В. Е. Корепин, С. Л. Шаташвили, Рациональная параметризация трехинстантонных решений уравнений Янга–Миллса, *Докл. АН СССР*, 1983, том 273, номер 6, 1342–1344

УДК 517.43+530.145 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.Е. КОРЕПИН, С.Л. ШАТАШВИЛИ

РАЦИОНАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ТРЕХИНСТАНТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 13 VI 1983)

1. Уравнение дуальности было введено в работах [1, 2], где был выяснен физический смысл его решений (инстантонов) и построено простейшее 1-инстантонное решение. В работах [3–7] было построено общее N-инстантонное решение, а в [8, 9] приведена его кватернионная формулировка. Напомним, что N-инстантонное решение для алгебры $SU(2)$ зависит от $8N–3$ независимых вещественных параметров [10, 11]. В работе [12] приведен явный вид 3-инстантонного решения, однако параметризация, приведенная в этой работе, не является рациональной. Построенное в настоящей статье общее 3-инстантонное решение является рациональной функцией свободных вещественных параметров, которые изменяются в $R^{18}+R^3_+$.

2. Рассмотрим уравнение дуальности

$$F_{\mu\nu}(x) = -{}^*F_{\mu\nu}(x) \tag{1}$$

для алгебры $SU(2)$. Благодаря конформной инвариантности мы можем считать, что поле Янга–Миллса $A_\mu(x)$ определено на сфере S^4. Алгебро-геометрическая конструкция Атьи, Дринфельда, Манина, Хитчина приводит к явному выражению для N-инстантонного решения $A_\mu(x)$, которое зависит от параметров, объединенных в прямоугольную матрицу B размерности $N\times(N+1)$. Ее матричные элементы $B_{\alpha i}$ являются кватернионами и удовлетворяют следующим уравнениям связи [8]:

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{\alpha i}B_{\beta i}^+ = \mu_{\alpha\beta}I, \tag{2}$$

$$B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Здесь μ – вещественная симметричная матрица $N\times N$ с числовыми матричными элементами $\mu_{\alpha\beta}$.

При преобразовании $B\to VBU$ решение уравнения (1) не меняется; V – матрица $N\times N$ с числовыми матричными элементами из группы $O(N)$, а U – блочно-диагональная матрица $(N+1)\times(N+1)$ вида

$$U = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь m – кватернион, по модулю равный 1; $mm^+ = I$.

Это произвол можно использовать для приведения системы (2), (3) к более простому виду:

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{\alpha i}B_{\beta i}^+ = 0, \quad \alpha<\beta; \tag{5}$$

$$B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha};$$

$$B_{1,N+1} = B_{1,N+1}I \geqslant 0;$$

$B_{1,N+1}$ – вещественное число. Тем самым уравнение на параметры B приведено к окончательному виду, в котором группа симметрии $O(N)$ свелась к подгруппе отражений. Осталось решить уравнение (5), т.е. выразить зависимые параметры в B через свободные, что и решит проблему параметризации N-инстантонного решения.

3. Рассмотрим 3-инстантонное решение, $N = 3$. В качестве свободных параметров выберем кватернионы B_{12}, B_{13}, B_{22}, B_{23}, B_{24} и число b_{14}. Группу отражений можно использовать для того, чтобы добиться выполнения условий $\operatorname{Re} B_{24} \geqslant 0$, $\operatorname{Re} B_{13} \geqslant 0$. Остальные элементы матрицы B выражаются из системы (5) следующим образом:

$$B_{11} = -(B_{12}B_{22}^{+} + B_{13}B_{23}^{+} + b_{14}B_{24}^{+})(B_{12}^{+})^{-1},$$

$$B_{33} = \left[(B_{23}B_{12}^{+} + B_{13}B_{11}^{+})\frac{B_{24}^{+}}{b_{14}} - B_{23}B_{22}^{+} - B_{13}B_{12}^{+}\right]\left(B_{23}^{+} - \frac{B_{13}^{+}B_{24}^{+}}{b_{14}}\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$B_{34} = -\frac{1}{b_{14}}(B_{23}B_{12}^{+} + B_{33}B_{13}^{+} + B_{13}B_{11}^{+}).$$

Решение $A_\mu(x)$ в алгебро-геометрической конструкции является рациональной функцией элементов матрицы B. Таким образом, из (6) следует, что $A_\mu(x)$ в приведенной параметризации является рациональной функцией свободных параметров, которые изменяются в $R^{18} + R_+^3$.

Последний результат показывает, что 3-инстантонное решение допускает рациональную параметризацию.

Наряду с уравнениями связи следует также проверить условие невырожденности [8], согласно которому система уравнений

$$\begin{gathered} a_\alpha x + \sum_{\beta=1}^{N} a_\beta B_{\alpha\beta} = 0, \\ \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha B_{\alpha,N+1} = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

на кватернионы a_α и x должна иметь только тривиальное, $a_\alpha = 0$, решение.

Можно доказать, что достаточно рассмотреть систему (7) с вещественными кватернионами a_α. Для $N = 3$ совместная система (5) и (7) имеет 17-параметрическое семейство решений. Из сказанного следует, что решение (6) является невырожденным в ситуации общего положения. Подмногообразие пространства параметров, на котором решение вырождается, 17-мерно, т.е. имеет коразмерность 4. Отсюда следует, что многообразие параметров является двухсвязным. Разрешение особенностей решения (6) не меняет этого утверждения.

4. Аналогичную технику можно применить к 4-инстантонному случаю. В этом случае не удается разрешить систему (5) до конца. Остается одно квадратное уравнение на кватернион B_{22}; свободными параметрами являются кватернионы B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{23}, B_{24}, B_{25}, B_{33} и вещественное число b_{15}.

5. В заключение приведем явную формулу для 3-инстантонного решения уравнения (1).

Пусть кватернионы K_α, $\alpha = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\beta=1}^{3} (x\delta_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta})K_\beta^{+} = -B_{\alpha 4}. \tag{8}$$

Тогда для решения $A_\mu = \sum_{a=1}^{3} A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2i}$, где σ^a – матрицы Паули, имеем

$$(9) \qquad A_\mu^a = 2\sum \eta_{a\lambda\nu} \frac{\partial_\mu K_\alpha^\lambda \cdot K_\alpha^\nu}{1 + \sum_\beta \det K_\beta};$$

здесь $K_\alpha = K_\alpha^4 + i \sum_{i=1}^{3} K_\alpha^i \sigma^i$, $\eta_{a\lambda\nu}$ – тензор Хоофта [13].

Формулы (6), (8), (9) дают общий вид 3-инстантонного решения в терминах независимых параметров. Оно является рациональной функцией свободных вещественных переменных.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР
Ленинградское отделение

Поступило
20 VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S.* – Phys. Lett., 1975, vol. 59B, № 1, p. 85–87. 2. *Polyakov A.M.* – Ibid., 1975, vol. 59B, № 1, p. 82–84. 3. *Atiyah M.F., Ward R.S.* – Commun. Math. Phys., 1977, vol. 55, p. 117–124. 4. *Atiyah M.F., Hitchin N.J., Drinfeld V.G., Manin Yu.I.* – Phys. Lett., 1978, vol. 65A, № 3, p. 185–187. 5. *Дринфельд В.Г., Манин Ю.И.* – Ядерная физика, 1979, т. 29, вып. 6, с. 1646–1654. 6. *Дринфельд В.Г., Манин Ю.И.* – УМН, 1978, т. 33, вып. 3 (201), с. 165–166. 7. *Дринфельд В.Г., Манин Ю.И.* – Функц. анализ, 1978, т. 13, вып. 2, с. 78–79. 8. *Atiyah M.F.* – Geometry of Yang–Mills fields. Pisa; Lezioni Fermiane, 1979, p. 163. 9. *Belavin A.A.* – Sov. Sci. Rev. (Phys. Rev.), 1979, № 1, p. 1–28. 10. *Schwartz A.S.* – Phys. Lett., 1977, vol. 67B, № 2, p. 172–174. 11. *Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M.* – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1977, vol. 74, № 7, p. 2662–2663. 12. *Christ N.H., Weinberg E.J., Stanton N.K.* – Phys. Rev., 1978, vol. D18, № 6, p. 2013–2025. 13. *Hooft G.* – Ibid., 1976, vol. D14, № 12, p. 3432–3450.