



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Markoff, Sur la probabilité a posteriori,
*Communications de la Société mathématique
de Kharkow. 2-ée série*, 1914, Volume 14,
Issue 3, 105–112

<https://www.mathnet.ru/eng/khmo83>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies
that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

April 18, 2025, 06:14:59



0 вѣроятности a posteriori.

(Вторая замѣтка).

А. Маркова.

Въ первой замѣткѣ съ тѣмъ же заглавіемъ, помѣщенной въ Сообщ. Харьк. Мат. Общ. за 1900 г. (2 сер. т. VII н^о 1, с. 23), изъ общепринятаго выраженія вѣроятности, что въ n испытаній событіе появится k разъ, если въ n_0 испытаній оно появилось k_0 разъ,

$$P_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} \frac{\int_0^1 x^{k_0+k} (1-x)^{n_0+n-k_0-k} dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx}$$

я вывелъ очень простое неравенство

$$\sum P_k \left(\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} \right)^2 < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0} \right);$$

откуда тотчасъ слѣдуетъ, что вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}} < \frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} < \frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}},$$

при любомъ положительномъ t , больше $1 - \frac{1}{t^2}$. Интересно отмѣтить, что подобный же выводъ можно сдѣлать относительно разности

$$\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0},$$

когда обѣ дроби $\frac{k}{n}$ и $\frac{k_0}{n_0}$ остаются неопредѣленными, и разсматривается

вѣроятность а priori при любой постоянной вѣроятности событія; ибо въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\begin{aligned} \text{м. о. } \left(\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0}\right)^2 &= \text{м. о. } \left(\frac{k}{n} - p - \frac{k_0}{n_0} + p\right)^2 = \text{м. о. } \left(\frac{k}{n} - p\right)^2 + \text{м. о. } \left(\frac{k_0}{n_0} - p\right)^2 \\ &= p(1-p) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}\right), \end{aligned}$$

гдѣ p означаетъ вѣроятность событія при всѣхъ испытаніяхъ.

Между нашими выводами существуетъ, конечно, нѣкоторая связь; но необходимо отличать ихъ другъ отъ друга и помнить, что первый изъ нихъ, относящійся къ вѣроятности а posteriori, установленъ только при общепринятомъ предположеніи, что до наблюденія всѣ значенія вѣроятности событія равновозможны.

Впрочемъ, если въ общей формулѣ

$$P_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} \frac{\int_0^1 x^{k_0+k} (1-x)^{n_0+n-k_0-k} f(x) dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} f(x) dx}$$

предположить ¹⁾, что $f(x)$ заключается между двумя постоянными положительными числами

$$0 < D \leq f(x) \leq C,$$

то на основаніи уже доказаннаго нами не трудно установить неравенство

$$\sum P_k \left(\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0}\right)^2 < \frac{C}{4D} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}\right);$$

откуда также слѣдуетъ, что при достаточно большихъ n и n_0 вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} < \varepsilon$$

сколь угодно близка къ единицѣ, какъ бы ни было мало неизмѣнное положительное число ε .

Остановимся теперь на вопросѣ о замѣнѣ вышеприведеннаго выраженія P_k , при $f(x) = 1$ ²⁾, извѣстнымъ другимъ выраженіемъ, при

¹⁾ Подобное же предположеніе принялъ П. А. Некрасовъ въ своихъ лекціяхъ по „Теоріи вѣроятностей“ (1896 года) при доказательствѣ теоремы обратной теоремѣ Я. Вернулли.

²⁾ Возможность распространенія тѣхъ же заключеній на случай, когда $f(x)$ не сохраняетъ постоянной величины, остается подъ вопросомъ.

большихъ величинахъ, k_0 , $n_0 - k_0$, k , $n - k$. Я имѣю въ виду дополнить обычный выводъ этого приближеннаго выраженія, который можно найти, напримѣръ, въ «Теоріи вѣроятностей» (1898 г.) М. А. Тихомандрицаго и въ «Ученіи о вѣроятностяхъ» (1912 г.) М. Волкова (у послѣдняго, впрочемъ, допущена крупная обмолвка), чтобы получилась предѣльная теорема при разнообразныхъ предположеніяхъ о порядкѣ возрастанія

$$k_0, n_0 - k_0, \frac{nk_0}{n_0}, \frac{n(n_0 - k_0)}{n_0}.$$

Напомню вкратцѣ этотъ выводъ, принаровленный къ случаю, когда n , n_0 , k_0 , $n_0 - k_0$ безконечно большія числа одного порядка. Во-первыхъ, оба интеграла

$$\int_0^1 x^{k_0+k} (1-x)^{n_0+n-k_0-k} dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx$$

и множитель $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}$, передъ ихъ отношеніемъ выражаемъ черезъ произведенія вида $1.2.3\dots N$, гдѣ N получаетъ значенія

$$k, n - k = l, n, k_0, n_0 - k_0 = l_0, n_0 + 1, k_0 + k, l_0 + l, n + n_0 + 1.$$

Примѣняя къ полученнымъ произведеніямъ формулу Стирлинга и отбрасывая единицу въ множителяхъ $n_0 + 1$ и $n + n_0 + 1$, получаемъ вмѣсто P_k выраженіе

$$P'_k = \sqrt{\frac{nn_0^3(k+k_0)(l+l_0)}{2\pi k l k_0 l_0 (n+n_0)^3}} \text{ и т. д.}$$

при

$$W_k = \left(\frac{n_0 k}{n k_0}\right)^{-k} \left(\frac{n_0 l}{n l_0}\right)^{-l} \left(\frac{n_0(k+k_0)}{(n_0+n)k_0}\right)^{k+k_0} \left(\frac{n_0(l+l_0)}{(n_0+n)l_0}\right)^{l+l_0}$$

Затѣмъ полагаемъ

$$k = n \frac{k_0}{n_0} + z = n \frac{k_0}{n_0} + t \sqrt{\frac{2k_0 l_0 n (n+n_0)}{n_0^3}}$$

и ограничиваемъ t неравенствами

$$t_1 < t < t_2,$$

гдѣ t_1 и t_2 какія-нибудь опредѣленные числа и $t_2 > t_1$.

Если теперь числа

$$k_0, l_0, \frac{nk_0}{n_0} \quad \text{и} \quad \frac{nl_0}{n_0}$$

возрастаютъ безпредѣльно, то отношенія

$$\frac{n_0 k}{n k_0}, \frac{n_0 l}{n l_0}, \frac{n_0 (k_0 + k)}{(n_0 + n) k_0}, \frac{n_0 (l_0 + l)}{(n_0 + n) l_0},$$

равныя

$$1 + \frac{n_0 z}{n k_0}, 1 - \frac{n_0 z}{n l_0}, 1 + \frac{n_0 z}{(n_0 + n) k_0}, 1 - \frac{n_0 z}{(n_0 + n) l_0},$$

стремятся къ единицѣ; ибо

$$\begin{aligned} \left(\frac{n_0 z}{n k_0}\right)^2 &= \frac{2l_0(n+n_0)l^2}{n n_0 k_0}, & \left(\frac{n_0 z}{n l_0}\right)^2 &= \frac{2k_0(n+n_0)l^2}{n n_0 l_0}, \\ \left(\frac{n_0 z}{(n+n_0)k_0}\right)^2 &= \frac{2l_0 n l^2}{(n+n_0) n_0 k_0}, & \left(\frac{n_0 z}{(n+n_0)l_0}\right)^2 &= \frac{2k_0 n l^2}{(n+n_0) n_0 l_0}, \\ \frac{l_0 n}{(n+n_0) n_0 k_0} &< \frac{l_0 (n+n_0)}{n n_0 k_0} < \frac{n+n_0}{n k_0} = \frac{1}{k_0} + \frac{n_0}{n k_0}, \\ \frac{k_0 n}{(n+n_0) n_0 l_0} &< \frac{k_0 (n+n_0)}{n n_0 l_0} < \frac{n+n_0}{n l_0} = \frac{1}{l_0} + \frac{n_0}{n l_0}. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно заключить, что вмѣсто P_k' можно взять выраженіе

$$P_k'' = \sqrt{\frac{n_0^3}{2\pi k_0 l_0 n (n+n_0)}} W_k$$

и отношеніе

$$P_k'' : P_k,$$

при сдѣланномъ нами предположеніи о безпредѣльномъ возрастаніи чиселъ k_0 , l_0 , $\frac{n k_0}{n_0}$ и $\frac{n l_0}{n_0}$, должно стремиться къ единицѣ.

Установивъ это, переходимъ къ разсмотрѣнію $\log W_k$, для чего разлагаемъ логарифмы вышеприведенныхъ выраженій

$$1 + \frac{n_0 z}{n k_0}, 1 - \frac{n_0 z}{n l_0}, 1 + \frac{n_0 z}{(n+n_0) k_0}, 1 - \frac{n_0 z}{(n+n_0) l_0}$$

въ ряды по возрастающимъ степенямъ дробей

$$\frac{n_0 z}{n k_0}, \frac{n_0 z}{n l_0}, \frac{n_0 z}{(n+n_0) k_0}, \frac{n_0 z}{(n+n_0) l_0},$$

которыя, какъ только-что было выяснено, становятся у насъ безконечно малыми.

Въ основномъ случаѣ, когда всѣ числа

$$n_0, k_0, l_0, n$$

безконечно большія одного и того же порядка, можно признать достаточнымъ тѣхъ разсужденій, которыя приведены въ книгѣ М. А. Тихомандрицкаго и согласуются съ лекціями П. Л. Чебышева; такъ какъ въ разложеніяхъ всѣхъ четырехъ логарифмовъ

$$-k \log \frac{n_0 k}{n k_0}, \quad -l \log \frac{n_0 l}{n l_0}, \quad (k_0 + k) \log \frac{n_0 (k_0 + k)}{(n_0 + n) k_0}, \quad (l_0 + l) \log \frac{n_0 (l_0 + l)}{(n_0 + n) l_0},$$

члены съ третьими и высшими степенями z будутъ тогда безконечно малыми величинами. Въ другихъ же случаяхъ, которые мы имѣемъ въ виду, члены со степенями z выше второй въ отдѣльныхъ рядахъ могутъ не быть безконечно малыми и становятся таковыми только въ общей суммѣ четырехъ рядовъ, равной логарифму W_k .

Первая степень z въ логарифмѣ W_k исчезаетъ совершенно; вторая даетъ $-l^2$. Общій же членъ, гдѣ z входитъ въ степени выше второй, разбивается на такія двѣ части:

$$\frac{(-1)^{i-1} z^i n_0^{i-1}}{k_0^{i-1}} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) \left(\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{(n+n_0)^{i-1}} \right) - \frac{z^i n_0^{i-1}}{l_0^{i-1}} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) \left(\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{(n+n_0)^{i-1}} \right).$$

Здѣсь разность

$$\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}$$

число положительное и меньше обѣихъ дробей

$$\frac{1}{n^{i-1}} \quad \text{и} \quad \frac{(i-1)n_0}{n^i},$$

а разность $\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$ равна $\frac{1}{i(i-1)}$; наконецъ, что касается z , то его числовая величина меньше числа

$$a = \tau \sqrt{\frac{2k_0 l_0 n (n+n_0)}{n_0^3}},$$

гдѣ τ означаетъ наибольшее изъ чиселъ $-t_1, t_2$.

На этомъ основаніи мы можемъ утверждать, что числовая величина разности

$$\log W_k - t^2$$

меньше обѣихъ суммъ

$$\sum \frac{a^i}{i(i-1)n^{i-1}} \left\{ \frac{n_0^{i-1}}{k_0^{i-1}} + \frac{n_0^{i-1}}{l_0^{i-1}} \right\} \quad \text{и} \quad \sum \frac{a^i}{in^i} \left\{ \frac{n_0^i}{k_0^{i-1}} + \frac{n_0^i}{l_0^{i-1}} \right\},$$

гдѣ $i = 3, 4, 5, \dots$. Суммы же эти соотвѣтственно меньше

$$\frac{\frac{a^3 n_0^2}{6n^2 k_0^2}}{1 - \frac{an_0}{nk_0}} + \frac{\frac{a^3 n_0^2}{6n^2 l_0^2}}{1 - \frac{an_0}{nl_0}} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{a^3 n_0^3}{3n^3 k_0^2}}{1 - \frac{an_0}{nk_0}} + \frac{\frac{a^3 n_0^3}{3n^3 l_0^2}}{1 - \frac{an_0}{nl_0}}.$$

Наконецъ надо вспомнить, что дроби $\frac{an_0}{nk_0}$ и $\frac{an_0}{nl_0}$ стремятся къ нулю, когда $k_0, l_0, \frac{nk_0}{n_0}$ и $\frac{nl_0}{n_0}$ возрастаютъ безпредѣльно, и убѣдиться въ томъ же относительно дробей

$$\frac{a^3 n_0^2}{n^2 k_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0^2}{n^2 l_0^2}$$

или относительно дробей

$$\frac{a^3 n_0^3}{n^3 k_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0^3}{n^3 l_0^2}.$$

Для указанной цѣли различаемъ два случая

$$n \leq n_0 \quad \text{и} \quad n > n_0$$

При $n \leq n_0$ разсматриваемъ дроби

$$\frac{a^3 n_0^2}{n^2 k_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0^2}{n^2 l_0^2}$$

и для ихъ квадратовъ легко получаемъ слѣдующія неравенства

$$\left(\frac{a^3 n_0^2}{n^2 k_0^2} \right)^2 \leq \frac{8\tau^6 k_0^3 l_0^3 n^3 8n_0^3 n_0^4}{n_0^9 n^4 k_0^4} < \frac{64\tau^6 n_0}{nk_0}, \quad \left(\frac{a^3 n_0^2}{n^2 l_0^2} \right)^2 < \frac{64\tau^6 n_0}{nl_0}.$$

А при $n > n_0$ разсматриваемъ дроби

$$\frac{a^3 n_0^3}{n^3 k_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3 n_0^3}{n^3 l_0^2}$$

и устанавливаемъ неравенства

$$\left(\frac{a^3 n_0^3}{n^3 k_0^2} \right)^2 < \frac{8\tau^6 k_0^3 l_0^3 n^3 8n^3 n_0^6}{n_0^9 n^6 k_0^4} < \frac{64\tau^6}{k_0}, \quad \left(\frac{a^3 n_0^3}{n^3 l_0^2} \right)^2 < \frac{64\tau^6}{l_0}.$$

Можно и сразу разсматривать оба случая $n \leq n_0$ и $n > n_0$.
Для этого нужно только принять во вниманіе неравенство

$$\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{(n+n_0)^{i-1}} < \frac{(i-1)n_0}{(n+n_0)n^{i-1}},$$

на основаніи котораго находимъ, что числовая величина разности

$$\log W_k - t^2$$

меньше суммы

$$\sum \frac{a^i}{i(n+n_0)n^{i-1}} \left\{ \frac{n_0^i}{k_0^{i-1}} + \frac{n_0^i}{l_0^{i-1}} \right\},$$

гдѣ i по прежнему получаетъ значенія 3, 4, 5, ...

Послѣдняя же сумма, очевидно, меньше

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\frac{a^3 n_0^3}{(n+n_0)n^2 k_0^2}}{1 - \frac{an_0}{nk_0}} + \frac{\frac{a^3 n_0^3}{(n+n_0)n^2 l_0^2}}{1 - \frac{an_0}{nl_0}} \right\}.$$

Съ другой стороны находимъ

$$\left\{ \frac{a^3 n_0^3}{(n+n_0)n^2 k_0^2} \right\}^2 < \frac{8\tau^6 (n+n_0)}{nk_0} = \frac{8\tau^6}{k_0} + \frac{8\tau^6 n_0}{nk_0},$$

$$\left\{ \frac{a^3 n_0^3}{(n+n_0)n^2 l_0^2} \right\}^2 < \frac{8\tau^6 (n+n_0)}{nl_0} = \frac{8\tau^6}{l_0} + \frac{8\tau^6 n_0}{nl_0}.$$

Такимъ образомъ мы доказываемъ, что отношеніе

$$P_k : \sqrt{\frac{n_0^3}{2\pi k_0 l_0 n (n+n_0)}} e^{-t^2},$$

при всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеніяхъ

$$k = n \frac{k_0}{n_0} + t \sqrt{\frac{2k_0 l_0 n (n+n_0)}{n_0^3}},$$

будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, когда всѣ числа

$$k_0, l_0, n \frac{k_0}{n_0} \text{ и } n \frac{l_0}{n_0}$$

будутъ достаточно велики. А отсюда уже непосредственно вытекаетъ для вѣроятности неравенствъ

$$t_1 \sqrt{\frac{2k_0 l_0 n (n+n_0)}{n_0^3}} < k - n \frac{k_0}{n_0} < t_2 \sqrt{\frac{2k_0 l_0 n (n+n_0)}{n_0^3}}$$

известное предѣльное выраженіе

$$\frac{1}{V\pi} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

и вытекает оно, какъ видно, для всѣхъ возможныхъ случаевъ, когда числа

$$k_0, n_0, n \frac{k_0}{n_0}, n \frac{l_0}{n_0}$$

возрастаютъ безпредѣльно. Къ другимъ же случаямъ нашъ выводъ, конечно, не относится.

Подобное же вычисленіе можно провести и при рѣшеніи другой задачи Лапласа, въ которой число появленій событія дано, а неопредѣленнымъ остается число испытаній ¹⁾, при чемъ вѣроятность каждаго значенія n , при условіяхъ Лапласа, выражается такъ

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1) \int_0^1 x^{k_0+k} (1-x)^{n_0+n-k_0-k} dx}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \int_0^1 x^{k_0-1} (1-x)^{n_0-k_0} dx},$$

гдѣ k_0, k, n_0, n сохраняютъ вышеуказанный смыслъ, только k разсматривается какъ данное число, а n можетъ получать значенія $k, k+1, k+2, k+3, \dots$

Относительно послѣдней задачи слѣдуетъ замѣтить, что рѣшеніе ея по необходимости соединено съ невозможнымъ предположеніемъ равенства первоначальныхъ (до наблюденія) вѣроятностей для всѣхъ значеній n , число коихъ безконечно.

При большихъ значеніяхъ k_0, n_0, k эта невозможность затухаетъ, но она ясно проявляется при $k_0=0$, когда интегралъ

$$\int_0^1 x^{k_0-1} (1-x)^{n_0-k_0} dx,$$

входящій въ знаменатель выраженія вѣроятности, обращается въ ∞ и сама вѣроятность становится поэтому нулемъ.

4-го марта 1914 г.

¹⁾ Laplace. Théorie analytique des probabilités. Livre II. Chapitre VI, § 31. (1814 г.). Буляковский. Основанія математической теоріи вѣроятностей. Глава 8, § 69 (1846 г.).