УДК 514.763.8+514.752.44

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Е. В. Ферапонтов

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений гидродинамического типа:

$$u_t^i = v_j^i(u) u_x^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Такие системы возникают в задачах газовой динамики, теории многослойной воды (уравнения Бенни), методе усреднения Уизема (так называемые уравнения медленной модуляции параметров) и т. д. Эти и другие физические приложения подробно обсуждаются в [5]—[7], [10], [16], [17], и мы не будем останавливаться на них в дальнейшем. Основная цель работы — рассказать о некоторых возникающих здесь дифференциально-геометрических задачах. Еще Риманом было замечено, что система гидродинамического типа представляет собой дифференциально-геометрический объект. Действительно, при заменах зависимых переменных $u^i = u^i(w^1, \ldots, w^n)$ матрица $v_j^i(u)$ ведет себя как тензор типа (1,1), т. е. как аффинор. Изучение системы гидродинамического типа — это, таким образом, не что иное как изучение поля аффинора $v_j^i(u)$, которое вполне определяется сетью своих собственных направлений и набором собственных чисел. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать гиперболические системы, считая собственные числа матрицы v_j^i вещественными и различными,— именно такая ситуация, как правило, встречается в приложениях. На первый взгляд может показаться, что вся «геометрия» заключена в сети собственных направлений аффинора v_j^i, точнее, в ее тензоре неголономности. Это, однако, не совсем так. Более того, именно для систем с голономной сетью собственных направлений или, как еще говорят, систем в инвариантах Римана, возникает ряд специфических и интересных задач. (Инвариантами Римана R^i называются координаты вдоль собственных направлений матрицы v_j^i. В этих координатах уравнения системы принимают диагональный вид $R_t^i = \lambda^i(R) R_x^i$.) Нашей целью не является изучение систем гидродинамического типа в самом общем виде. Как с точки зрения приложений, так и с точки зрения геометрии из всего класса систем гидродинамического типа выделяется подкласс гамильтоновых систем. Именно гамильтоновы системы обладают той дополнительной структурой, которая делает особенно содержательной задачу их геометрического исследования. Существует два естественных гамильтоновых формализма, приводящих к системам гидродинамического типа,— «локальный» и «нелокальный». Их описанию посвящены § 1 и § 2 настоящей работы. Для удобства читателя, не знакомого с общей идеологией гамильтонова формализма, дадим здесь чисто геометрическое определение гамильтоновых систем.

I. **Локальный гамильтонов формализм** (см. [16]). Система $u_t^i = v_j^i u_x^j$ называется гамильтоновой (в локальном смысле), если найдется невырожденная метрика $g_{ij} du^i du^j$ нулевой кривизны такая, что:

$$g_{ik} v_j^k = g_{jk} v_i^k,$$

$$\nabla_i v_j^k = \nabla_j v_i^k,$$

где ∇ — ковариантное дифференцирование, порожденное метрикой g_{ij}. В этом случае матрица v_j^i называется гамильтоновой (в локальном смысле) и может быть записана в виде матрицы вторых ковариантных производных некоторой функции $h(u)$:

$$v_j^i = \nabla^i \nabla_j h \quad (\nabla^i = g^{ik} \nabla_k).$$

$h(u)$ называется гамильтонианом системы.

II. **Нелокальный гамильтонов формализм** (см. [9]). Система $u_t^i = v_j^i u_x^j$ называется гамильтоновой (в нелокальном смысле), если найдется невырожденная метрика $g_{ij} du^i du^j$ постоянной кривизны 1 такая, что

$$g_{ik} v_j^k = g_{jk} v_i^k,$$

$$\nabla_i v_j^k = \nabla_j v_i^k,$$

где ∇ — ковариантное дифференцирование, порожденное метрикой g_{ij}. В этом случае матрица v_j^i называется гамильтоновой (в нелокальном смысле) и может быть записана в виде

$$v_j^i = (\nabla^i \nabla_j + \delta_j^i) h.$$

Функция $h(u)$ называется гамильтонианом системы.

Смысл терминов «локальный» и «нелокальный» объясняется в § 1, 2. Адекватный гамильтонов формализм, приводящий к системам типа I (в работе он называется «локальным» гамильтоновым формализмом), построен Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в работе [5]. Дальнейшее изучение гамильтоновых (в локальном смысле) систем гидродинамического типа было продолжено С. П. Царевым [16], [17]. В необходимом объеме результаты этих работ приведены в § 1. Так, один из результатов [16] как раз и использован в качестве определения I. Нелокальный гамильтонов формализм, приводящий к системам типа II, возник в совместной работе О. И. Мохова и автора [9]. Строго говоря, для правильного определения понятия «гамильтонова система» требуется вначале определить сам гамильтонов формализм. Данные выше определения I, II превратятся при этом в следствия исходных, более естественных определений. Мы, однако, выбрали их намеренно, с тем чтобы подчеркнуть дифференциально-геометрическую природу гамильтоновых систем гидродинамического типа.

Локальный гамильтонов формализм имеет, если можно так сказать, «физический» смысл — многие возникающие на практике системы оказываются гамильтоновыми в смысле определения I. Нелокальный гамильтонов формализм имеет, напротив, «дифференциально-геометрический» смысл. Оказывается (см. [9]), что с каждой гамильтоновой (в нелокальном смысле) матрицей v_j^i и отвечающей ей метрикой g_{ij} постоянной кривизны 1 естественным образом связывается некоторая гиперповерхность M^n в псевдоевклидовом пространстве E^{n+1} такая, что v_j^i — обратный к оператору Вейнгартена гиперповерхности M^n, g_{ij} — третья квадратичная форма M^n (как и положено третьей квадратичной форме, она имеет постоянную кривизну 1). Дело в том, что известные в теории поверхностей соотношения Гаусса—Петерсона—Кодацци (переписанные в терминах третьей квадратичной формы g_{ij} и аффинора v_j^i, обратного оператору Вейнгартена), в точности совпадают с соотношениями на g_{ij} и v_j^i из определения II. Другими словами, всякая гамильтонова (в нелокальном смысле) матрица v_j^i реализуется на некоторой гиперповерхности M^n как обратная к ее оператору Вейнгартена. Это приводит к довольно неожиданному выводу: теория гиперповерхностей псевдоевклидова пространства — это теория гамильтоновых (в нелокальном смысле) систем гидродинамического типа.

Несмотря на такое «содержательное» различие локального и нелокального гамильтонова формализма их формальные свойства, как показывает сравнение результатов § 1 и § 2, очень похожи друг на друга. Оказывается, это сходство не случайно и существует каноническое преобразование, сопоставляющее всякой гамильтоновой системе типа I некоторую систему типа II, а вместе с ней — гиперповерхность псевдоевклидова пространства. Такое преобразование построено в § 3. Оно относится к простейшим преобразованиям типа Беклунда (так называемое преобразование по решению) и фактически отождествляет локальный гамильтонов формализм с нелокальным.

Естественно поинтересоваться, каковы дифференциально-геометрические аналоги таких хорошо известных понятий теории систем гидродинамического типа, как, например, коммутирующие потоки и мультигамильтоновы структуры. Этим вопросам посвящен § 4. Оказывается, коммутирующим потокам отвечают гиперповерхности, имеющие одинаковое сферическое изображение сети линий кривизны. В евклидовом пространстве E^3 такое соответствие между поверхностями (являющееся частным случаем соответствия Петерсона) рассматривал Д. Ф. Егоров [8]. Мультигамильтоновым системам (т. е. системам, которые имеют несколько различных гамильтоновых структур) отвечают поверхности, допускающие нетривиальные деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн (т. е. с сохранением оператора Вейнгартена). При этом число существенных параметров, от которых зависят такие деформации, фактически равно числу различных гамильтоновых структур соответствующей системы. Заметим, что именно при рассмотрении этого круга вопросов появляется требование голономности сети собственных направлений аффинора v^i_j, т. е. требование существования инвариантов Римана. Дело в том, что только гиперповерхности с голономной сетью линий кривизны (а системам в инвариантах Римана отвечают как раз такие гиперповерхности) могут допускать нетривиальные деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн. Любопытно, что несмотря на свою вполне классическую постановку задача описания деформаций, сохраняющих главные направления и главные кривизны, не рассматривалась даже в евклидовом пространстве E^3.

В § 6 мы частично восполняем этот пробел и даем полное описание поверхностей в E^3, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн. Оказывается, что при некоторых естественных ограничениях все сводится к квадрикам, конформным образам поверхностей вращения, а также поверхностям, сферическое изображение линий кривизны которых — такое же, как у какой-либо из перечисленных выше. Другими словами, наличие деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн — свойство не самой поверхности, а ортогональной сети на сфере, являющейся изображением ее линий кривизны.

К задаче описания указанных деформаций самым непосредственным образом примыкает вопрос о том, какие системы из двух уравнений гидродинамического типа допускают ровно три локальные гамильтоновы структуры, т. е. являются три-гамильтоновыми. Этот вопрос рассматривается в § 5. Оказалось, что фактически все исчерпывается уравнениями газовой динамики (то, что уравнения газовой динамики при любом показателе политропы γ являются три-гамильтоновыми, было известно и ранее, см., например, [29]).

В § 7 формулируется ряд нерешенных задач.

Подчеркнем, что существенно новыми результатами настоящей работы являются следующие:

1. Построена явная связь локального и нелокального гамильтонова формализма (§ 3).

2. Дано полное описание три-гамильтоновых систем из двух уравнений (§ 5: имеются в виду локальные гамильтоновы структуры).

3. Дано полное описание поверхностей в E^3, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн (§ 6). На другом языке это эквивалентно описанию систем из двух уравнений, имеющих три локальные и одну нелокальную гамильтонову структуру.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность М. А. Акивису и Э. Г. Позняку за внимание, интерес к работе и неоднократные консультации по вопросам классической дифференциальной геометрии, а также Б. А. Дубровину, О. И. Мохову, М. В. Павлову и С. П. Цареву за обсуждение результатов.

§ 1. СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ ЛОКАЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

Напомним в необходимом для дальнейшего объеме некоторые известные факты теории гамильтоновых систем гидродинамического типа. Более подробно с этой тематикой можно ознакомиться по оригинальным работам Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [5], [6], С. П. Царева [16], [17], а также обзорам [7], [10].

На бесконечномерном фазовом пространстве вектор-функций $u=\{u^i(x),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ скобка Пуассона двух функционалов

$$I=\int f(u,\ u_x,\ \ldots)\,dx,\quad J=\int g(u,\ u_x,\ \ldots)\,dx$$

задается формулой

$$\{I;\ J\}=\int\frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\,A^{ij}\,\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx, \tag{1}$$

где в качестве A^{ij} рассматриваются локальные операторы вида

$$A^{ij}=g^{ij}(u)\frac{d}{dx}+b^{ij}_k(u)\,u^k_x \tag{2}$$

$\left(\dfrac{\delta}{\delta u^i(x)}\right.$ — операция взятия вариационной производной$\Big)$. Термин «локальный» означает отсутствие операторов интегрирования $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-1}$ в выражении для A^{ij}. Специальный класс нелокальных гамильтоновых операторов будет рассмотрен в следующем параграфе.

В предположении о невырожденности g^{ij} (именно этот случай и рассматривается в дальнейшем) удобно представить b_k^{ij} в виде $b_k^{ij}=-g^{is}\Gamma_{sk}^j$. Тогда при локальных заменах координат $u=u(w)$ коэффициенты g^{ij} преобразуются как тензор с верхними индексами, а Γ_{sk}^j — как символы Кристоффеля аффинной связности. Условие того, что (1) действительно является скобкой Пуассона, т. е. обладает косой симметрией и удовлетворяет тождеству Якоби, накладывает достаточно жесткие ограничения на g^{ij} и Γ_{sk}^j. Для формулировки основного результата удобно ввести тензор g_{ij} с нижними индексами, обратный g^{ij} : $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$.

Теорема 1 ([5]). 1. Для того чтобы скобка (1) была кососимметричной, необходимо и достаточно, чтобы тензор g_{ij} был симметричным (т. е. задавал псевдориманову метрику $g_{ij}du^idu^j$, не обязательно знакоопределенную), а связность Γ_{sk}^j была согласована с метрикой: $\nabla_k g_{ij}=0$.

2. Для того чтобы скобка (1) удовлетворяла тождеству Якоби, необходимо и достаточно, чтобы связность Γ_{sk}^j была симметричной и тензор ее кривизны обращался в ноль.

Определение. Гамильтонианами гидродинамического типа назовем функционалы вида $H=\int h(u(x))dx$ с плотностями $h(u)$, не зависящими явно от производных u_x, $u_{xx}, \ldots$. Там, где это не вызовет недоразумений, мы будем называть гамильтонианами и соответствующие плотности $h(u)$.

Порождаемые ими гамильтоновы потоки задаются уравнениями гидродинамического типа

$$u_t^i = A^{ij}\frac{\delta H}{\delta u^j} = v_j^i(u) u_x^j,$$

где матрица $v_j^i(u)$ вычисляется по формуле

$$v_j^i=g^{is}\nabla_s\nabla_j h=\nabla^i\nabla_j h. \qquad (3)$$

Возникающие таким образом матрицы v_j^i будем называть гамильтоновыми. Имеется простой критерий, позволяющий проверить гамильтоновость заданной матрицы v_j^i.

Лемма 1 ([16]). Для того чтобы матрица v_j^i была гамильтоновой, необходимо и достаточно существование невырожденной метрики g_{ij} нулевой кривизны такой, что

$$\begin{gathered} g_{ik}v_j^k=g_{jk}v_i^k, \\ \nabla_i v_j^k=\nabla_j v_i^k, \end{gathered} \qquad (4)$$

где ∇ — ковариантное дифференцирование, порожденное метрикой g_{ij}.

В самом деле, соотношения (4) суть условия совместности уравнений $v_j^i=\nabla^i\nabla_j h$, рассматриваемых как переопределенная система относительно h.

Для систем в инвариантах Римана $R_t^i=\lambda^i(R)R_x^i$ условие гамильтоновости выглядит особенно просто.

Лемма 2 ([16]). Для того чтобы система $R_t^i=\lambda^i(R)R_x^i$ была гамильтоновой, необходимо и достаточно существование невырожденной диагональной метрики $\sum_{i=1}^{n} g_{ii}(dR^i)^2$ нулевой кривизны, такой, что

$$\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j-\lambda^i}=\partial_j \ln\sqrt{g_{ii}} \text{ для любой пары } i\neq j \ (\partial_j=\partial/\partial R^j).$$

Справедливость этого предложения сразу же вытекает из формул (4), записанных в координатах R^i.

В дальнейшем нам понадобится также полученное в [16] описание интегралов гамильтоновых систем гидродинамического типа, т. е. 1-форм $B(u)dx+A(u)dt$, замкнутых на решениях системы. Хотя само понятие интеграла инвариантно относительно произвольных замен координат $u=u(w)$, это описание выглядит наиболее естественно в так называемых «плоских» координатах, где метрика g_{ij} имеет диагональный вид $g_{ij}=\varepsilon_i\delta_{ij}$ с диагональными элементами $\varepsilon_i=\pm 1$, а символы Кристоффеля $\Gamma_{sk}^j=0$. Существование таких координат (для которых мы оставим прежние обозначения u^i) гарантируется теоремой 1. В плоских координатах уравнения системы примут вид

$$u_t^i=\varepsilon_i h_{ij} u_x^j, \text{ где } h_{ij}=\partial^2 h/\partial u^i \partial u^j. \tag{5}$$

Теорема 2 ([16]). Любая гамильтонова система (5), записанная в плоских координатах u^i, имеет $n+2$ интеграла (n — число уравнений):

$$\begin{gathered} u^i dx+\varepsilon_i h_i dt, \ i=1,\dots,n, \\ \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} dx+\left(\sum_{s=1}^{n} h_s u^s-h\right)dt, \\ h dx+\left(\sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \frac{(h_s)^2}{2}\right)dt. \end{gathered} \tag{6}$$

Плотностями этих интегралов (т. е. коэффициентами при dx) являются соответственно сами плоские координаты u^i, половина квадрата линейного элемента длины $\sum \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2}$ и гамильтониан h.

Замечание. У гамильтоновых систем «общего положения» (см. [16]) никаких других интегралов нет. Исключение составляют системы, приводимые к инвариантам Римана — они допускают бесконечное множество интегралов с произволом в n функций одного аргумента. Для наших целей, однако, будет достаточно канонических интегралов (6).

§ 2. СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ НЕЛОКАЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА, И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Нелокальный гамильтонов формализм для систем гидродинамического типа был предложен в совместной работе О. И. Мохова и автора [9]. Суть его заключается в том, что в качестве оператора A^{ij}, определяющего скобку Пуассона (1), выбирается выражение вида

$$A^{ij}=g^{ij}(u)\frac{d}{dx}+b_k^{ij}(u)u_x^k+cu_x^i\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}u_x^j,\quad c=\text{const},\tag{7}$$

которое формально можно представлять себе как линейную комбинацию локального оператора вида (2) и нелокальной добавки $u_x^i d^{-1}u_x^j$. Для одной полевой переменной $u(x)$ оператор $u_x d^{-1}u_x$ возникал в [12] в связи с уравнением Кричевера—Новикова. Отмечалась его гамильтоновость, а также то обстоятельство, что выражение $u_x d^{-1}u_x\frac{\delta J}{\delta u}$ является локальным для локальных $J=\int g(u,u_x,\ldots)dx$. Считая $\det g^{ij}\neq 0$, введем g_{ij} с нижними индексами ($g_{ih}g^{hj}=\delta_i^j$) и представим b_k^{ij} в виде $b_k^{ij}=-g^{is}\Gamma_{sk}^j$. Тогда при заменах координат величины g_{ij} будут меняться по тензорному закону, а Γ_{sk}^j — как символы Кристоффеля. Условие гамильтоновости оператора (7) накладывает определенные ограничения на g_{ij} и Γ_{sk}^j, которые нетривиальным образом зависят от константы c.

Теорема 3 ([9]). 1. Для того чтобы скобка (1) была кососимметричной, необходимо и достаточно, чтобы тензор g_{ij} был симметричным (т. е. задавал псевдориманову метрику $g_{ij}du^idu^j$), а связность Γ_{sk}^j была согласована с метрикой: $\nabla_k g_{ij}=0$.

2. Для того чтобы скобка (1) удовлетворяла тождеству Якоби, необходимо и достаточно, чтобы связность Γ_{sk}^j была симметричной и имела постоянную кривизну c.

Другими словами, g_{ij} — метрика постоянной кривизны c. При $c=0$ приходим к плоским метрикам, что как раз и является содержанием теоремы 1 предыдущего параграфа. Заметим, что в случае $c\neq 0$ всегда можно добиться $c=1$, поделив A^{ij} на c. Нормировкой $c=1$ мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Гамильтонианами гидродинамического типа назовем функционалы вида $H=\int h(u(x))dx$, плотности которых не зависят явно от производных $u_x, u_{xx}, \ldots$. Порождаемые ими гамильтоновы потоки задаются уравнениями гидродинамического типа

$$u_t^i=A^{ij}\frac{\delta H}{\delta u^j}=v_j^i(u)u_x^j,$$

где матрица v_j^i вычисляется по формуле

$$v_j^i=(g^{is}\nabla_s\nabla_j+\delta_j^i)h=(\nabla^i\nabla_j+\delta_j^i)h. \tag{8}$$

Возникающие таким образом матрицы v_j^i будем называть гамильтоновыми в нелокальном смысле. Подчеркнем, что в (8) ∇ обозначает ковариантное дифференцирование, порожденное метрикой g_{ij} кривизны 1, а в (3) — соответствующей плоской метрикой. Имеется простой критерий гамильтоновости заданной матрицы v_j^i (аналог леммы 1 § 1).

Лемма 3 ([9]). Для того чтобы матрица v_j^i была гамильтоновой в нелокальном смысле, необходимо и достаточно существование невырожденной метрики g_{ij} постоянной кривизны 1 такой, что

$$\begin{gathered} g_{ik}v_j^k=g_{jk}v_i^k, \\ \nabla_i v_j^k=\nabla_j v_i^k, \end{gathered} \tag{9}$$

где ∇ — ковариантное дифференцирование, порожденное метрикой g_{ij}.

В самом деле, (9) есть условие совместности уравнений $v_j^i=(\nabla^i\nabla_j+\delta_j^i)h$, рассматриваемых как переопределенная система относительно h. (Опуская у v_j^k верхний индекс с помощью метрики g_{ij}, получим $\nabla_i v_{kj}=\nabla_j v_{ki}$. В таком виде эти уравнения рассматривались В. Т. Фоменко [15].)

Для систем $R_t^i=\lambda^i(R)R_x^i$ в римановых инвариантах имеет место очевидный аналог леммы 2 § 1.

Лемма 4. Для того чтобы система $R_t^i=\lambda^i(R)R_x^i$ была гамильтоновой (в нелокальном смысле), необходимо и достаточно существование невырожденной диагональной метрики $\sum_{i=1}^{n} g_{ii}(dR^i)^2$ постоянной кривизны 1 такой, что

$$\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j-\lambda^i}=\partial_j \ln\sqrt{g_{ii}} \quad \text{для любой пары } i\neq j.$$

Имеется одно существенное обстоятельство дифференциально-геометрического характера, отличающее нелокальный гамильтонов формализм от локального. Оказывается, со всякой гамильтоновой в нелокальном смысле матрицей v_j^i и соответствующей метрикой g_{ij} постоянной кривизны 1, которые удовлетворяют условиям (9), каноническим образом связывается некоторая гиперповерхность M^n в псевдоевклидовом пространстве E^{n+1}. Введем в рассмотрение квадратичные формы

$$\begin{aligned} \mathrm{I}&=v_i^k g_{kl} v_j^l du^i du^j, \\ \mathrm{II}&=v_i^k g_{kj} du^i du^j, \\ \mathrm{III}&=g_{ij} du^i du^j. \end{aligned}$$

Теорема 4 ([9]). Первая квадратичная форма I и вторая квадратичная форма II связаны соотношениями Гаусса—Петерсона—Кодацци тогда и только тогда, когда v_j^i и g_{ij} удовлетворяют (9), причем g_{ij} — метрика постоянной кривизны 1.

Таким образом, формы I, II и III можно рассматривать соответственно как первую, вторую и третью квадратичные формы некоторой гиперповерхности M^n в псевдоевклидовом пространстве E^{n+1}. Заметим, что III — сама метрика $g_{ij}du^i du^j$. Как и положено третьей квадратичной форме, она имеет постоянную кривизну 1. Поднимая у второй квадратичной формы II один индекс с помощью первой квадратичной формы I (возникающий таким образом на гиперповерхности M^n оператор носит название оператора Вейнгартена; в зарубежной литературе — shape-operator), мы, как несложно проверить, получим $(v^{-1})_j^i$. Другими словами, если матрица v является гамильтоновой в нелокальном смысле, то обратная ей матрица v^{-1} может быть реализована как оператор Вейнгартена на гиперповерхности M^n в E^{n+1}. Соответствующая метрика g_{ij} приобретает смысл третьей квадратичной формы поверхности M^n, т. е. элемента длины сферического изображения.

Для доказательства теоремы 4 следовало бы переписать соотношения Гаусса—Петерсона—Кодацци в терминах третьей квадратичной формы g_{ij} и оператора v_j^i, обратного оператору Вейнгартена. Дело в том, что g_{ij} и v_j^i, подобно первой и второй квадратичным формам I, II, определяют гиперповерхность однозначно с точностью до положения в пространстве. Можно проверить, что результатом этого переписывания будут в точности соотношения (9). Мы, однако, опустим проверку этого утверждения и построим явное вложение гиперповерхности M^n в E^{n+1}, реализующее в указанном выше смысле заданную гамильтонову (в нелокальном смысле) матрицу v_j^i и отвечающую ей метрику g_{ij}. Утверждение теоремы 4 будет вытекать из этой конструкции автоматически.

Вспомним некоторые простейшие формулы теории поверхностей. Пусть M^n — гиперповерхность в E^{n+1}, параметризованная координатами $u^1, \ldots, u^n$, $\vec{r}=(r^1, \ldots, r^{n+1})$ — радиус-вектор, $\vec{n}=(n^1, \ldots, n^{n+1})$ — вектор единичной нормали. Имеют место формулы Вейнгартена:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}=v_i^j \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^j}. \tag{10}$$

Обычно их пишут в «перевернутом» виде $\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i}=(v^{-1})_i^j \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j}$, где v^{-1} — оператор Вейнгартена, однако нам по понятным причинам удобнее работать с оператором v, обратным оператору Вейнгартена. Расписывая (10) покомпонентно, получим:

$$\frac{\partial r^a}{\partial u^i}=v_i^j\frac{\partial n^a}{\partial u^j},\quad a=1,\ldots,n+1.$$

Это означает, что 1-формы

$$n^a(u)dx+r^a(u)dt,\ a=1,\ldots,n+1$$

являются интегралами системы

$$u_t^i=v_j^i(u)u_x^j,$$

т. е. внешние дифференциалы этих 1-форм обращаются в ноль в силу уравнений системы. С использованием (10) без труда проверяется, что интегралом является также 1-форма

$$(\vec{n};\vec{r})dx+\frac{1}{2}(\vec{r};\vec{r})dt,$$

где (;) — скалярное произведение в E^{n+1}. Доказано следующее

Предложение. Пусть M^n — гиперповерхность в псевдоевклидовом пространстве E^{n+1}, параметризованная координатами $u^1,\ldots,u^n$, v_j^i — обратный к оператору Вейнгартена, $\vec{r}=(r^a)$ — радиус-вектор, $\vec{n}=(n^a)$ — вектор единичной нормали. Тогда 1-формы

$$\begin{gathered}n^a dx+r^a dt,\quad a=1,\ldots,n+1,\\(\vec{n},\vec{r})dx+\frac{1}{2}(\vec{r},\vec{r})dt\end{gathered}\tag{11}$$

являются интегралами системы

$$u_t^i=v_j^i(u)u_x^j.$$

Плотности этих интегралов — компоненты единичной нормали n^a и скалярное произведение $(\vec{n};\vec{r})$, имеющее смысл расстояния касательной плоскости поверхности до начала координат.

Замечание. Для гиперповерхностей «общего положения» никаких других интегралов нет. Исключение составляют гиперповерхности с голономной сетью линий кривизны. Возникающие на них системы приводятся к инвариантам Римана и допускают бесконечное множество интегралов с произволом в n функций одного аргумента.

Предположим теперь, что нам задана гамильтонова (в нелокальном смысле) система $u_t^i=v_j^iu_x^j$ и требуется в явном виде построить реализующую ее гиперповерхность M^n в E^{n+1} (т. е. гиперповерхность, для которой v_j^i — обратный к оператору Вейнгартена). Согласно доказанному выше предложению, для этого достаточно найти $n+1$ интегралов n^adx+r^adt, $a=$

$=1,\ldots,n+1$, плотности которых связаны соотношением $(\vec{n};\vec{n})=1$. Гиперповерхность M^n определится после этого радиус-вектором $\vec{r}$, а ее нормаль — единичным вектором $\vec{n}$.

Таким образом, возникает задача описания интегралов гамильтоновых в нелокальном смысле систем (8):

$$u_t^i = v_j^i u_x^j = (\nabla^i \nabla_j + \delta_j^i) h u_x^j.$$

Это описание выглядит наиболее естественно в специальной системе координат, где метрика $g_{ij}du^i du^j$ постоянной кривизны 1 принимает канонический вид (см., например, [3], С. 88):

$$\frac{\sum_s \varepsilon_s (du^s)^2}{\left(\sum_s \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \varepsilon_s = \pm 1 \tag{12}$$

(мы оставляем за этими координатами старые обозначения u^i). Для коэффициентов матрицы $v^i_j = (\nabla^i \nabla_j + \delta^i_j) h$ получаем:

$$\begin{aligned} i \neq j:\ v^i_j &= \varepsilon_i R^2 \left(h_{ij} + \varepsilon_j \frac{u^j h_i}{R} + \varepsilon_i \frac{u^i h_j}{R}\right), \\ i = j:\ v^i_i &= \varepsilon_i R^2 h_{ii} + 2R h_i u^i - R \sum_s h_s u^s + h. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь введено обозначение $R = \sum_s \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}$. Для вывода формул (13) нужно воспользоваться выражениями символов Кристоффеля симметричной связности, согласованной с метрикой (12):

$$\Gamma^i_{ij} = -\frac{\varepsilon_j u^j}{R}; \quad \Gamma^i_{jj} = \frac{\varepsilon_j u^i}{R} \ (\text{при } i \neq j); \quad \Gamma^i_{jk} = 0 \ \text{при } i \neq j \neq k.$$

Следующая теорема является аналогом теоремы 2 предыдущего параграфа.

Теорема 5. Любая гамильтоновая в нелокальном смысле система (8), записанная в канонических координатах u^i, имеет $n+2$ интеграла:

$$\begin{gathered} \frac{u^i}{R} dx + \left[\varepsilon_i R h_i + u^i \left(\frac{h}{R} - \sum_s h_s u^s\right)\right] dt \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \left(\frac{1}{R} - 1\right) dx + \left[\frac{h}{R} - \sum_s h_s u^s - h\right] dt, \\ h dx + \left[\frac{h^2}{2} + \sum_s \frac{\varepsilon_s h_s^2}{2} R^2\right] dt. \end{gathered} \tag{14}$$

Плотностями этих интегралов являются $\frac{u^i}{R}$, $\frac{1}{R} - 1$ и гамильтониан h.

Замечание. В случае «общего положения» никаких других интегралов нет. Исключение составляют системы, приводимые к инвариантам Римана — они допускают бесконечное число интегралов с произволом в n функций одного аргумента. Нам будет достаточно, однако, «канонических» интегралов (14).

То обстоятельство, что (14) действительно являются интегралами, можно проверить непосредственно с использованием формул (13). В следующем параграфе станет ясно, как были получены эти выражения.

Первые $n+1$ плотностей $\frac{u^i}{R}$, $\frac{1}{R}-1$ связаны соотношением $\sum_s \varepsilon_s\left(\frac{u^s}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{R}-1\right)^2=1$. Следовательно, первые $n+1$ интегралов (14) задают реализацию рассматриваемой матрицы v^i_j как обратной к оператору Вейнгартена гиперповерхности M^n в псевдоевклидовом пространстве E^{n+1} с нормалью $\vec{n}$ и радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} \frac{u^i}{R} \\ \cdots \\ \frac{1}{R}-1 \end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix} \varepsilon_i R h_i+u^i\left(\frac{h}{R}-\sum_s h_s u^s\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{h}{R}-\sum_s h_s u^s-h \end{pmatrix},\quad i=1,\ldots,n.$$

Псевдоевклидова метрика E^{n+1} имеет вид $\sum_s \varepsilon_s(dx^s)^2+(dx^{n+1})^2$.

Непосредственные вычисления $(\vec{n};\vec{n})$, $(\vec{n};\vec{r})$ и $(\vec{r};\vec{r})$ (в смысле введенного скалярного произведения) дают:

$$(\vec{n};\vec{n})=1,\quad (\vec{n};\vec{r})=h,\quad (\vec{r};\vec{r})=h^2+\sum_s \varepsilon_s h_s^2 R^2.$$

Таким образом, последний из интегралов (14) переписывается в виде

$$(\vec{n};\vec{r})\,dx+\frac{1}{2}(\vec{r},\vec{r})\,dt.$$

В результате установлено взаимно однозначное соответствие между интегралами в форме (14) и (11). Полученное выражение $h=(\vec{n};\vec{r})$ для гамильтониана h позволяет сформулировать следующее

Предложение. Пусть M^n — гиперповерхность псевдоевклидова пространства E^{n+1}, реализующая заданную гамильтонову матрицу $v^i_j = (\nabla^i \nabla_j + \delta^i_j) h$, $\vec{n}$ — единичная нормаль к M^n, $\vec{r}$ — радиус-вектор. Тогда гамильтониан h представляется в виде скалярного произведения $h = (\vec{n}; \vec{r})$ и имеет смысл расстояния касательной плоскости гиперповерхности до начала координат.

Подчеркнем, что построенное соответствие между гамильтоновыми системами и гиперповерхностями в псевдоевклидовом пространстве позволяет рассматривать теорию поверхностей фактически как раздел гамильтонова формализма, т. е. как теорию систем гидродинамического типа, являющихся гамильтоновыми относительно нелокального оператора (7). Возникающие здесь аналогии могут оказаться полезными как в теории самих систем, так и в теории поверхностей. Перед тем как перейти к их более подробному обсуждению построим явную связь локального и нелокального гамильтоновых формализмов.

§ 3. СВЯЗЬ ЛОКАЛЬНОГО И НЕЛОКАЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

Локальный гамильтонов формализм имеет «физический» смысл — многие возникающие на практике системы гидродинамического типа оказываются гамильтоновыми в смысле § 1. Нелокальный гамильтонов формализм имеет дифференциально-геометрический смысл — согласно § 2, он реализуется на гиперповерхностях псевдоевклидова пространства. Несмотря на такое «содержательное» различие формальные свойства обоих гамильтоновых формализмов, как показывает сравнение результатов § 1 и § 2, достаточно похожи друг на друга. Оказывается, это сходство не случайно, и существует каноническое соответствие, сопоставляющее всякой гамильтоновой системе из § 1 некоторую гамильтонову систему § 2. Тем самым локальный гамильтонов формализм также приобретает дифференциально-геометрическую интерпретацию, которая может оказаться полезной при решении конкретных физических задач.

Преобразование, осуществляющее связь локального и нелокального гамильтонова формализма — это так называемое преобразование «по решению», относящееся к простейшим преобразованиям типа Беклунда. Стоит сказать в двух словах, что представляет собой эта конструкция в самом общем виде. Рассмотрим произвольную (не обязательно даже гамильтонову) систему гидродинамического типа $u_t^i = v_j^i(u) u_x^j$. Пусть $B(u)dx + A(u)dt$ и $N(u)dx + M(u)dt$ — два ее интеграла. Преобразованием по решению (мы следуем терминологии [11], С. 31; в зарубежной литературе — reciprocal transformation) называется переход от x, t к новым независимым переменным X, T по формулам

$$dX=B(u)\,dx+A(u)\,dt,\ dT=N(u)\,dx+M(u)\,dt.$$

Преобразованная система запишется в виде

$$u_T{}^i=V_j{}^i(u)\,u_X{}^j,$$

где преобразованная матрица V связана с исходной v дробно-линейной заменой

$$V=(Bv-AE)\,(ME-Nv)^{-1}$$

($E_j{}^i=\delta_j{}^i$ — единичная матрица). Термин «преобразование по решению» объясняется тем, что нелокальные переменные X, T явно зависят от решения, на котором они вычисляются. В самом общем виде преобразования по решению изучались автором в [13].

Если переменная t не меняется, т. е. $N\equiv 0$, $M\equiv 1$, то V вычисляется по формуле

$$V=Bv-AE \text{ или же } V_j{}^i=Bv_j{}^i-A\delta_j{}^i.$$

Рассмотрим теперь гамильтонову (в локальном смысле) систему (5), записанную в плоских координатах u^i:

$$u_t{}^i=\varepsilon_i h_{ij} u_x{}^j$$

и перейдем от x, t к новым независимым переменным X, T по формулам:

$$\begin{gathered} dX=\left(\sum_s \varepsilon_s\frac{(u^s)^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx+\left(\sum_s h_s u^s-h\right)dt,\\ dT=dt. \end{gathered}\tag{15}$$

Переменная t при этом не меняется, а X определяется предпоследним интегралом (6), к плотности которого добавлена $\frac{1}{2}$ (эта $\frac{1}{2}$ существенна для дальнейшего). Преобразованная система примет вид:

$$u_T^l=\left[\left(\sum_s \varepsilon_s\frac{(u^s)^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon_l h_{lj}-\left(\sum_s h_s u^s-h\right)\delta^l{}_j\right]u_X^j.$$

Вводя новый «гамильтониан» $\tilde h(u)=h(u)\Big/\left(\sum_s \varepsilon_s\frac{(u^s)^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$, мы, как показывает непосредственное вычисление, можем переписать получившиеся уравнения в виде

$$u_T^l=(\nabla^l\nabla_j+\delta_j^l)\,\tilde h u_X^j,$$

где ∇ — ковариантное дифференцирование в метрике (12):

$$\frac{\sum_s \varepsilon_s (du^s)^2}{\left(\sum_s \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Доказана следующая

Теорема 6. Всякая гамильтонова система $u_t^i = \varepsilon_i h_{ij} u_x^j$ с гамильтонианом $h(u)$, записанная в плоских координатах u^i, переходит после преобразования (15) в гамильтонову (уже в нелокальном смысле) систему $u_T^i = (\nabla^i \nabla_j + \delta_j^i) \tilde{h} u_X^j$ с гамильтонианом $\tilde{h}(u)$, связанным с $h(u)$ формулой $\tilde{h} = h \Big/ \left(\sum \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$.

Поскольку преобразование по решению очевидным образом обратимо, теорема 6 устанавливает каноническую связь локального и нелокального гамильтоновых формализмов.

Замечание 1. Несложно проверить, что преобразование (15) переводит набор интегралов (6) в соответствующий набор интегралов (14). Это доказывает, в частности, теорему 5 предыдущего параграфа.

Замечание 2. Преобразованию (15) можно придать определенный геометрический смысл. Посмотрим на сети собственных направлений исходной и преобразованной систем. Для исходной системы — это некоторая ортогональная сеть в псевдоевклидовом пространстве E^n с метрикой $\Sigma\, \varepsilon_s (du^s)^2$, для преобразованной — та же самая ортогональная сеть (преобразование по решению сохраняет сеть собственных направлений), но в метрике (12) постоянной кривизны 1, т. е. в метрике сферы. Связь этих двух сетей осуществляется при помощи стереографической проекции, которая ставит в соответствие точке $u^1, \ldots, u^n$ псевдоевклидова пространства E^n точку

$$\frac{u_1}{\sum \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}}, \ldots, \frac{u^n}{\sum \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sum \varepsilon_s \frac{(u^s)^2}{2} + \frac{1}{2}} - 1$$

единичной сферы S^n, лежащей в псевдоевклидовом пространстве E^{n+1} с метрикой $\Sigma \varepsilon_s (du^s)^2 + (dx^{n+1})^2$. Таким образом, преобразование (15), связывающее локальный гамильтонов формализм с нелокальным — это, в сущности, обыкновенная стереографическая проекция.

§ 4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОММУТИРУЮЩИХ ПОТОКОВ И МУЛЬТИГАМИЛЬТОНОВЫХ СТРУКТУР НА ЯЗЫКЕ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, «гамильтоновость» понимается в нелокальном смысле.) Пусть M^n — гиперповерхность псевдоевклидова пространства E^{n+1}, параметризованная координатами u^i, $v_j^i(u)$ — обратный ее оператору Вейнгартена, $u_t^i=v_j^i(u)u_x^j$ — соответствующая гамильтонова система гидродинамического типа. Согласно определению оператора Вейнгартена собственные направления и собственные числа матрицы v_j^i суть главные направления и радиусы главных кривизн гиперповерхности M^n.

В дальнейшем будем предполагать, что система $u_t^i=v_j^i(u)u_x^j$ допускает инварианты Римана, т. е. приводится в подходящих координатах R^i к диагональному виду

$$R_t^i=\lambda^i(R)R_x^i,\quad i=1,\ldots,n. \tag{16}$$

$\lambda^i(R)$ носят название характеристических скоростей системы (16). Легко видеть, что при $n=2$ приведение к инвариантам Римана возможно всегда — достаточно взять за R^i координаты вдоль собственных направлений матрицы v_j^i. При $n\geqslant 3$ это уже не так, поскольку сеть собственных направлений может оказаться неголономной. Ограничиваясь системами (16) в инвариантах Римана, мы тем самым ограничиваемся гиперповерхностями M^n с голономной сетью линий кривизны. С геометрической точки зрения R^i — координаты вдоль линий кривизны, а характеристические скорости $\lambda^i(R)$ — радиусы главных кривизн. Несмотря на целый ряд интересных свойств, гиперповерхности с голономной сетью линий кривизны изучены на настоящий момент явно недостаточно.

Согласно лемме 4 § 2 гамильтоновость системы (16) эквивалентна существованию диагональной метрики $\Sigma g_{ii}(dR^i)^2$ постоянной кривизны 1, такой, что

$$\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j-\lambda^i}=\partial_j\ln\sqrt{g_{ii}}. \tag{17}$$

Рассматривая (17) как переопределенную систему относительно g_{ii}, получим из требования совместности так называемые условия «полугамильтоновости» [16]:

$$\partial_k\left(\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j-\lambda^i}\right)=\partial_j\left(\frac{\partial_k\lambda^i}{\lambda^k-\lambda^i}\right),\quad i\neq j\neq k. \tag{18}$$

Коммутирующие потоки. Коммутирующими потоками системы (16) называются системы гидродинамического типа

$$R_s^i=w^i(R)R_x^i,\ i=1,\ldots,n,$$

характеристические скорости w^i которых связаны с λ^i соотношениями

$$\frac{\partial_j w^i}{w^j-w^i}=\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j-\lambda^i}\ \text{для любой пары}\ i\neq j. \tag{19}$$

(Коммутация потоков $R_t^i=\lambda^iR_x^i$ и $R_s^i=w^iR_x^i$ означает равенство смешанных производных $R_{ts}^i=R_{st}^i$, что в точности эквивалентно (19).) Несложно убедиться, что система (19) совместна (условиями совместности являются как раз соотношения (18)) и ее решения $w^i(R)$ существуют с произволом в n функций одного аргумента. Коммутирующие потоки также представляют собой гамильтоновы системы, причем, что существенно, с одной и той же метрикой $\Sigma g_{ii}(dR^i)^2$. Следовательно, каждому коммутирующему потоку отвечает гиперповерхность в E^{n+1}, для которой характеристические скорости w^i являются радиусами главных кривизн, а $\Sigma g_{ii}(dR^i)^2$ — третьей квадратичной формой. В пространстве E^{n+1} возникает таким образом целое семейство поверхностей, зависящих от n произвольных функций одного аргумента и параметризованных одними и теми же координатами R^i. Эта параметризация устанавливает между поверхностями соответствие, сохраняющее линии кривизны (поскольку R^i — координаты вдоль линий кривизны) и третью квадратичную форму (поскольку $\Sigma g_{ii}(dR^i)^2$ имеет смысл третьей квадратичной формы и одинакова для всех поверхностей семейства). Отсюда вытекает, что все эти гиперповерхности можно так расположить в пространстве, что в соответствующих точках (т. е. точках с одинаковыми координатами R^i) будут совпадать подвижные реперы, векторы которых направлены по нормали и вдоль главных направлений. Следовательно, все эти гиперповерхности имеют одно и то же сферическое изображение линий кривизны. (Семейства поверхностей в E^3 с одинаковым сферическим изображением линий кривизны возникали у Д. Ф. Егорова [8] при изучении потенциальных 3-ортогональных систем координат; см. также § 6 настоящей работы.)

Замечание. Уравнения (19) на коммутирующие потоки w^i являются линейными. Несложно показать, что сложению двух решений (19) отвечает сложение гиперповерхностей в E^{n+1}, т. е. обычное сложение их радиус-векторов в соответствующих точках.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 7. Коммутирующим гамильтоновым потокам отвечают гиперповерхности в E^{n+1}, между которыми установлено соответствие, сохраняющее главные направления и третью квадратичную форму. Можно считать при этом, что главные подвижные реперы в соответствующих точках также совпадают. Все эти гиперповерхности имеют одинаковое сферическое изображение линий кривизны. Характеристические скорости коммутирующих потоков — радиусы кривизны соответствующих гиперповерхностей. Сложению коммутирующих потоков отвечает сложение радиус-векторов.

Замечание 1. Рассмотрение гиперповерхностей с одинаковым сферическим изображением линий кривизны представляется естественным по целому ряду причин. Дело в том, что многие свойства гиперповерхности (например, свойство допускать нетривиальные деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн, см. § 6) зависят не от самой гиперповерхности, а от сферического изображения ее линий кривизны.

Замечание 2. В теории интегрируемых эволюционных уравнений типа Кортевега—де Фриза (КдФ) известна конструкция, сопоставляющая коммутирующим потокам (например, высшим КдФ) алгебраические римановы поверхности. При этом решения, получающиеся ограничением КдФ на стационарные точки коммутирующих потоков, выписываются через θ-функции соответствующих римановых поверхностей. Построенное выше соответствие

(коммутирующий поток) $\leftrightarrow$ (гиперповерхность в E^{n+1})

можно рассматривать формально как аналог соответствия

(высшее КдФ) $\leftrightarrow$ (риманова поверхность).

Сама гиперповерхность является при этом дифференциально-геометрическим аналогом римановой поверхности (заметим, что на любой двумерной поверхности можно ввести комплексную структуру при помощи изотермических координат). Содержательность такой интерпретации требует, разумеется, специального обоснования. Главное, что пока неясно — в чем должен состоять правильный дифференциально-геометрический аналог θ-функций?

Мультигамильтоновы структуры. Нелокальной гамильтоновой структурой системы (16) будем называть метрику $\Sigma g_{ii}(dR^i)^2$ постоянной кривизны 1, удовлетворяющую условию (17) (это определение будет несколько уточнено в дальнейшем). Как правило, гамильтонова структура бывает только одна. Эта единственность — своеобразное условие «жесткости» соответствующей гиперповерхности M^n. В самом деле, наличие еще одной нелокальной гамильтоновой структуры означало бы существование гиперповерхности $\tilde{M}^n$, геометрически отличной от M^n, но с тем же самым оператором Вейнгартена, или же, на геометрическом языке, существование у M^n нетривиальной деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн. Таким образом, различные гамильтоновы структуры системы (16) «параметризуются» деформациями соответствующей гиперповерхности M^n, сохраняющими главные направления и главные кривизны.

Для того чтобы более ясно представлять себе произвол в существовании таких деформаций, а также их внутреннюю структуру, мы ограничимся системами (16) из двух уравнений. Это ограничение никак не отражается на сути дела и принято лишь для того, чтобы сделать все промежуточные выкладки по возможности более прозрачными. Итак, рассматриваются системы

$$\begin{aligned} R_t^1 &= \lambda^1(R)R_x^1, \\ R_t^2 &= \lambda^2(R)R_x^2. \end{aligned} \tag{20}$$

В дальнейшем удобно пользоваться обозначениями

$$\frac{\partial_2\lambda^1}{\lambda^2-\lambda^1}=a, \quad \frac{\partial_1\lambda^2}{\lambda^1-\lambda^2}=b.$$

Пусть $g_{11}(dR^1)^2+g_{22}(dR^2)^2$ — нелокальная гамильтонова структура системы (20), т. е. метрика постоянной кривизны 1, для которой выполнено (17). Основное наблюдение состоит в том, что соотношения на метрику становятся линейными, если ввести обратные величины g^{11}, g^{22} с верхними индексами: $g^{11}=1/g_{11}$, $g^{22}=1/g_{22}$. Они примут вид

$$\begin{gathered}\partial_2 g^{11}=-2ag^{11},\ \partial_1 g^{22}=-2bg^{22},\\ (\partial_2 a+a^2)g^{22}+\frac{a}{2}\partial_2 g^{22}+(\partial_1 b+b^2)g^{11}+\frac{b}{2}\partial_1 g^{11}=-1.\end{gathered} \tag{21}$$

(Первые два условия получаются из (17). Последнее равносильно тому, что кривизна метрики равна 1.) Здесь уместно несколько уточнить понятие гамильтоновой структуры, а именно, будем называть нелокальной гамильтоновой структурой не саму метрику $g_{11}(dR^1)^2+g_{22}(dR^2)^2$, а набор обратных величин g^{11}, g^{22} с верхними индексами, удовлетворяющих (21). В силу линейности (21) по g^{11}, g^{22} это позволит говорить в дальнейшем о «сумме» гамильтоновых структур, о максимальном числе «линейно независимых» гамильтоновых структур и т. д.

Поскольку уравнения (21) на g^{11}, g^{22} являются линейными неоднородными, всякое их решение получается из какого-либо одного (например, из исходной нелокальной гамильтоновой структуры) добавлением общего решения соответствующей однородной системы

$$\begin{gathered}\partial_2 g^{11}=-2ag^{11},\ \partial_1 g^{22}=-2bg^{22},\\ (\partial_2 a+a^2)g^{22}+\frac{a}{2}\partial_2 g^{22}+(\partial_1 b+b^2)g^{11}+\frac{b}{2}\partial_1 g^{11}=0.\end{gathered} \tag{22}$$

Эта однородная система имеет и самостоятельный смысл — она описывает локальные гамильтоновы структуры системы (20). В самом деле, если g^{11}, g^{22} — решение (22), то метрика $g_{11}(dR^1)^2+g_{22}(dR^2)^2$ удовлетворяет всем условиям леммы 2 § 1 и, следовательно, определяет локальную гамильтонову структуру системы (20).

Замечание. В дальнейшем удобно считать, что система, которая гамильтонова в нелокальном смысле, имеет только одну «существенно нелокальную» гамильтонову структуру, а все остальные структуры (если они, конечно, существуют) — локальные. При этом «общая» нелокальная структура получается из какой-либо одной добавлением произвольной локальной структуры.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 8. 1. Локальные гамильтоновы структуры системы (20) описываются линейными однородными уравнениями (22) и образуют линейное пространство размерности r (r называют иногда «числом» локальных гамильтоновых структур).

2. Нелокальные гамильтоновы структуры системы (20) описываются линейными неоднородными уравнениями (21) и образуют аффинное пространство. Всякая нелокальная гамильтонова структура получается из какой-либо одной добавлением произвольной локальной структуры.

3. Гамильтонова в нелокальном смысле система (20) имеет r дополнительных локальных гамильтоновых структур тогда и только тогда, когда соответствующая ей поверхность M^2 в E^3 допускает r-параметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн.

Таким образом, нетривиальные деформации поверхности M^2 с сохранением главных направлений и главных кривизн параметризуются локальными гамильтоновыми структурами системы (20).

Замечание 1. Предположение, что число уравнений системы равно двум, не является существенным. Единственное, что изменится в общем случае — это явный вид уравнений (21), (22), которые станут более громоздкими (но тем не менее линейными по g^{ii} с верхними индексами!).

Замечание 2. Всюду в этом параграфе мы рассматривали системы в инвариантах Римана и отвечающие им гиперповерхности с голономной сетью линий кривизны. Что произойдет, если отказаться от требования голономности? Предположим для определенности, что число уравнений системы равно трем. Как было показано С. П. Царевым [17], гамильтонова система из трех уравнений либо полностью диагонализуется, либо не имеет ни одного инварианта Римана. (На геометрическом языке этот любопытный факт отмечался Ю. А. Аминовым [1]: главные направления трехмерной гиперповерхности M^3 в E^4 либо одновременно голономны, либо одновременно неголономны.) Согласно [17], недиагонализуемая система может иметь только одну гамильтонову структуру. Кроме того, недиагонализуемая система не имеет нетривиальных коммутирующих потоков. На геометрическом языке это означает, что гиперповерхность M^3 с неголономной сетью линий кривизны заведомо не допускает нетривиальных деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн, а также нетривиальных деформаций с сохранением сферического изображения линий кривизны. Таким образом, принятое в этом параграфе предположение о существовании инвариантов Римана является существенным.

Задача описания поверхностей M^2 в E^3, допускающих r-параметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн, это не что иное как описание систем (20), имеющих 1 нелокальную и r локальных гамильтоновых структур. При естественных ограничениях $a \neq 0$, $b \neq 0$ максимально возможное значение r оказывается равным трем. В § 6 дано полное описание поверхностей, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн. Вспомогательным результатом (который имеет и самостоятельный интерес) является при этом описание в § 5 систем (20), имеющих ровно 3 локальные гамильтоновы структуры. Оказалось, что с точностью до некоторых естественных преобразований, сохраняющих гамильтоновость, все сводится к уравнениям газовой динамики. Любопытно, что далеко не все системы с тремя локальными гамильтоновыми структурами допускают дополнительную нелокальную.

§ 5. ОПИСАНИЕ ТРИ-ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ИЗ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

(Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, речь идет о гамильтоновости в локальном смысле.)

Мультигамильтоновы системы двух дифференциальных уравнений гидродинамического типа

$$R_t^1 = \lambda^1(R) R_x^1,$$
$$R_t^2 = \lambda^2(R) R_x^2$$

привлекали внимание целого ряда авторов (см., например, [28], [29] и ссылки в них). Основное наблюдение [29] состояло в том, что уравнения

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0,$$
$$u_t + uu_x + \gamma\rho^{\gamma-2}\rho_x = 0,$$

описывающие одномерное нестационарное течение политропного газа (u — скорость течения, ρ — плотность, γ — показатель политропы), имеют при любом γ ровно три локальные гамильтоновы структуры. Строго говоря, примеры три-гамильтоновых систем были известны и ранее, см., например, [26], где явно выписаны 3 гамильтоновы структуры уравнений длинных волн при наличии дисперсии. Соответствующая гидродинамическая система имеет, однако, не первый, а второй порядок относительно производных по x и формально выходит за рамки нашей темы.

Цель этого параграфа — дать полное описание класса три-гамильтоновых систем. Оказывается, что в определенном смысле все сводится к уравнениям газовой динамики. Перед тем как перейти к непосредственным вычислениям, заметим, что три-гамильтонова система остается три-гамильтоновой в результате каждого из следующих преобразований:

1. Обращение системы, т. е. переход от уравнений $R_t^i = \lambda^i(R)R_x^i$ к уравнениям $R_x^i = 1/\lambda^i(R)R_t^i$ с обратными характеристическими скоростями $1/\lambda^i$. Всякой гамильтоновой структуре g^{11}, g^{22} исходной системы отвечает при этом гамильтонова структура $g^{11}/(\lambda^1)^2$, $g^{22}/(\lambda^2)^2$ обращенной. Сохранение гамильтоновости при боращении — факт достаточно общего характера, установленный в [16] (см. также [18]). Он верен для любой гамильтоновой системы гидродинамического типа. Речь идет, разумеется, о локальном гамильтоновом формализме. Нелокальный гамильтонов формализм, в отличие от локального, не выдерживает обращения.

2. Переход от исходной системы $R_t^i = \lambda^i(R)R_x^i$ к коммутирующему с ней потоку $R_s^i = w^i(R)R_x^i$. Гамильтоновы структуры при этом попросту не меняются.

Применяя к произвольной три-гамильтоновой системе преобразования 1, 2, получим ее «класс эквивалентности», целиком состоящий из три-гамильтоновых систем. Естественно ожидать поэтому, что условия существования трех гамильтоновых структур должны быть условиями на объекты, которые не меняются при этих преобразованиях.

Теорема 9. Следующие объекты в плоскости годографа (R^1, R^2) произвольной (не обязательно даже гамильтоновой) системы $R_t^1 = \lambda^1(R)R_x^1$, $R_t^2 = \lambda^2(R)R_x^2$ сохраняются при любых преобразованиях 1, 2:

— дифференциальная 2-форма $\omega = ab\,dR^1 \wedge dR^2$;

— дифференциальная 2-форма

$$\Omega = (\partial_1\partial_2 \ln a + 2\partial_1 a - \partial_1\partial_2 \ln b - 2\partial_2 b)\,dR^1 \wedge dR^2.$$

(Здесь, согласно введенным ранее обозначениям, $a = \frac{\partial_2\lambda^1}{\lambda^2 - \lambda^1}$, $b = \frac{\partial_1\lambda^2}{\lambda^1 - \lambda^2}$).

Замечание 1. Инвариантность форм ω и Ω относительно преобразований 1, 2 проверяется непосредственно. Менее очевидно, что построенный набор сохраняющихся объектов является полным — если две системы имеют в подходящих инвариантах Римана R^1, R^2 одинаковые формы ω и Ω, можно утверждать, что они связаны последовательностью преобразований 1, 2, т. е. принадлежат одному классу эквивалентности (вопрос о том, как строить искомую последовательность преобразований, мы здесь не обсуждаем).

Замечание 2. Аналогичные формы могут быть выписаны и для систем из большего числа уравнений, однако эта задача выходит за рамки настоящей работы.

Оказывается, что классы эквивалентности три-гамильтоновых систем образуют однопараметрическое семейство и фактически параметризуются уравнениями газовой динамики с различными показателями политропы γ. Для доказательства этого утверждения исследуем на совместность переопределенную систему (22), для чего введем новую переменную p такую, что:

$$(\partial_2 a + a^2) g^{22} + \frac{a}{2} \partial_2 g^{22} = p,$$

$$(\partial_1 b + b^2) g^{11} + \frac{b}{2} \partial_1 g^{11} = -p.$$

Уравнения (22) перепишутся в виде

$$\begin{cases} \partial_1 g^{11} = -2\left(\frac{\partial_1 b}{b} + b\right) g^{11} - \frac{2p}{b}, \\ \partial_2 g^{11} = -2a g^{11}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_1 g^{22} = -2b g^{22} \\ \partial_2 g^{22} = -2\left(\frac{\partial_2 a}{a} + a\right) g^{22} + \frac{2p}{a}. \end{cases}$$

Из условий равенства смешанных производных $\partial_1\partial_2 g^{11} = \partial_2\partial_1 g^{11}$ и $\partial_1\partial_2 g^{22} = \partial_2\partial_1 g^{22}$ получим следующие выражения для $\partial_1 p$, $\partial_2 p$:

$$\partial_1 p = \left(\frac{\partial_1 a}{a} - 2b\right) p + g^{22} a (\partial_1 \partial_2 \ln a + \partial_1 a - \partial_2 b),$$

$$\partial_2 p = \left(\frac{\partial_2 b}{b} - 2a\right) p + g^{11} b (-\partial_1 \partial_2 \ln b + \partial_1 a - \partial_2 b).$$

Система замкнулась и содержит 3 свободных параметра g^{11}, g^{22}, p. Для того чтобы произвол в ее решениях был действительно равен трем, необходимо и достаточно, чтобы условие $\partial_1\partial_2 p = \partial_2\partial_1 p$ было выполнено тождественно по g^{11}, g^{22}, p, т. е. не накладывало на них никаких дополнительных соотношений. Непосредственные вычисления показывают, что это происходит в том и только том случае, если a и b удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\partial_1\partial_2 \ln a + \partial_1 a - \partial_2 b = \nu ab, \\ &\partial_1\partial_2 \ln b + \partial_2 b - \partial_1 a = \nu ab, \end{aligned} \tag{23}$$

где ν — произвольная постоянная. Складывая их, получим уравнение Лиувилля

$$\partial_1\partial_2 \ln ab = 2\nu ab,$$

общее решение которого, как известно, имеет вид

$$ab = -\frac{1}{\nu} \frac{\varphi'(R^1)\psi'(R^2)}{(\varphi(R^1) - \psi(R^2))^2},$$

где $\varphi(R^1)$, $\psi(R^2)$ — две произвольные функции своих аргументов. Переходя к новым инвариантам Римана $\tilde{R}^1 = \varphi(R^1)$, $\tilde{R}^2 = \psi(R^2)$, получим для 2-формы $\omega = ab\, dR^1 \wedge dR^2$ каноническое выражение

$$\omega = -\frac{1}{\nu} \frac{d\tilde{R}^1 \wedge d\tilde{R}^2}{(\tilde{R}^1 - \tilde{R}^2)^2}.$$

Вычитая соотношения (23) одно из другого, получим условие $\Omega = 0$. Поскольку любые две системы с одинаковыми ω и Ω

сводятся друг к другу преобразованиями 1, 2, можно утверждать, что разные классы эквивалентности три-гамильтоновых систем характеризуются разными значениями параметра ν. Для завершения описания три-гамильтоновых систем осталось указать по представителю из каждого класса эквивалентности.

Записывая газовую динамику при $\gamma\neq 1$ в инвариантах Римана

$$R^1=u+\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}},\quad R^2=u-\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}},$$

получим:

$$R_t^1=-\left(\frac{\gamma+1}{4}R^1+\frac{3-\gamma}{4}R^2\right)R_x^1,$$

$$R_t^2=-\left(\frac{\gamma+1}{4}R^2+\frac{3-\gamma}{4}R^1\right)R_x^2.$$

Непосредственные вычисления ω и Ω дают:

$$\omega=-\frac{1}{4}\left(\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\right)^2\frac{dR^1\wedge dR^2}{(R^1-R^2)^2},\quad \Omega=0.$$

При $\nu>0$ в каждом классе эквивалентности имеется, таким образом, система уравнений газовой динамики с показателем γ, для которого $\left(\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\right)^2=\frac{4}{\nu}$ (строго говоря, при любом $\nu>0$ это уравнение имеет два различных решения, поскольку газовая динамика с показателями γ и $\tilde{\gamma}=2-\frac{1}{\gamma-2}$ принадлежит одному классу эквивалентности). Если $\nu<0$, параметризация классов эквивалентности уравнениями газовой динамики уже не проходит. В качестве представителей можно взять, например, системы

$$R_t^1=-\exp\left(4\alpha\,\mathrm{arctg}\sqrt{-R^1/R^2}\right)R_x^1,$$

$$R_t^2=\exp\left(4\alpha\,\mathrm{arctg}\sqrt{-R^1/R^2}\right)R_x^2$$

($R^1<0<R^2$), для которых, как несложно проверить,

$$\omega=\alpha^2\frac{dR^1\wedge dR^2}{(R^1-R^2)^2},\quad \Omega=0.$$

Значение параметра α следует положить равным $1/\sqrt{\nu}$. Автору неизвестно, можно ли при $\nu<0$ выбрать представителей, которые бы имели самостоятельный физический смысл, подобно уравнениям газовой динамики.

Осталось исследовать случай $\nu=0$. В этом случае ω и Ω после подходящего выбора инвариантов Римана приводятся к виду

$$\omega=-\frac{1}{16}dR^1\wedge dR^2,\quad \Omega=0,$$

и в качестве представителя можно взять систему

$$R_t^1 = -\left(\frac{R^1+R^2}{2}+1\right)R_x^1,$$

$$R_t^2 = -\left(\frac{R^1+R^2}{2}-1\right)R_x^2.$$

Эта система — не что иное как уравнения газовой динамики с показателем политропы $\gamma=1$, записанные в инвариантах Римана $R^1=u+\ln\rho$, $R^2=u-\ln\rho$. Заметим, что при $\nu=0$ вид формы ω существенно иной, нежели при $\nu\neq0$. Это лишний раз указывает на исключительность газовой динамики с $\gamma=1$. Таким образом, имеет место

Теорема 10. Три-гамильтоновы системы разбиваются на классы эквивалентности K_ν, характеризующиеся следующими выражениями 2-форм ω и Ω:

$$\nu\neq0:\ \omega=-\frac{1}{\nu}\frac{dR^1\wedge dR^2}{(R^1-R^2)^2},\ \Omega=0,$$

$$\nu=0:\ \omega=-\frac{1}{16}dR^1\wedge dR^2,\ \Omega=0.$$

При $\nu>0$ все системы из класса K_ν сводятся преобразованиями 1, 2 к газовой динамике с показателем политропы $\gamma=\frac{3+2/\sqrt{\nu}}{1+2/\sqrt{\nu}}$. При $\nu=0$ все системы из класса K_0 сводятся к газовой динамике с показателем политропы $\gamma=1$. При $\nu<0$ все системы из класса K_ν сводятся к системам вида

$$R_t^1=-\exp\left(4\alpha\operatorname{arctg}\sqrt{-R^1/R^2}\right)R_x^1,$$

$$R_t^2=\exp\left(4\alpha\operatorname{arctg}\sqrt{-R^1/R^2}\right)R_x^2.$$

Имея полное описание три-гамильтоновых систем, уже не так сложно выделить среди них те, которые, помимо трех локальных, имеют одну нелокальную гамильтонову структуру. Как отмечалось в § 4, это в точности эквивалентно описанию поверхностей в E^3, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн. Оказывается, что наличие дополнительной нелокальной структуры существенно зависит от значения параметра ν и возможно лишь при $\nu=1$ и $\nu=4$ (что отвечает показателям политропы $\gamma=5/3$ и $\gamma=2$). Любопытно, что даже в классах K_1 и K_4 дополнительная нелокальная структура существует не у всех систем. Исследование этих вопросов является задачей следующего параграфа.

§ 6. ОПИСАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^3, ДОПУСКАЮЩИХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ДЕФОРМАЦИЙ С СОХРАНЕНИЕМ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ГЛАВНЫХ КРИВИЗН

Изучение различного рода деформаций поверхностей трехмерного евклидова пространства — раздел классической дифференциальной геометрии, уже более ста лет привлекающий к себе внимание геометров. Поскольку задача описания поверхностей, допускающих деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн, естественным образом примыкает к этой тематике, имеет смысл начать с краткого обзора близких по постановке задач. В большинстве из них априори предполагается, что деформация является изгибанием, т. е. сохраняет первую квадратичную форму поверхности. В окрестности точки общего положения любая поверхность допускает изгибание (речь идет, разумеется, об изгибании в малом), поэтому для того чтобы задача стала нетривиальной, обычно накладывают дополнительные ограничения:

1. **Изгибание с сохранением главных направлений.** Еще в прошлом веке Бонне [20] было получено полное описание поверхностей этого класса — ими оказались так называемые резные поверхности (molding surfaces). Всякая резная поверхность допускает однопараметрическое семейство изгибаний с сохранением главных направлений (см. также [22], С. 274—284, где тот же результат был получен методом Картана). Естественное обобщение этой задачи, известное как изгибание на главном основании (т. е. изгибание с сохранением некоторой сопряженной системы линий), получило дальнейшее развитие у С. П. Финикова [14].

2. **Изгибание с сохранением главных кривизн.** Первый результат в этом направлении также принадлежит Бонне [19]: всякая поверхность постоянной средней кривизны $H=\mathrm{const}$ допускает однопараметрическое изгибание с сохранением главных кривизн. Дальнейшее продвижение было получено Черном [25], который до конца исследовал произвол в существовании таких поверхностей. Оказалось, что при $H\neq\mathrm{const}$ существует ровно 6-параметрическое семейство поверхностей, допускающих изгибание с сохранением главных кривизн. Все они являются поверхностями Вейнгартена и обладают целым рядом интересных свойств. Изучение этого шестипараметрического семейства было продолжено в [24], где удалось в каком-то смысле явно «проинтегрировать» уравнения, задающие эти поверхности. Заметим, что существенно раньше поверхности, допускающие изгибание с сохранением главных кривизн, рассматривались С. В. Бахваловым [2]. Эта работа, по-видимому, осталась незамеченной авторами [24], [25].

Ряд интересных задач возникает также при изучении деформаций, которые не являются изгибаниями.

3. **BII- и BIII-деформации.** Так в [30] были названы деформации поверхности в E^3, которые сохраняют главные кривизны и, соответственно, вторую или третью квадратичную форму (BI-деформации — это рассмотренные выше изгибания с сохранением главных кривизн). Среди простейших примеров BIII-поверхностей — поверхности с $H/K=\mathrm{const}$, где K — гауссова кривизна. Имеются также некоторые примеры BII-поверхностей. Тем не менее какое-либо простое и наглядное описание этих классов на настоящий момент отсутствует.

4. **Деформации с сохранением главных направлений и третьей квадратичной формы.** Эти деформации возникали в § 4 настоящей работы (разумеется, их рассматривали и ранее — см., например, [8]). Эквивалентно они могут быть определены как деформации, сохраняющие сферическое изображение сети линий кривизны, или же как деформации, сохраняющие основной трехгранник поверхности, векторы которого направлены по нормали и вдоль главных направлений. Задача описания таких деформаций в E^3 является тривиальной, поскольку у всякой поверхности они существуют с одинаковым произволом в 2 функции одного аргумента. (В многомерном пространстве E^{n+1} ситуация несколько иная — гиперповерхности M^n с голономной сетью линий кривизны и только они допускают такие деформации с произволом в n функций одного аргумента.)

5. **Деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн (т. е. с сохранением оператора Вейнгартена).** Несмотря на огромное число работ по теории поверхностей эта задача никем, по-видимому, не рассматривалась. В настоящем параграфе получено полное описание поверхностей в E^3, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн (простейшие примеры — это квадрики и циклиды Дюпена). Описание поверхностей, которые бы допускали дву- или однопараметрическое семейство таких деформаций, требует более серьезного исследования и выходит за рамки настоящей работы.

Любопытно, что задачи 1—5, несмотря на похожие по сути своей формулировки, приводят к существенно различным классам поверхностей. Различно и число параметров, от которых зависят соответствующие деформации.

Напомним некоторые необходимые формулы. Пусть M^2 — поверхность в E^3, отнесенная к координатам R^1, R^2 линий кривизны, $\lambda^1(R)$ и $\lambda^2(R)$ — радиусы главных кривизн. В координатах R^i первая, вторая и третья квадратичные формы поверхности примут вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}&=(\lambda^1)^2 g_{11}(dR^1)^2+(\lambda^2)^2 g_{22}(dR^2)^2,\\ \mathrm{II}&=\lambda^1 g_{11}(dR^1)^2+\lambda^2 g_{22}(dR^2)^2,\\ \mathrm{III}&=g_{11}(dR^1)^2+g_{22}(dR^2)^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Соотношения Гаусса—Петерсона—Кодацци для поверхности M^2 удобно переписать в терминах λ^1, λ^2 и $g^{11}=1/g_{11}$, $g^{22}=1/g_{22}$. Дело в том, что они оказываются линейными по g^{11}, g^{22} с верхними индексами (см. формулы (21) § 4):

$$\partial_2 g^{11}=-2ag^{11},\quad \partial_1 g^{22}=-2bg^{22},$$

$$(\partial_2 a+a^2)\,g^{22}+\frac{a}{2}\,\partial_2 g^{22}+(\partial_1 b+b^2)\,g^{11}+\frac{b}{2}\,\partial_1 g^{11}=-1.$$

Анализ совместности этой системы проводится вполне аналогично тому, как это делалось в § 5 для уравнений (22). Введем новую переменную p такую, что

$$(\partial_1 b+b^2)\,g^{11}+\frac{b}{2}\,\partial_1 g^{11}=-p-\frac{1}{2},$$

$$(\partial_2 a+a^2)\,g^{22}+\frac{a}{2}\,\partial_2 g^{22}=p-\frac{1}{2}.$$

В результате (всюду в дальнейшем предполагается $a\neq 0$, $b\neq 0$)

$$\begin{cases}\partial_1 g^{11}=-2\left(\dfrac{\partial_1 b}{b}+b\right)g^{11}-\dfrac{2p+1}{b},\\ \partial_2 g^{11}=-2ag^{11},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\partial_1 g^{22}=-2bg^{22},\\ \partial_2 g^{22}=-2\left(\dfrac{\partial_2 a}{a}+a\right)g^{22}+\dfrac{2p-1}{a}.\end{cases} \qquad (25)$$

Из условий равенства смешанных производных $\partial_1\partial_2 g^{11}=\partial_2\partial_1 g^{11}$ и $\partial_1\partial_2 g^{22}=\partial_2\partial_1 g^{22}$ получим следующие выражения для $\partial_1 p$, $\partial_2 p$:

$$\partial_1 p=\left(\frac{\partial_1 a}{a}-2b\right)p+a\,(\partial_1\partial_2\ln a+\partial_1 a-\partial_2 b)\,g^{22}+b-\frac{\partial_1 a}{2a}, \qquad (26)$$

$$\partial_2 p=\left(\frac{\partial_2 b}{b}-2a\right)p+b\,(-\partial_1\partial_2\ln b+\partial_1 a-\partial_2 b)\,g^{11}-a+\frac{\partial_2 b}{2b}.$$

Система замкнулась и содержит 3 свободных параметра g^{11}, g^{22}, p. Из этого следует, что при $a\neq 0$, $b\neq 0$ деформации, сохраняющие главные направления и главные кривизны, могут зависеть не более чем от трех существенных параметров. Этот произвол действительно равен трем в том и только том случае, если условие совместности $\partial_1\partial_2 p=\partial_2\partial_1 p$ выполнено тождественно по g^{11}, g^{22}, p. Расписывая выражение $\partial_1\partial_2 p-\partial_2\partial_1 p$ и приравнивая нулю коэффициенты при g^{11}, g^{22}, p, а также свободный член, получим:

$$\partial_1\partial_2\ln a+\partial_1 a-\partial_2 b=\nu ab,$$

$$\partial_1\partial_2\ln b+\partial_2 b-\partial_1 a=\nu ab, \qquad (27)$$

$$\left(\frac{\partial_1 a}{a}-b\right)\left(\frac{\partial_2 b}{b}-a\right)=3\,(\nu-1)\,ab,$$

где ν — произвольная постоянная. Таким образом, описание поверхностей в E^3, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн, свелось к исследованию переопределенной системы (27). При этом со всяким решением a, b системы (27) связана на самом деле не одна поверхность, а целое семейство поверхностей, радиусы кривизны которых определяются уравнениями

$$\frac{\partial_2\lambda^1}{\lambda^2-\lambda^1}=a, \quad \frac{\partial_1\lambda^2}{\lambda^1-\lambda^2}=b.$$

Все эти поверхности находятся в соответствии, сохраняющем сферическое изображение сети линий кривизны, и одновременно допускают трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн. Другими словами, наличие деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн — свойство не самой поверхности, а сферического изображения линий ее кривизны. Это наблюдение имеет общий характер и верно не только в E^3.

Предложение. Всякие две гиперповерхности в псевдоевклидовом пространстве, имеющие одинаковое сферическое изображение сети линий кривизны, одновременно допускают или не допускают деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн. Число параметров, от которых зависят такие деформации, также одинаково для обеих поверхностей.

Замечание. На языке систем гидродинамического типа (см. § 4) поверхности с одинаковым сферическим изображением линий кривизны отвечают коммутирующим потокам, а деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн — различным гамильтоновым структурам. Сформулированное выше предложение превращается в следующее очевидное утверждение: коммутирующие потоки имеют одинаковые гамильтоновы структуры.

При анализе на совместность системы (27) случаи $\nu\neq1$ и $\nu=1$ удобно рассматривать отдельно.

$\nu\neq1$. Используя третье соотношение (27), введем вспомогательную переменную μ такую, что

$$\partial_1 a/a-b=3(\nu-1)b\mu, \tag{28}$$

$$\partial_2 b/b-a=a/\mu. \tag{29}$$

(Эти соотношения, переписанные в виде $\partial_1 a=ab(3(\nu-1)\mu+1)$, $\partial_2 b=ab(1+1/\mu)$, используются в дальнейшем всюду, где в процессе вычислений появляются $\partial_1 a$ или $\partial_2 b$.) Применяя к (28) оператор ∂_2, а к (29) ∂_1, получим с учетом (27) следующие выражения для $\partial_1\mu$, $\partial_2\mu$:

$$\partial_1\mu=2b(\nu-1)\mu^2+2b\mu, \tag{30}$$

$$\partial_2\mu=-2a\mu-\frac{2}{3}a. \tag{31}$$

Условие совместности $\partial_1\partial_2\mu=\partial_2\partial_1\mu$ приводит, как показывает непосредственное вычисление, к квадратному уравнению относительно μ с постоянными коэффициентами, откуда с необходимостью вытекает, что $\mu=\mathrm{const}$. Подставляя $\mu=\mathrm{const}$ в (31), получим $\mu=-\frac{1}{3}$. Подставляя $\mu=-\frac{1}{3}$ в (30), получим $\nu=4$. Итак, в случае $\nu\neq 1$ имеется единственная возможность $\nu=4$ и соотношения (27), (28), (29) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} &\partial_1\partial_2 \ln a+\partial_1 a-\partial_2 b=4ab,\\ &\partial_1\partial_2 \ln b+\partial_2 b-\partial_1 a=4ab,\\ &\partial_1 a=-2ab,\\ &\partial_2 b=-2ab. \end{aligned} \tag{32}$$

Складывая первые два из них, получим уравнение Лиувилля

$$\partial_1\partial_2 \ln ab=8ab,$$

общее решение которого имеет вид:

$$ab=-\frac{1}{4}\frac{\varphi'(R^1)\,\psi'(R^2)}{(\varphi(R^1)-\psi(R^2))^2},$$

где $\varphi(R^1)$, $\psi(R^2)$ — произвольные функции своих аргументов. Переходя к новым параметрам линий кривизны $\tilde{R}^1=\varphi(R^1)$, $\tilde{R}^2=\psi(R^2)$, получим

$$ab=-\frac{1}{4(\tilde{R}^1-\tilde{R}^2)^2}.$$

(В дальнейшем, чтобы не вводить новых обозначений, будем считать $\tilde{R}^1\equiv R^1$, $\tilde{R}^2\equiv R^2$.) Полагая

$$a=\frac{f}{2(R^2-R^1)},\qquad b=\frac{1/f}{2(R^1-R^2)},$$

получим из последних двух соотношений (31) следующие уравнения на f:

$$\partial_1 f=\frac{f-1}{R^1-R^2},\qquad \partial_2 f=\frac{f(f-1)}{R^2-R^1},$$

общее решение которых $f=(R^1-\alpha)/(R^2-\alpha)$. Поскольку постоянная α убирается сдвигом системы координат, имеем окончательные выражения для a, b:

$$a=\frac{R^1}{2R^2(R^2-R^1)},\qquad b=\frac{R^2}{2R^1(R^1-R^2)}.$$

Таким образом, в случае $\nu\neq 1$ решение a, b системы (27) единственно. Все поверхности с данными a, b имеют одинаковое сферическое изображение линий кривизны. Радиусы их главных кривизн определяются уравнениями

$$\frac{\partial_2\lambda^1}{\lambda^2-\lambda^1}=\frac{R^1}{2R^2(R^2-R^1)},\quad \frac{\partial_1\lambda^2}{\lambda^1-\lambda^2}=\frac{R^2}{2R^1(R^1-R^2)}.$$

Рассмотрим частное решение $\lambda^1=R^1\sqrt{R^1R^2}$, $\lambda^2=R^2\sqrt{R^1R^2}$. Для того чтобы построить трехпараметрическое семейство поверхностей, имеющих данные λ^1, λ^2 в качестве радиусов кривизны, нужно сделать следующее:

1. Найти g^{11}, g^{22} из (25), (26). Эти уравнения заведомо совместны и определят g^{11}, g^{22} с трехпараметрическим произволом.

2. Выписать основные квадратичные формы (24) соответствующего трехпараметрического семейства поверхностей.

3. Найти уравнения этих поверхностей, т. е. построить их явную реализацию в E^3.

Хотя перечисленные шаги теоретически не составляют труда, они приводят к достаточно громоздким вычислениям. Приведем окончательный ответ.

Пусть x, y, z — декартовы координаты в E^3. Рассмотрим трехпараметрическое семейство поверхностей

$$x=\sqrt{\frac{(R^1-1/\alpha)(R^2-1/\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}},\quad y=\sqrt{\frac{(R^1-1/\beta)(R^2-1/\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}},$$

$$z=\sqrt{\frac{(R^1-1/\gamma)(R^2-1/\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}},\tag{33}$$

где α, β, γ — произвольные постоянные. Компоненты единичной нормали имеют вид:

$$n^1=\sqrt{\frac{(\alpha-1/R^1)(\alpha-1/R^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}},\quad n^2=\sqrt{\frac{(\beta-1/R^1)(\beta-1/R^2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}},$$

$$n^3=\sqrt{\frac{(\gamma-1/R^1)(\gamma-1/R^2)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}.$$

Для радиус-вектора $\vec{r}=(x,\ y,\ z)$ и нормали $\vec{n}=(n^1,\ n^2,\ n^3)$ несложно убедиться в справедливости формул

$$\partial_1\vec{r}=R^1\sqrt{R^1R^2}\,\partial_1\vec{n},\quad \partial_2\vec{r}=R^2\sqrt{R^1R^2}\,\partial_2\vec{n}.$$

Следовательно, оператор Вейнгартена не зависит от α, β, γ, т. е. формулы (33) задают трехпараметрическое семейство поверхностей, имеющих одни и те же радиусы кривизны $R^1\sqrt{R^1R^2}$, $R^2\sqrt{R^1R^2}$. Исключая R^1, R^2 из (33), получим общее уравнение квадрики

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Основной результат можно сформулировать следующим образом: при $\nu=4$ трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн допускают квадрики, а вместе с ними все поверхности, имеющие такое же, как и квадрики, сферическое изображение линий кривизны. (Как известно, сферическим изображением линий кривизны для квадрик является ортогональная сеть, полученная в результате пересечения со сферой семейства конфокальных конусов второго порядка.) Перевод этого результата на язык систем гидродинамического типа звучит следующим образом: при $\nu=4$ существует единственная (с точностью до перехода к коммутирующему потоку) система гидродинамического типа

$$R^1_t=R^1\sqrt{R^1R^2}R^1_x,\quad R^2_t=R^2\sqrt{R^1R^2}R^2_x,$$

допускающая одну нелокальную и три локальных гамильтоновых структуры. Этот результат очевидным образом обобщается: система гидродинамического типа

$$R^i_t=R^i\sqrt{\prod_{k=1}^{n}R^k}\,R^i_x,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

имеет при любом n одну нелокальную и $n+1$ локальную гамильтонову структуру. С геометрической точки зрения это объясняется тем, что квадрики в E^{n+1} зависят от $n+1$ параметра и имеют в подходящих координатах линий кривизны R^i одинаковые радиусы кривизны $R^i\sqrt{\prod_k R^k}$.

Осталось рассмотреть случай $\nu=1$.

$\nu=1$. Последнее соотношение (27) примет вид $\left(\frac{\partial_1 a}{a}-b\right)\times\left(\frac{\partial_2 b}{b}-a\right)=0$. Следовательно, $\partial_1 a=ab$ (возможность $\partial_2 b=ab$ рассматривается симметрично). Складывая первые два соотношения (27), получим уравнение Лиувилля

$$\partial_1\partial_2\ln ab=2ab,$$

общее решение которого после подходящего выбора переменных R^1, R^2 запишется в виде $ab=-1/(R^1-R^2)^2$. Полагая

$$a=\frac{f}{R^2-R^1},\quad b=\frac{1/f}{R^1-R^2}$$

и подставляя в $\partial_1 a=ab$, получим уравнение на f:

$$\frac{\partial_1 f}{f+1}=\frac{1}{R^1-R^2},$$

общее решение которого удобно записать в форме $f=-1+\frac{p'}{p}(R^2-R^1)$, где $p(R^2)$ — произвольная функция своего аргумента ($p'=\partial_2 p$). Окончательные выражения для a, b примут вид:

$$a=\frac{-p+p'(R^2-R^1)}{p(R^2-R^1)},\quad b=\frac{p}{(R^1-R^2)(-p+p'(R^2-R^1))}.$$

Заметим, что в случае $\nu=1$ a и b определяются с однофункциональным произволом, в то время как при $\nu=4$ решение было единственным. Радиусы кривизны соответствующих поверхностей определяются уравнениями $\frac{\partial_2\lambda^1}{\lambda^2-\lambda^1}=a$, $\frac{\partial_1\lambda^2}{\lambda^1-\lambda^2}=b$, частным решением которых является

$$\lambda^1=\frac{1}{p},\quad \lambda^2=\frac{1}{p+p'\,(R^1-R^2)}.$$

Анализ показывает, что поверхности с такими радиусами кривизны — не что иное как образы поверхностей вращения относительно инверсий. Выбирая, в частности, $p(R^2)\equiv R^2$, получим $\lambda^1=1/R^2$, $\lambda^2=1/R^1$. Поскольку радиусы главных кривизн постоянны вдоль соответствующих им главных направлений ($\partial_1\lambda^1=$ $=\partial_2\lambda^2=0$), мы получаем циклиды Дюпена, которые, как известно, являются образами конусов, цилиндров и торов вращения относительно инверсий.

Итак, в случае $\nu=1$ трехпараметрические деформации с сохранением главных направлений и главных кривизн допускают образы поверхностей вращения относительно инверсий, а также любые другие поверхности, имеющие такое же сферическое изображение линий кривизны. (Как известно, для этих поверхностей одно семейство линий кривизны, а именно, $R^2=\mathrm{const}$, изображается на сфере кругами, плоскости которых огибают некоторую цилиндрическую поверхность. У циклид Дюпена кругами изображаются оба семейства линий кривизны.) Получена следующая

Теорема 11. Поверхности в E^3, допускающие трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн, распадаются на два класса:

1. Поверхности, для которых сферическое изображение сети линий кривизны образовано пересечением со сферой семейства конфокальных конусов второго порядка.

2. Поверхности, для которых одно семейство линий кривизны изображается на сфере кругами, плоскости которых огибают некоторую цилиндрическую поверхность.

Если считать эквивалентными поверхности, имеющие одинаковое сферическое изображение линий кривизны, то первый класс сведется к квадрикам, а второй — к конформным образам поверхностей вращения.

На языке систем гидродинамического типа этот результат формулируется следующим образом. Системы

$$\begin{cases} R^1_t=R^1\sqrt{R^1R^2}R^1_x,\\ R^2_t=R^2\sqrt{R^1R^2}R^2_x; \end{cases}\qquad \begin{cases} R^1_t=\frac{1}{p}R^1_x,\\ R^2_t=\frac{1}{p+p'\,(R^1-R^2)}R^2_x \end{cases}$$

($p(R^2)$ — произвольная функция одного аргумента), а также коммутирующие с ними потоки исчерпывают класс гамильтоновых систем с одной нелокальной и тремя локальными гамильтоновыми структурами. Выписывание самих гамильтоновых структур не составляет труда. Например, для системы

$$R_t^1=R^1\sqrt{R^1R^2}R_x^1,\quad R_t^2=R^2\sqrt{R^1R^2}R_x^2$$

общее решение уравнений (25), (26) относительно g^{11}, g^{22} (с верхними индексами) имеет вид:

$$g^{11}=\frac{(R^1)^2R^2(a(R^1)^3+b(R^1)^2+cR^1+4)}{R^1-R^2},$$

$$g^{22}=\frac{(R^2)^2R^1(a(R^2)^3+b(R^2)^2+cR^2+4)}{R^2-R^1},$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Нелокальная гамильтонова структура отвечает выбору

$$g^{11}=\frac{4(R^1)^2R^2}{R^1-R^2},\quad g^{22}=\frac{4(R^2)^2R^1}{R^2-R^1},$$

а 3 локальных —

$$g^{11}=\frac{R^2(R^1)^{i+2}}{R^1-R^2},\quad g^{22}=\frac{R^1(R^2)^{i+2}}{R^2-R^1},\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

§ 7. СПИСОК НЕРЕШЕННЫХ ЗАДАЧ

1. Построенное в работе соответствие между гамильтоновыми системами гидродинамического типа и гиперповерхностями в псевдоевклидовом пространстве позволяет переформулировать многие понятия (такие, например, как коммутирующие потоки и мультигамильтоновы структуры) на язык теории поверхностей. Остается неясным главное — что нового это дает (скажем, по сравнению с обобщенным методом годографа [16]) для интегрирования самих систем, т. е. для построения их точных решений?

2. Результаты настоящей работы относятся к гамильтоновым системам с невырожденной метрикой: $\det g^{ij}\neq 0$. С другой стороны, целый ряд примеров (например, уравнения двумерных стационарных течений сжимаемых и несжимаемых жидкостей [18]) приводит к вырожденным гамильтоновым структурам. Общая теория скобок Пуассона с вырожденной метрикой рассматривалась в [4]. Основная сложность здесь состоит в том, что при условии $\det g^{ij}=0$ отсутствует аналог связности Леви-Чивита и коэффициенты b_k^{ij} теряют свой простой геометрический смысл. Можно ли тем не менее продолжить соответствие «гамильтонова система» $\leftrightarrow$ «гиперповерхность в E^{n+1}», которое было построено в предположении $\det g^{ij}\neq 0$, на системы с вырожденной метрикой? Кандидатами на роль таких гиперповерхностей являются нуль-гиперповерхности (null-hypersurfaces) — гиперповерхности псевдоевклидова пространства, которые в каждой точке касаются поля изотропных конусов. Внутренняя

геометрия такой гиперповерхности определяется вырожденной метрикой (ее ядро — направление касания с изотропным конусом). Хуже обстоит дело с внешней геометрией, т. к. нуль-гиперповерхность не имеет какого-либо естественного оснащения — нормаль лежит в ее же касательной плоскости (и имеет направление ядра метрики). Задача построения внешней геометрии нуль-гиперповерхности обсуждалась в [21]. Можно ли предложить способ оснащения, при котором теория нуль-гиперповерхностей стала бы в каком-то смысле эквивалентна теории гамильтоновых систем с вырожденной метрикой?

3. Согласно [16] (см. также [18]), гамильтонова в локальном смысле матрица v_j^i остается гамильтоновой при обращении, т. е. $(v^{-1})_j^i$ также является гамильтоновой. Как уже отмечалось в § 5, нелокальный гамильтонов формализм не выдерживает обращения. На геометрическом языке это означает следующее. Пусть M^n — гиперповерхность в E^{n+1}, имеющая v_j^i в качестве своего оператора Вейнгартена. Тогда обратный оператор $(v^{-1})_j^i$ вовсе не обязан быть оператором Вейнгартена какой-либо гиперповерхности $\tilde{M}^n$. Поверхности, для которых это тем не менее справедливо, можно назвать «обратимыми». Обратимость M^n означает существование такого соответствия $M^n \to \tilde{M}^n$, которое сохраняет главные направления, а радиусы кривизны меняет на обратные. Простейшими примерами обратимых поверхностей в E^3 являются поверхности постоянной кривизны. В общем виде задача описания обратимых поверхностей, по-видимому, не рассматривалась.

4. Предположим, что рассматриваемая гамильтонова система является слабо нелинейной, т. е. собственные числа матрицы v_j^i постоянны вдоль соответствующих собственных направлений. Тогда отвечающая ей гиперповерхность M^n в E^{n+1} будет циклидой Дюпена (по определению циклидой Дюпена называется гиперповерхность, главные кривизны которой постоянны вдоль соответствующих главных направлений). В последнее время наблюдается определенное возрождение интереса к этим поверхностям, см., например, [23], [27], где дана полная классификация трехмерных циклид Дюпена в E^4. Пользуясь этими результатами, было бы интересно получить классификацию слабо нелинейных гамильтоновых систем из трех уравнений.

5. В § 6 дано описание поверхностей в E^3, допускающих трехпараметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн. Заслуживает внимания задача описания поверхностей, которые допускают дву- или однопараметрическое семейство таких деформаций. (Это эквивалентно описанию систем гидродинамического типа из двух уравнений, имеющих, помимо одной нелокальной, две или одну локальные гамильтоновы структуры.) Исследование аналогичных деформаций многомерных поверхностей M^n в E^{n+1} являет-

ся более сложной задачей: достаточно сказать, что максимально возможное число существенных параметров, от которых могут зависеть такие деформации, равно не трем, как в E^3, а $n+1$ (эта оценка достигается на квадриках, см. § 6). Какие еще гиперповерхности в E^{n+1} допускают $(n+1)$-параметрическое семейство деформаций с сохранением главных направлений и главных кривизн? Можно ли дать какое-либо разумное описание деформаций многомерных поверхностей, зависящих от меньшего числа параметров? При решении этих задач естественно ограничиться гиперповерхностями с голономной сетью линий кривизны.

6. Исследовать задачу о деформациях с сохранением главных направлений и главных кривизн для гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов Ю. А.* Условие голономности главных направлений подмногообразия // Мат. заметки.— 1987.— *41,* № 4.— С. 543—548 (РЖМат, 1987, 8А623)
2. *Бахвалов С. В.* К вопросу об изгибании поверхностей с сохранением главных радиусов кривизны // Изв. Ассоциации науч.-исслед. ин-тов при физ.-мат. фак. МГУ.— 1928.— *1,* № 1—2.— С. 8—14
3. *Вольф Д.* Пространства постоянной кривизны.— М.: Наука, 1982.— 480 с. (РЖМат, 1982, 10А546К)
4. *Гринберг Н. И.* О скобках Пуассона гидродинамического типа с вырожденной метрикой // Успехи мат. наук.— 1985.— *40,* № 4.— С. 217—218 (РЖМат, 1986, 4Б1162)
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова—Уизема // Докл. АН СССР.— 1983.— *270,* № 4.— С. 781—785 (РЖМат, 1983, 10Б342)
6. —, — О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР.— 1984.— *279,* № 2.— С. 294—297 (РЖМат, 1985, 4А735)
7. —, — Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук.— 1989.— *44,* № 6.— С. 29—90
8. *Егоров Д. Ф.* Работы по дифференциальной геометрии.— М.: Наука, 1970.— 379 с. (РЖМат, 1971, 4А676К)
9. *Мохов О. И., Ферапонтов Е. В.* О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // Успехи мат. наук.— 1990.— *45,* в. 3.— С. 95—96
10. *Новиков С. П.* Геометрия консервативных систем гидродинамического типа. Метод усреднения для теоретико-полевых систем // Успехи мат. наук.— 1985.— *40,* № 4.— С. 79—89 (РЖМат, 1986, 1Б1209)
11. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1978.— 687 с. (РЖМат, 1979, 8Б574К)
12. *Соколов В. В.* О гамильтоновости уравнения Кричевера—Новикова // Докл. АН СССР.— 1984.— *277,* № 1.— С. 48—50 (РЖМат, 1984, 12Б651)
13. *Ферапонтов Е. В.* Преобразования по решению и их инварианты // Дифференц. уравнения.— 1989.— *25,* № 7.— С. 1256—1265
14. *Фиников С. П.* Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи.— 1937.— 176 с.

15. *Фоменко В. Т.* Общая формула решений уравнений Петерсона—Кодацци на гиперсфере // Укр. мат. сб.— 1989.— *32*.— С. 124—126
16. *Царев С. П.* О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // Докл. АН СССР.— 1985.— *282*, № 3.— С. 534—537 (РЖМат, 1985, 11Б749)
17. — Геометрия одномерных гамильтоновых систем гидродинамического типа. Кандидатская диссертация.— М.: МГУ.— 1985.
18. — Гамильтоновость стационарных и обращенных уравнений механики сплошных сред и математической физики // Мат. заметки.— 1989.— *46*, № 1.— С. 105—111
19. *Bonnet O.* Memoire sur la theorie des surfaces applicables // J. de l'Ecole Polytechn.— 1867.— *25*.— С. 1—151
20. — Theorie des surfaces applicables sur une surface donnee // J. de l'Ecole Polytechn.— 1865.— *24*.— С. 209
21. *Bonnor W. B.* Null hypersurfaces in Minkowski space-time // Tensor.— 1972.— *24*.— С. 329—345 (РЖМат, 1974, 1А745)
22. *Bryant R. L., Chern Shiing-shen, Griffiths P. A.* Exterior differential systems // Proc. Beijing Symp. Differ. Geom. and Differ. Equat., Aug. 18—Sept. 21, 1980. Vol. 1.— Beijing; N. Y., 1982.— С. 219—338 (РЖМат, 1985, 2А686)
23. *Cecil T. E., Chern Chiing-shen.* Dupin submanifolds in Lie sphere geometry // Lect. Notes Math. Different. Geometry and Topol.— 1986.— № 1369.— С. 1—48
24. *Chen Xiuxiong, Chia-Kuei P.* Deformation of surfaces preserving principal curvatures // Lect. Notes Math. Different. Geometry and Topol.— 1986.— № 1369.— С. 63—70
25. *Chern Shiing-shen.* Deformation of surfaces preserving principal curvatures // Differ. Geometry and Complex Anal.— Berlin e. a., 1985.— С. 155—168 (РЖМат, 1985, 8А768)
26. *Kupershmidt B. A.* Mathematics of dispersive water waves // Commun. Math. Phys.— 1985.— *99*, № 1.— С. 51—73 (РЖМат, 1986, 2Б686)
27. *Miyaoka Reiko.* Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures // Math. Z.— 1984.— *187*, № 4.— С. 433—452 (РЖМат, 1985, 5А607)
28. *Neyzi F.* Diagonalization and Hamiltonian structures of hyperbolic systems // J. Math. Phys.— 1989.— *30*, № 8.— С. 1695—1698
29. *Nutku Y.* On a new class of completely integrable nonlinear wave equations. II. Multi-Hamiltonian structure // J. Math Phys.— 1987.— *28*, № 11.— С. 2579—2585
30. *Wenmao Y.* On infinitesimal deformations of surfaces in E^3 // Lect. Notes Math. Different. Geometry and Topol.— 1986.— С. 306—321