}L_2[t_0,t_1]$.

Таким образом, исходное интегральное уравнение (3) сведено к интегральному уравнению (5), которое содержит произвольную функцию $v(t)\in V$, где V — заданное множество из $L_2[t_0,t_1]$. Примечательно то, что путем целенаправленного выбора функций $v(t)\in V$ можно улучшить скорость сходимости итерационных методов решения интегрального уравнения (5).

2. Производная оператора. Решение дифференциального уравнения (1) может быть записано в виде

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau,$$
$$t\in[t_0,t_1].$$

Для управления (5) решение дифференциального уравнения (1) запишется так:

$$\begin{aligned}x(t)&=\Phi(t,t_0)x_0-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)\,dt+\\&+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau=\\&=y(t)-S(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)\,dt+\\&+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau,\quad t\in[t_0,t_1],\end{aligned} \tag{6}$$

где матрица $S(t)=\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)$, а функция

$$\begin{aligned}y(t)&=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)\,d\tau=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\times\\&\times B(\tau)w(\tau)\,d\tau+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)\times\\&\times W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)w(t)\,dt,\quad t\in[t_0,t_1].\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что значения $y(t_0)=x_0$, $y(t_1)=x_1$. Введя обозначения

$$\Phi_1(u(t),v(t),x(t),t)=u(t)-v(t)+C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)\,dt, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(u(t),v(t),x(t),t)&=x(t)-y(t)+S(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)f(x(t),u(t),t)\,dt-\\&-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau,\end{aligned} \tag{9}$$

интегральные уравнения (5), (6) запишем в следующей операторной форме:

$$\Phi(u, v, x) = (\Phi_1(u, v, x), \Phi_2(u, v, x)) = 0, \ v(t) \in V. \tag{10}$$

Легко убедиться в том, что оператор $\Phi(u, v, x)$ при каждом фиксированном $v(t) \in V$ отображает $C[t_0, t_1] \dot{+} L_2[t_0, t_1]$ в себя. Пусть $(x(t), u(t)) \in C[t_0, t_1] \dot{+} L_2[t_0, t_1]$ — произвольно выбранная пара, в частности, $u(t) \in L_2[t_0, t_1]$ — произвольно выбранное управление, а $x(t) = x(t; x_0, t_0, u)$, $t \in [t_0, t_1]$,— решение дифференциального уравнения (1), исходящее из точки $x_0 \in E^n$ под воздействием управления $u = u(t)$.

Лемма 1. *Пусть матрица* $W(t_0, t_1)$ *положительно-определенная и пусть* $(x(t), u(t)) \in C[t_0, t_1] \dot{+} L_2[t_0, t_1]$ *— произвольно выбранная пара. Тогда*

$$\inf_{v(t) \in V} \|\Phi_1(u(t), v(t), x(t), t)\|_{L_2} = \|\Phi_1(u(t), \mu(t), x(t), t)\|_{L_2} =$$

$$= \Big(\int_{t_0}^{t_1} |C(t) d(t_1)|^2 dt\Big)^{1/2} = \eta_1, \tag{11}$$

$$\|\Phi_2(u(t), \mu(t), x(t), t)\|_C = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |S(t) d(t_1) + \xi(t) - \Phi(t, t_0) d(t)| = \eta_2, \tag{12}$$

где функции

$$\mu(t) = u(t) + C(t) a - C(t) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) u(t) dt, \tag{13}$$

$$d(t) = -a + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau) f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \tag{14}$$

$$\xi(t) = x(t) - \Phi(t, t_0)(x_0 + a), \ t \in [t_0, t_1]. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $(x(t), u(t)) \in C[t_0, t_1] \dot{+} L_2[t_0, t_1]$ — произвольно выбранная пара. Определим функцию $v(t) \in V$ из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\|\Phi_1(u, v, x, t)\| \to \inf, \quad v(t) \in V.$$

Решением данной оптимизационной задачи является вектор-функция $v_*(t) = \mu(t) \in V$, где функция $\mu(t)$ определяется по формуле (13). Подставляя значение $\mu(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, в правую часть выражения (8), получим $\Phi_1(u(t), \mu(t), x(t), t) = C(t) d(t_1)$, где функция $d(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, определяется соотношением (14). Отсюда следует справедливость формулы (11).

Согласно формуле (7), вектор-функция

$$y(t) = y(t; \mu) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau +$$

$$+ S(t) \Big[a - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) u(t) dt\Big], \quad t \in [t_0, t_1].$$

Подставляя значение $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, в правую часть выражения (9), получим $\Phi_2(u(t), \mu(t), x(t), t) = S(t) d(t_1) + \xi(t) - \Phi(t, t_0) d(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, где функция $\xi(t)$ определяется формулой (15). Отсюда следует справедливость соотношения (12). Лемма доказана.

Заметим, что значения $\Phi_2(t_0) = x(t_0) - x_0$, $\Phi_2(t_1) = x(t_1) - x_1$. Если пара $(x(t), u(t)) \in C[t_0, t_1] \dot{+} L_2[t_0, t_1]$ — решение интегрального уравнения (5), то вектор $d(t_1)=0$, следовательно, $\Phi_1(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$. Отсюда следует, что $\Phi_2(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия леммы 1 и пусть, кроме того, функция $f(x,u,t)$ удовлетворяет следующим условиям Липшица:*

$$\left\|\frac{\partial f(x+\Delta x,u+h,t)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right\|\leqslant L(|\Delta x|+|h|),$$

$$\left\|\frac{\partial f(x+\Delta x,u+h,t)}{\partial u}-\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\right\|\leqslant L(|\Delta x|+|h|),$$

$$\forall (x,u,t),\ (x+\Delta x,u+h,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,t_1].$$

Тогда оператор $\Phi(u,x)$ непрерывно дифференцируем в точке $(x,u)\in$ $\in C[t_0,t_1]\dotplus L_2[t_0,t_1]$ при $v(t)=\mu(t)\in V$, причем его производная Фреше равна

$$\Phi'(u,x)\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_1'(u,x)\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}\\ \Phi_2'(u,x)\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

$$\Phi'(u,x)\in\mathscr{L}(X),\ X=C[t_0,t_1]\dotplus L_2[t_0,t_1],$$

где

$$\Phi_1'(u,x)\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}=C(t)\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)h(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\Delta x(t)+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}h(t)\right]dt\right\},\tag{16}$$

$$\Phi_2'(u,x)\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}=\Delta x(t)+S(t)\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)h(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\Delta x(t)+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}h(t)\right]dt\right\}-$$

$$-\Phi(t,t_0)\left\{\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\left[\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Delta x(\tau)+\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial u}h(\tau)\right]d\tau\right\},\tag{17}$$

где $x=x(t)$, $u=u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$,— заданные функции.

Кроме того, производная $\Phi'(u,x)\in\mathscr{L}(X)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. $\|\Phi'(u,x)-\Phi'(v,y)\|\leqslant l(\|u-v\|_{L_2}+\|x-y\|_C)$, $l=$ $=\mathrm{const}>0$, $\forall(x,u)$, $(y,v)\in C[t_0,t_1]\dotplus L_2[t_0,t_1]$.

Доказательство. Пусть $h(t)\in L_2[t_0,t_1]$, $\Delta x(t)\in C[t_0,t_1]$ — произвольные приращения управления и фазовой траектории. Как следует из леммы 1, при $v(t)=\mu(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, приращение

$$\Delta\Phi_1(u,x)=\Phi_1(u+h,x+\Delta x)-\Phi_1(u,x)=C(t)\Delta d(t_1),$$

где

$$\Delta d(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)h(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\,[f(x(t)+$$
$$+\Delta x(t),u(t)+h(t),t)-f(x(t),u(t),t)]\,dt.$$

Отсюда с учетом того, что

$$f(x+\Delta x,u+h,t)-f(x,u,t)=\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,u+\Theta h,t)}{\partial x}\Delta x+$$
$$+\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,u+\Theta h,t)}{\partial u}h=\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}h+$$
$$+\left[\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,u+\Theta h,t)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right]\Delta x+$$
$$+\left[\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,u+\Theta h,t)}{\partial u}-\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\right]h,$$

получим

$$\Delta\Phi_1(u,x)=C(t)\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)h(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\Delta x(t)+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}h(t)\right]dt\right\}+R_1(t), \tag{18}$$

где

$$R_1(t)=C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\left\{\left[\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,u+\Theta h,t)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right]\Delta x(t)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial f(x+\Theta\Delta x,u+\Theta h,t)}{\partial u}-\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\right]h(t)\right\}dt,\quad t\in[t_0,t_1].$$

Тогда, согласно условию теоремы, верна оценка

$$|R_1(t)|\leqslant\|C(t)\|L\int_{t_0}^{t_1}\|\Phi(t_0,t)\|(|\Delta x(t)|+|h(t)|)^2dt,\quad t\in[t_0,t_1].$$

Отсюда с учетом того, что $(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)$, $a\geqslant0$, $b\geqslant0$, получим

$$\|R_1(t)\|_{L_2}\leqslant C_1(\|\Delta x\|_C+\|h\|_{L_2})^2,\quad C_1=2k_1L\Big(\int_{t_0}^{t_1}\|C(t)\|^2dt\Big)^{1/2},$$

где $k_1=\max\Big(\int_{t_0}^{t_1}\|\Phi(t_0,t)\|dt,\ \max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\|\Phi(t_0,t)\|\Big)$. Справедливо неравенство

$$\frac{\|R_1\|_{L_2}}{\|\Delta x\|_C+\|h\|_{L_2}}\leqslant C_1(\|\Delta x\|_C+\|h\|_{L_2})\to0 \text{ при } (\|\Delta x\|_C+\|h\|_{L_2})\to0.$$

Отсюда и из выражения (18) следует справедливость соотношения (16).

Из леммы 1 следует, что приращение

$$\Delta\Phi_2(u,x)=\Phi_2(u+h,x+\Delta x)-\Phi_2(u,x)=S(t)\Delta d(t_1)+\Delta x(t)-$$
$$-\Phi(t,t_0)\Delta d(t).$$

Далее, по изложенной выше схеме доказывается справедливость соотношения (17). Из-за громоздкости выкладок доказательство второго утверждения теоремы опускается (см. [6]). Теорема доказана.

3. Обратный оператор. Рассмотрим операторное уравнение

$$\Phi'(u, x)\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}=\bar{\xi}, \quad \bar{\xi}=(\xi_1, \xi_2)\in X. \tag{19}$$

Если существует обратный оператор $[\Phi'(u, x)]^{-1}$, то из данного уравнения имеем

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ h\end{pmatrix}=[\Phi'(u, x)]^{-1}\bar{\xi}.$$

Как следует из соотношений (16), (17), в развернутой форме операторное уравнение (19) запишется так:

$$C(t)\left[\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\bar{B}(t)h(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}\Delta x(t)dt\right]=\xi_1(t), \tag{20}$$

$$\Delta x(t)+S(t)\left[\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\bar{B}(t)h(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}\times\right.$$
$$\left.\times\Delta x(t)dt\right]-\Phi(t, t_0)\left[\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0, \tau)\bar{B}(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0, \tau)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial f(x, u, \tau)}{\partial x}\Delta x(\tau)d\tau\right]=\xi_2(t), \tag{21}$$

где матрица $\bar{B}(t)=B(t)+\partial f(x(t), u(t), t)/\partial u$, $t\in[t_0, t_1]$.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{A}(t)=A(t)+\partial f(x(t), u(t), t)/\partial x, \quad \bar{\Phi}(t, \tau)=\bar{\Theta}(t)\bar{\Theta}^{-1}(\tau), \tag{22}$$

$$\bar{C}(t)=\bar{B}^*(t)\Phi^*(t_0, t)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1), \quad \bar{W}(t_0, t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\bar{B}(t)\bar{B}^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt, \tag{23}$$

$$M(t_0, t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}\int_0^t\bar{\Phi}(t, \tau)\bar{B}(\tau)\bar{C}(\tau)d\tau dt, \tag{24}$$

где $\bar{\Theta}(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{y}(t)=\bar{A}(t)y(t)$.

В итерационном методе Ньютона функции $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ выбираются равными: $\xi_1(t)=-\Phi_1(u(t), \mu(t), x(t), t)=-C(t)d(t_1)$, $\xi_2(t)=-\Phi_2(u(t), \mu(t), x(t), t)=-S(t)d(t_1)-\xi(t)+\Phi(t, t_0)d(t)$, $t\in[t_0, t_1]$. В дальнейшем полагаем, что функции $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, известны и определяются указанными выражениями.

Теорема 3. *Если матрицы $W(t_0, t_1)$, $\bar{W}(t_0, t_1)$, $D=I_n+M(t_0, t_1)$, где I_n — единичная матрица порядка $n\times n$, неособые, то существует обратный оператор $[\Phi'(u, x)]^{-1}$ и верны соотношения*

$$h(t)=\bar{C}(t)D^{-1}q, \quad q=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\xi_1(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\times$$
$$\times\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t, \tau)[\dot{\xi}_2(\tau)-A(\tau)\xi_2(\tau)-B(\tau)\xi_1(\tau)]d\tau dt, \tag{25}$$

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\bar\Phi(t,\tau)\bar B(\tau)\bar C(\tau)\,d\tau D^{-1}q+\int_{t_0}^{t}\bar\Phi(t,\tau)\,[\dot\xi_2(\tau)-$$

$$-A(\tau)\xi_2(\tau)-B(\tau)\xi_1(\tau)]\,d\tau,\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{26}$$

Кроме того, существует постоянная $m>0$ *такая, что*

$$\|[\Phi'(u,x)]^{-1}\|\leqslant m\quad \forall (x,u)\in X.$$

Доказательство. Поскольку функция $\xi_1(t)=-C(t)d(t_1)$, то, как следует из выражения (20), справедливо равенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\bar B(t)h(t)\,dt=\beta=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)\xi_1(t)\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\,\frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial x}\,\Delta x(t)\,dt,\quad \beta\in E^n. \tag{27}$$

Общее решение интегрального уравнения (27) (см. (4)) запишется так:

$$h(t)=w_1(t)+\bar C(t)\beta-\bar C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\bar B(t)w_1(t)\,dt\quad \forall w_1(t)\in L_2[t_0,t_1],$$

где матрица $\bar C(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, определяется по формуле (23). Отсюда, в частности, при $w_1(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$, имеем

$$h(t)=\bar C(t)\beta,\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{28}$$

Умножим слева соотношение (20) на $\Phi(t,\tau)B(\tau)$, $t,\tau\in[t_0,t_1]$, и проинтегрируем по τ в пределах от t_0 до t. В результате получим

$$S(t)\left[\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\bar B(t)h(t)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\,\frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial x}\,\Delta x(t)\times\right.$$

$$\left.\times dt\right]=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)\xi_1(\tau)\,d\tau,\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{29}$$

Тогда выражение (21) с учетом соотношения (29) запишется так:

$$\Delta x(t)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)\xi_1(\tau)\,d\tau-\Phi(t,t_0)\left[\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\bar B(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times h(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\,\frac{\partial f(x(\tau),u(\tau),\tau)}{\partial x}\,\Delta x(\tau)\,d\tau\right]=\xi_2(t), \tag{30}$$

$$t\in[t_0,t_1].$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(t,t_0)\left\{\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\xi_1(\tau)\,d\tau-\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\bar B(\tau)h(\tau)\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\,\frac{\partial f(x(\tau),u(\tau),\tau)}{\partial x}\,\Delta x(\tau)\,d\tau\right\}=\xi_2(t)-\Delta x(t), \tag{31}$$

$$t\in[t_0,t_1].$$

Так как функции $\Delta x(t)$, $\xi_2(t)$, $t\in[t_0,t_1]$,— абсолютно непрерывные и $\Delta x(t_0)=0$, ибо проварьированная траектория исходит также из точки

$x(t_0)=x_0$, то после дифференцирования по t тождества (30) с учетом равенства (31) и $\dot{\Phi}(t, t_0)=A(t)\Phi(t, t_0)$ получим

$$\Delta\dot{x}(t)+A(t)[\xi_2(t)-\Delta x(t)]+B(t)\xi_1(t)-\bar{B}(t)h(t)-\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}\times$$
$$\times\Delta x(t)=\dot{\xi}_2(t),\ t\in[t_0, t_1].$$

Отсюда, используя обозначения (22), имеем

$$\Delta\dot{x}(t)=\bar{A}(t)\Delta x(t)+\bar{B}(t)h(t)+[\dot{\xi}_2(t)-A(t)\xi_2(t)-$$
$$-B(t)\xi_1(t)],\ \Delta x(t_0)=0,\ t\in[t_0, t_1]. \tag{32}$$

Решение дифференциального уравнения (32) имеет вид

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t,\tau)\bar{B}(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t,\tau)[\dot{\xi}_2(\tau)-A(\tau)\xi_2(\tau)-$$
$$-B(\tau)\xi_1(\tau)]d\tau,\quad t\in[t_0, t_1]. \tag{33}$$

Теперь рассмотрим соотношение (27). Подставляя значение $\Delta x(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, из выражения (33), с учетом равенства (28) имеем

$$\beta=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\xi_1(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t,\tau)\bar{B}(\tau)\bar{C}(\tau)d\tau dt\beta-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t,\tau)[\dot{\xi}_2(\tau)-A(\tau)\xi_2(\tau)-B(\tau)\xi_1(\tau)]d\tau dt.$$

Отсюда, используя обозначение (24), получим

$$[I_n+M(t_0, t_1)]\beta=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\xi_1(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t,\tau)[\dot{\xi}_2(\tau)-A(\tau)\xi_2(\tau)-B(\tau)\xi_1(\tau)]d\tau dt=q.$$

По условию теоремы матрица $D=I_n+M(t_0, t_1)$ неособая. Следовательно, вектор $\beta=D^{-1}q$. Подставляя значение вектора $\beta=D^{-1}q$ в правую часть выражения (28), получим соотношение (25). Справедливость формулы (25) доказана.

Рассмотрим равенство (33). Подставляя значение $h(t)=\bar{C}(t)D^{-1}q$, $t\in[t_0, t_1]$, из (33), получим соотношение (26). Справедливость формулы (26) доказана.

Справедливость второго утверждения теоремы непосредственно следует из формул (25), (26). Однако из-за громоздкости выкладок его доказательство опускается (см. [6]). Теорема доказана.

Заметим, что поскольку $\xi_1(t)=-C(t)d(t_1)$, $t\in[t_0, t_1]$, поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\xi_1(t)dt=-d(t_1).$$

Производная $\dot{\xi}_2(t)=-[A(t)\Phi(t, t_0)W(t_0, t)+B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)]\times\times W^-(t_0, t_1)d(t_1)-\dot{x}(t)+A(t)\Phi(t, t_0)[d(t)+x_0+a]+B(t)u(t)+f(x(t), u(t), t)$, $t\in[t_0, t_1]$, где $(x(t), u(t))\in C[t_0, t_1]\dot{+}L_2[t_0, t_1]$ — заданная пара.

Наконец, следует отметить, что функция $h(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, определяемая по формуле (28), является частным решением интегрального уравнения (27), поэтому возможно ослабление условия теоремы надлежащим выбором произвольной функции $w_1(t)\in L_2[t_0, t_1]$.

На основе полученных выше результатов может быть предложен следующий метод решения интегральных уравнений (5), (6).

4. Конструктивный метод. Кратко изложим алгоритм решения интегральных уравнений (5), (6), основанный на итерационном процессе Ньютона [7].

1°. Выбирается произвольная начальная пара $(x^0(t),\ u^0(t))\in C[t_0, t_1]\dotplus L_2[t_0, t_1]$, в частности, $u^0(t)\in L_2[t_0, t_1]$ — произвольно выбранное управление, а функция $x^0(t)=x^0(t;\, x_0, t_0, u^0)$, $t\in[t_0, t_1]$,— решение дифференциального уравнения (1).

2°. Определяются функции $\Phi_1(u^0(t),\ v(t),\ x^0(t), t)$, $\Phi_2(u^0(t),\ v(t),\ x^0(t), t)$, $t\in[t_0, t_1]$, согласно формулам (8), (9). Находим функцию $v(t)=\mu^0(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, из решения оптимизационной задачи $\|\Phi_1(u^0,\ v,\ x^0,\ t)\|\to\inf$, $v(t)\in V$. Как следует из леммы 1, функция

$$\mu^0(t)=u^0(t)+C(t)a-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)u^0(t)dt,\ t\in[t_0, t_1].$$

Вычислим величины

$$\eta_1^0=\|\Phi_1(u^0, \mu^0, x^0, t)\|_{L_2},\ \eta_2^0=\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|\Phi_2(u^0, \mu^0, x^0, t)|. \tag{34}$$

3°. Рассмотрим операторные уравнения $y=(y_1, y_2)=\Phi(u, x)=(\Phi_1(u, x), \Phi_2(u, x))$, где $y_1=\Phi_1(u, x)=C(t)d(t_1)$, $y_2=\Phi_2(u, x)=S(t)d(t_1)+\xi(t)-\Phi(t, t_0)d(t)$. Операторы $d(t)$, $\xi(t)$ определяются формулами (14), (15). Вычислим производную Фреше оператора $\Phi(u, x)$ в точке $(x^0(t), u^0(t))\in C[t_0, t_1]\dotplus L_2[t_0, t_1]$. Согласно теореме 2, верны соотношения

$$\Phi_1'(u^0, x^0)\begin{pmatrix}\Delta x^{(0)}\\ h^{(0)}\end{pmatrix}=C(t)\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B^{(0)}(t)h^{(0)}(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\,\frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}\,\Delta x^0(t)dt\right\},$$

$$\Phi_2'(u^0, x^0)\begin{pmatrix}\Delta x^{(0)}\\ h^{(0)}\end{pmatrix}=\Delta x^{(0)}(t)+S(t)\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B^{(0)}(t)h^{(0)}(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\,\frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}\,\Delta x^{(0)}(t)dt\right\}-\Phi(t, t_0)\left\{\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0, \tau)\times\right.$$

$$\left.\times B^{(0)}(\tau)h^{(0)}(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0, \tau)\,\frac{\partial f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial x}\,\Delta x^{(0)}(\tau)d\tau\right\},$$

где $B^{(0)}(\tau)=B(t)+\partial f(x^0(t), u^0(t), t)/\partial u$.

4°. Определим обратный оператор $[\Phi'(u^0, x^0)]^{-1}$. Для этого необходимо вычислить следующие матрицы (см. (22)—(24)):

$$A^{(0)}(t)=A(t)+\partial f(x^0(t), u^0(t), t)/\partial x,\ \Phi^{(0)}(t, \tau)=\Theta^{(0)}(t)\,[\Theta^{(0)}(\tau)]^{-1},$$

$$C^{(0)}(t) = [B^{(0)}(t)]^* \Phi^*(t_0, t)\,[W^{(0)}(t_0, t_1)]^{-1},\ W^{(0)}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\times$$

$$\times B^{(0)}(t)\,[B^{(0)}(t)]^* \Phi^*(t_0, t)\,dt,\ M^{(0)}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\times$$

$$\times \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \int_{t_0}^{t} \Phi^{(0)}(t, \tau) B^{(0)}(\tau) C^{(0)}(\tau)\,d\tau dt,\ D^{(0)} = I_n + M^{(0)}(t_0, t_1).$$

Согласно теореме 3, вычислим следующие функции:

$$h^{(0)}(t) = C^{(0)}(t)\,[D^{(0)}]^{-1} q^{(0)},\ q^{(0)} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) \xi_1^{(0)}(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\times$$

$$\times \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \int_{t_0}^{t} \Phi^{(0)}(t, \tau)\,[\dot\xi_2^{(0)}(\tau) - A(\tau)\xi_2^{(0)}(\tau) - B(\tau)\xi_1^{(0)}(\tau)]\,d\tau dt, \tag{35}$$

$$\Delta x^{(0)}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{(0)}(t, \tau) B^{(0)}(\tau) C^{(0)}(\tau)\,d\tau\,[D^{(0)}]^{-1} q^{(0)} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi^{(0)}(t, \tau)\,[\dot\xi_2^{(0)}(\tau) - A(\tau)\xi_2^{(0)}(\tau) - B(\tau)\xi_1^{(0)}(\tau)]\,d\tau, \tag{36}$$

$$t \in [t_0, t_1],$$

$$\begin{aligned} \xi_1^{(0)}(t) &= -\Phi_1(u^0, \mu^0, x^0, t) = -\Phi_1(u^0, x^0),\\ \xi_2^{(0)}(t) &= -\Phi_2(u^0, \mu^0, x^0, t) = -\Phi_2(u^0, x^0). \end{aligned} \tag{37}$$

5°. Определим следующие приближения по формулам:

$$x^{(1)}(t) = x^0(t) + \Delta x^{(0)}(t),\ t \in [t_0, t_1],$$
$$u^{(1)}(t) = u^0(t) + h^{(0)}(t),\ t \in [t_0, t_1].$$

В общем случае

$$x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) + \Delta x^{(n)}(t),\ n = 0, 1, 2, \dots,\ t \in [t_0, t_1], \tag{38}$$

$$u^{(n+1)}(t) = u^{(n)}(t) + h^{(n)}(t),\ n = 0, 1, 2, \dots,\ t \in [t_0, t_1]. \tag{39}$$

Как следует из формул (35)—(37), функции

$$h^{(n)}(t) = C^{(n)}(t)\,[D^{(n)}]^{-1} q^{(n)},\ t \in [t_0, t_1], \tag{40}$$

$$\Delta x^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{(n)}(t, \tau) B^{(n)}(\tau) C^{(n)}(\tau)\,d\tau\,[D^{(n)}]^{-1} q^{(n)} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi^{(n)}(t, \tau)\,[\xi_2^{(n)}(\tau) - A(\tau)\xi_2^{(n)}(\tau) - B(\tau)\xi_1^{(n)}(\tau)]\,d\tau,\ t \in [t_0, t_1], \tag{41}$$

где

$$B^{(n)}(t) = B(t) + \partial f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)/\partial u,\ A^{(n)}(t) = A(t) +$$
$$+ \partial f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)/\partial x,\ \Phi^{(n)}(t, \tau) = \Theta^{(n)}(t)\,[\Theta^{(n)}(\tau)]^{-1},\ C^{(n)}(t) =$$
$$= [B^{(n)}(\tau)]^* \Phi^*(t_0, t)\,[W^{(n)}(t_0, t_1)]^{-1},$$

$$W^{(n)}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B^{(n)}(t)\,[B^{(n)}(t)]^* \Phi^*(t_0, t)\,dt,$$

$$M^{(n)}(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \frac{\partial f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)}{\partial x} \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{(n)}(t, \tau) B^{(n)}(\tau) C^{(n)}(\tau) d\tau dt,$$

$$q^{(n)} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) \xi_1^{(n)}(t) dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \frac{\partial f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)}{\partial x} \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{(n)}(t, \tau) [\dot{\xi}_2^{(n)}(\tau) - A(\tau) \xi_2^{(n)}(\tau) - B(\tau) \xi_1^{(n)}(\tau)] d\tau dt,$$

$\xi_1^{(n)}(t) = -\Phi_1(u^{(n)}, x^{(n)})$, $\xi_2^{(n)}(t) = -\Phi_2(u^{(n)}, x^{(n)})$, $D^{(n)} = I_n + M^{(n)}(t_0, t_1)$, $\Theta^{(n)}(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi} = A^{(n)}(t)\xi$. Заметим, что

$$\Phi_1(u^{(n)}, x^{(n)}) = C(t)[-a + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) u^{(n)}(t) dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \times$$

$$\times f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t) dt], \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\Phi_2(u^{(n)}, x^{(n)}) = S(t)[-a + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) u^{(n)}(t) dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \times$$

$$\times f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t) dt] + x^{(n)}(t) - \Phi(t, t_0)(x_0 + a) - \Phi(t, t_0)[-a +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u^{(n)}(\tau) d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau) f(x^{(n)}(\tau), u^{(n)}(\tau), \tau) d\tau], \quad t \in [t_0, t_1].$$

5. Сходимость метода. Пусть последовательности $\{x^{(n)}(t)\}$, $\{u^{(n)}(t)\}$ построены по алгоритму, приведенному выше (см. (39)—(41)). Естественно возникают вопросы: будут ли $x^{(n)}(t) \to x_*(t)$ при $n \to \infty$ в норме пространства $C[t_0, t_1]$ и $u^{(n)}(t) \to u_*(t)$ при $n \to \infty$ в норме пространства $L_2[t_0, t_1]$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)}(t) - x_*(t)\|_C = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u^{(n)}(t) - u_*(t)\|_{L_2} = 0$? Будет ли предельный элемент $(x_*(t), u_*(t)) \in C[t_0, t_1] \dotplus L_2[t_0, t_1]$ решением интегральных уравнений (5), (6)? Положительные ответы на данные вопросы могут быть получены из метода Ньютона [7].

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия леммы 1 и теоремы 2 и пусть, кроме того, матрицы $W^{(n)}(t_0, t_1)$, $D^{(n)}$ неособые при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть последовательности $\{x^{(n)}(t)\}$, $\{u^{(n)}(t)\}$ определяются формулами (38)—(41), числа $\eta = \eta_1^0 + \eta_2^0$ (см. (34)) и $m > 0$, $l > 0$ такие, что $q = \frac{1}{2} m^2 l \eta < 1$. Тогда интегральные уравнения (5), (6) имеют решения $(x_*(t), u_*(t)) \in \bar{S}_r(x^0, u^0) \subset X$, где $r = m\eta \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1}$, к которым сходятся итерационные процессы (38)—(41) при $n \to \infty$. Скорость сходимости $\{x^{(n)}(t), u^{(n)}(t)\} \in X$ к $(x_*(t), u_*(t)) \in X$ определяется неравенством*

$$\|x^{(n)}(t) - x_*(t)\|_C + \|u^{(n)}(t) - u_*(t)\|_{L_2} \leqslant m\eta \frac{q^{2^n - 1}}{1 - q^{2^n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Как следует из леммы 1, интегральные уравнения (5), (6) при выборе $v(t) = \mu(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ (см. (10)), запишутся в виде $\Phi_1(u, x) = 0$, $\Phi_2(u, x) = 0$, где $\Phi_1(u, x) = C(t) d(t_1)$, $\Phi_2(u, x) = S(t) d(t_1) + \xi(t) - \Phi(t, t_0) d(t)$. Из теоремы 2 следует, что существует число $l > 0$ такое, что $\|\Phi'(u, x) - \Phi'(v, y)\| \leqslant l(\|u - v\|_{L_2} + \|x - y\|_C)$, где $\Phi(u, x) = (\Phi_1(u, x), \Phi_2(u, x))$ $\forall (u, x), (v, y) \in X$. Далее если матрицы $W^{(n)}(t_0, t_1)$, $D^{(n)}$ неособые, то выполнены условия теоремы 3, следовательно, существует обратный оператор $[\Phi'(u^{(n)}, x^{(n)})]^{-1}$, причем $\| [\Phi'(u^{(n)}, x^{(n)})]^{-1} \| \leqslant m$. Поскольку

$$\begin{pmatrix} h^{(n)}(t) \\ \Delta x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = [\Phi'(u^{(n)}, x^{(n)})]^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1^{(n)}(t) \\ \xi_2^{(n)}(t) \end{pmatrix} = [\Phi'(u^{(n)}, x^{(n)})]^{-1} \times$$
$$\times (-\Phi(u^{(n)}, x^{(n)})),$$

то последовательности (38), (39) запишутся так:

$$\begin{pmatrix} u^{(n+1)}(t) \\ x^{(n+1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(n)}(t) \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} - [\Phi'(u^{(n)}, x^{(n)})]^{-1} \Phi(u^{(n)}, x^{(n)}),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, последовательности (38), (39) являются итерационным процессом Ньютона. Так как выполнены все предпосылки, необходимые для сходимости итерационного процесса Ньютона, то утверждение теоремы следует из результатов [7]. Условие ограниченности второй производной оператора $\Phi(u, x)$, которое используется в [7] для доказательства того, что $\{x^{(n)}(t),\ u^{(n)}(t)\} \in \bar{S}_r(x^0, u^0) \subset X$, можно ослабить, потребовав выполнения условия Липшица для первой производной оператора $\Phi(u, x)$. Такая теорема доказана в [8]. Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы 4 следует как существование решения интегральных уравнений (5), (6), так и метод определения управления, которое переводит траекторию системы (1) из начального состояния $x_0 \in E^n$ в состояние $x_1 \in E^n$.

Литература

1. Айсагалиев С. А., Джолдасбеков У. А. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1985. № 5. С. 7—11; 1986. № 3. С. 9—14; 1986. № 6. С. 13—18.
2. Айсагалиев С. А., Бияров Т. Н., Калимолдаев М. Н. // Управление динамическими системами. Алма-Ата, 1987. С. 24—31.
3. Айсагалиев С. А., Изтелеуов Б. И., Курбанова Г. В. // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1982. № 6. С. 72—78.
4. Айсагалиев С. А. // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 35—44.
5. Айсагалиев С. А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1435—1451.
6. Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С. К теории оптимального управления нелинейных систем с закрепленными концами траекторий. Алма-Ата, 1990. Деп. в КазНИИНТИ 05.12.90, № 3226-Ка 90.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.

Казахский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 8 октября 1991 г.