А. Б. Венков, Об одном дискретном ряде но дискретной груше и его приложении к рядам Дирихле, связаннш с автоморфными формами, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1976, том 63, 3–7

# ОБ ОДНОМ РЯДЕ ПО ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЕ И О ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К РЯДАМ ДИРИХЛЕ, СВЯЗАННЫМ С АВТОМОРФНЫМИ ФОРМАМИ

А.Б.Венков

В докладе [1] А.Сельберг определил некоторый ряд по дискретной группе, зависящей от комплексного параметра, который оказался полезным при изучении ряда Дирихле с коэффициентами равными суммам Клостермана. А именно, аналитическое продолжение указанного ряда Дирихле получалось как следствие аналитического продолжения ряда Пуанкаре – Сельберга, что в свою очередь являлось следствием некоторых спектральных соображений.

В настоящей заметке мы определяем, исходя из ряда Пуанкаре – Сельберга, некоторый другой ряд, также зависящий от комплексного параметра, и устанавливает его взаимосвязь с рядами Дирихле, у которых в качестве коэффициентов выступают произведения коэффициентов Фурье автоморфных форм. Следует заметить, однако, что в этой работе мы не получаем никакой новой информации о возможности аналитического продолжения указанных рядов Дирихле, а лишь сводим этот вопрос к вопросу об аналитическом продолжении ряда по дискретной группе.

Переходим к точным утверждениям. Пусть $H$ – верхняя полуплоскость комплексной переменной $z = x + \sqrt{-1}y$, $y > 0$, на которой действует группа $PSL(2,R)$ дробно-линейными преобразованиями; если элемент $g$ имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,R),$$

то его действие на $H$ определяется формулой: $gz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (мы обозначаем элементы группы $PSL(2,R)$ матрицами). Инвариантная мера на $H$ относительно такого действия равна $\dfrac{dz}{y^2} = \dfrac{dx\,dy}{y^2}$.

Пусть $\Gamma$ дискретная подгруппа группы $PSL(2,R)$ такая, что ее фундаментальная область $F$ в $H$ некомпактна и имеет конечный объем относительно инвариантной меры. Для простоты будем предполагать, что область $F$ имеет только одну с точностью до эквивалентности относительно преобразований из группы $\Gamma$ параболическую вершину, которая описывается подгруппой $\Gamma_\infty \subset \Gamma$ следующего вида:

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad n \in Z.$$

Рассмотрим теперь произведение $S=\prod_{j=1}^{m} H_j$ $m$ верхних полуплоскостей, на каждой из компонент которого действует дискретная группа $\Gamma_j$, удовлетворяющая всем условиям, указанным выше для группы $\Gamma^d$. Подгруппы $\Gamma_{j\infty} \subset \Gamma_j$ совпадают с подгруппой $\Gamma_\infty$.

Определим следующий ряд:

$$\mathcal{U}(z_1,z_2,\dots,z_m;s;k)=\sum_{\gamma_1\in\Gamma_{1\infty}\setminus\Gamma_1,\dots\gamma_m\in\Gamma_{m\infty}\setminus\Gamma_m} y_1^s(\gamma_1 z_1)\dots y_m^s(\gamma_m z_m)\times \tag{I}$$

$$\times\frac{\exp(2\pi\sqrt{-1}(\gamma_1 z_1+\dots+\gamma_m z_m))}{1-\exp(2\pi\sqrt{-1}(\gamma_1 z_1+\dots+\gamma_m z_m))}\exp(-\sqrt{-1}\cdot k(\arg(c_1z_1+d_1)+\dots+\arg(c_m z_m+d_m))$$

Мы воспользовались следующими обозначениями: $y(z)$ – координата $y$ точки $z=x+\sqrt{-1}y\in H$, $\{z_1,\dots,z_n\}\in S$,

$$\gamma_j=\begin{pmatrix} a_j & b_j\\ c_j & d_j\end{pmatrix}$$

$1\le j\le m$, $s\in C$, $k\in Z$, $\arg z$ – аргумент комплексного числа. Докажем лемму.

Лемма. Ряд (I) абсолютно сходится в области $\operatorname{Re}s>1+\frac{1}{m}$ при почти всех значениях переменных $\{z_1,\dots,z_m\}\in S$ относительно инвариантной меры на $S$.

Доказательство. Если точка $z$ принадлежит $H$, то, очевидно, выполняется следующее равенство:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}z}}{1-e^{2\pi\sqrt{-1}z}}=\frac{1}{1-e^{2\pi\sqrt{-1}z}}-1=\sum_{\ell=1}^{\infty}e^{2\pi\sqrt{-1}\ell z}$$

Справедлива следующая оценка:

$$|\mathcal{U}(z_1\dots z_m;s;k)|\le\sum_{\ell=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{\gamma_j\in\Gamma_{j\infty}\setminus\Gamma_j}y_j^{\operatorname{Re}s}(\gamma_j z_j)e^{-2\pi\ell y_j(\gamma_j z_j)}\Big)$$

Далее, выполняется неравенство:

$$\int_{F_1}\dots\int_{F_m}|\mathcal{U}(z_1,\dots,z_m;s;k)|\frac{dz_1}{y_1^2}\dots\frac{dz_m}{y_m^2}\le\sum_{\ell=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{\gamma_j\in\Gamma_{j\infty}\setminus\Gamma_j}\int_{F_j}y_j^{\operatorname{Re}s}(\gamma_j z_j)\times \tag{2}$$

$$\times e^{-\pi\ell y_j(\gamma_j z_j)}\frac{dz_j}{y_j^2}\Big)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dy_1}{y_1^2}\dots\int_0^{\infty}\frac{dy_m}{y_m^2}y_1^{\operatorname{Re}s}e^{-2\pi\ell y_1}\dots y_m^{\operatorname{Re}s}e^{-2\pi\ell y_m}<\infty$$

если $\operatorname{Re} s > 1 + \frac{1}{m}$. Мы обозначили через $F_j$ фундаментальную область групп $\Gamma_j$ в $H_j$, воспользовались инвариантностью меры $\frac{dz_j}{y_j^2}$ а также следующим соотношением:

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma_{j\infty} \backslash \Gamma_j} \gamma F_j = \Pi,$$

где $\Pi$ это произведение: $\Pi = (0,\infty) \times (0,1)$. Неравенство (2) показывает, что ряд (I) сходится почти всюду при $\operatorname{Re} s > 1 + \frac{1}{m}$. Лемма доказана.

Нетрудно показать, что на самом деле ряд $\mathcal{U}(z_1, z_2, \ldots z_m; s; k)$ равномерно сходится на компактных подмножествах $S$ и потому представляет в области $\operatorname{Re} s > 1 + \frac{1}{m}$ аналитическую функцию.

Пусть теперь $f_1(z_1), \ldots, f_m(z_m)$ – набор аналитических автоморфных относительно дискретных групп $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, соответственно, форм веса $k$, т.е., в частности, для любого $\gamma \in \Gamma_j$,

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

выполняется условие $f_j(\gamma z_j) = (c z_j + d)^k f_j(z_j)$; $j = 1 \ldots m$. Кроме того, будем предполагать, что все $f_j(z_j)$ – параболические формы. Тогда, как известно, для каждой функции $f_j$ справедливо разложение Фурье:

$$f_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} e^{2\pi\sqrt{-1}\, n z_j}.$$

Вычислим следующее скалярное произведение:

$$\int_{F_1} \cdots \int_{F_m} \mathcal{U}(z_1, \ldots, z_m; s; k) \overline{f_1(z_1)} \cdots \overline{f_m(z_m)}\, y_1^{k/2} \cdots y_m^{k/2} \frac{dz_1}{y_1^2} \cdots \frac{dz_m}{y_m^2} = \tag{3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \Big( \sum_{\Gamma_{j\infty} \backslash \Gamma_j} \int_{F_j} y_j^{s}(\gamma_j z_j) e^{2\pi\sqrt{-1}\, \gamma_j z_j - \sqrt{-1}\, k \arg(c_j z_j + d_j)} \overline{f_j(z_j)}\, y_j^{k/2} \frac{dz_j}{y_j^2} \Big).$$

Рассмотрим отдельное слагаемое в этой сумме:

$$\int_F y^{s}(\gamma z) e^{2\pi\sqrt{-1}\, n \gamma z - \sqrt{-1}\, k \arg(cz+d)} \overline{f_j(z)}\, y^{k/2} \frac{dz}{y^2} \tag{4}$$

(для краткости мы опустили индекс $j$ ). Сделаем замену переменных $z' = \gamma z$, $z = \gamma^{-1} z'$. Интеграл (4) равен интегралу:

$$\int_{\gamma F} y'^{s}(z') e^{2\pi\sqrt{-1}\, n z' - \sqrt{-1}\, k \arg(c \gamma^{-1} z' + d)} \frac{y'^{k/2}}{|-cz' + a|^k} \overline{(-cz' + a)^k f_j(z')} \frac{dz'}{y'^2},$$

поскольку мера $\frac{dz}{y^2}$ – инвариантна. Далее, верно следующее соотношение:

$$c\gamma^{-1}z' + d = c\,\frac{dz'-b}{-cz'+a} + d = \frac{1}{-cz'+a}.$$

Отсюда интеграл (4) равен интегралу

$$\int_{\gamma F} y^{s} e^{2\pi\sqrt{-1}\,nz}\, \overline{f_j(z)}\, y^{k/2}\, \frac{dz}{y^2}.$$

В свою очередь, сумма

$$\sum_{\Gamma_\infty\setminus\Gamma} \int_F y^{s}(\gamma z) e^{2\pi\sqrt{-1}\,n\gamma z - \sqrt{-1}\,k\arg(cz+d)}\, \overline{f_j(z)}\, y^{k/2} \frac{dz}{y^2}$$

равна следующему интегралу, который легко вычисляется:

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \int_0^1 dx\, y^{s} e^{2\pi\sqrt{-1}\,nz}\, \overline{f_j(z)}\, y^{k/2} = \overline{a_n^{(j)}} \int_0^\infty y^{s+k/2-2} e^{-2\pi n y} dy =$$

$$= \frac{\overline{a_n^{(j)}}}{n^{s+k/2-1}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{s+k/2-1}}\, \Gamma(s+k/2-1),$$

где $a_n^{(j)}$ коэффициент Фурье функции $f_j(z)$. Из этой формулы получается следующее соотношение:

$$\int_{F_1}\!\!\dots\!\int_{F_m} \mathcal{U}(z_1,\dots,z_m;s;k)\,\overline{f_1(z_1)}\dots\overline{f_m(z_m)}\, y_1^{k/2}\dots y_m^{k/2} \frac{dz_1}{y_1^2}\dots\frac{dz_m}{y_m^2} =$$

$$= \frac{(\Gamma(s+k/2-1))^m}{(2\pi)^{m(s+k/2-1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_n^{(1)}\dots a_n^{(m)}}}{n^{(s+k/2-1)m}}. \tag{5}$$

Как следует из леммы и формулы (5), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(1)}\dots a_n^{(m)}}{n^{(s+k/2-1)m}}$ сходится в области $\operatorname{Re} s > 1 + \frac{1}{m}$, или, обозначая $(s+k/2-1)m = t$ – в области $\operatorname{Re} t > \frac{mk}{2} + 1$. Из соотношения (5), в частности, следует теорема.

**Теорема.** Пусть ряд $\mathcal{U}(z_1,\dots,z_m;s;k)$ допускает по переменной $s$ мероморфное продолжение в область $\operatorname{Re} s > \alpha$ $(\alpha \in R)$, тогда ряд Дирихле $\sum_{n=1} \frac{a_n^{(1)}\dots a_n^{(m)}}{n^t}$ допускает мероморфное продолжение в область $\operatorname{Re} t > (\alpha + k/2 - 1)m$.

В заключение отметим, что можно, считая в формуле (I) $k=0$, вычислить скалярное произведение (5) с неаналитическими автоморфными формами Маасса. Единственным отличием в этом случае будет другой Γ -множитель в правой части соотношения (5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Selberg, A.: On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. Theory of numbers. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol.VIII, s.1-15. Providence R.I.: American Mathematical Society 1965.