Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. V. V'yugin, Discrete classes of recursively enumerable sets, *Algebra Logika*, 1972, Volume 11, Number 3, 243–256

https://www.mathnet.ru/eng/al1338

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.87
January 17, 2026, 05:06:30

Алгебра и логика, 11, № 3 (1972), 243-256.

УДК 517.11:518.5

О ДИСКРЕТНЫХ КЛАССАХ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

В.В.ВЬЮГИН

Все нумерации, рассматриваемые ниже, являются простыми нумерациями семейств рекурсивно перечислимых множеств и предполагаются вычислимыми. $<x, y>$ обозначает номер пары натуральных чисел x и y в канторовской нумерации всех пар натуральных чисел, $\ell(x)$, $r(x)$ - левая и правая нумерационные функции: $\ell(<x,y>) = x$, $r(<x,y>) = y$. В дальнейшем мы не будем различать пару натуральных чисел и ее номер. Нумерация α некоторого семейства рекурсивно перечислимых множеств называется позитивной, если множество $\{<x,y> | \alpha(x) = \alpha(y)\}$ рекурсивно перечислимо. Нумерация некоторого семейства называется минимальной, если всякая нумерация этого семейства, сводящаяся к ней, ей эквивалентна. Всякая позитивная нумерация является минимальной [3]. Все эти определения и свойства можно также найти в книге [1].

Семейство множеств $\mathfrak{A}$ называется дискретным, если существует семейство конечных множеств $\mathfrak{A}_F$, такое, что:

1) для всякого $A \in \mathfrak{A}$ существует $P \in \mathfrak{A}_F$, такое что $P \subseteq A$,

2) для всяких $A, B \in \mathfrak{A}$ и $P \in \mathfrak{A}_F$, если $P \subseteq A$ и $P \subseteq B$, то $A = B$.

Если на множестве всех подмножеств натурального ряда ввести естественную топологию [5], то каждый элемент дискретного семейства $\mathfrak{A}$ будет изолированной точкой, а каждое конечное множество из $\mathfrak{A}_F$ определяет окрестность, которая содержит не более одного элемента $\mathfrak{A}$. Если дискретное семейство такое, что существует строго вычислимое семейство конечных множеств, удовлетворяющее свойствам 1) и 2) (т.е. имеются вычислимая нумерация β семейства $\mathfrak{A}_F$ и общерекурсивная функция g, такие, что для всех x $g(x)$ = количеству элементов

$\beta(x)$), то $\mathfrak{A}$ называется эффективно дискретным (финитно разделяющимся в [3]). Если α - вычислимая нумерация эффективно дискретного семейства рекурсивно перечислимых множеств, то α является позитивной, так как $\alpha(x) = \alpha(y) \Longleftrightarrow \exists z\,(\beta(z) \subseteq \alpha(x) \cap \alpha(y))$, где β - строго вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{A}_F$. Ослабим требования на семейство $\mathfrak{A}$. Назовем семейство множеств $\mathfrak{A}$ слабо эффективно дискретным, если существует вычислимое семейство конечных множеств, удовлетворяющее свойствам 1) и 2). Следующая теорема показывает, что в этом случае сохраняется свойство иметь позитивную нумерацию.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое вычислимое слабо эффективно дискретное семейство рекурсивно перечислимых множеств обладает позитивной нумерацией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ - слабо эффективно дискретное семейство, α - его вычислимая нумерация, $\mathfrak{A}_F$ - вычислимое семейство конечных множеств, удовлетворяющее 1) и 2), β - его вычислимая нумерация. Строим нумерации τ, ν и множество P.

$\alpha^s(x)$ - конечная или пустая часть множества $\alpha(x)$, построенная за s шагов вычисления множества $\alpha(x)$ тем способом, который задает вычислимую нумерацию α. $\tau^{s+1}(x)$ и $\nu^{s+1}(x)$ - конечные или пустые части множеств $\tau(x)$ и $\nu(x)$, построенные на шаге s описываемой ниже конструкции. Предварительно положим для всех x $\nu^0(x) = \tau^0(x) = \emptyset$.

<u>Шаг s $(s \geq 0)$</u>. Первое число, не бывшее ни разу последователем, делаем последователем s. Пусть $\ell\ell(s) = n$, $r\ell(s) = m$. Если $m = n$, то переходим к пункту 2. Пусть $m \neq n$. Из свойств функций $\ell(x)$ и $r(x)$ следует, что $m, n \leq s$, значит, m и n имеют последователей. Пусть $n < m$. В этом случае проверяем условие $(\exists z \leq s)(\beta^s(z) \subseteq \tau^s(m) \cap \tau^s(n))$. Если такого z не существует, то переходим к пункту 2. Если условие выполнено, то ищем наименьшее z, ему удовлетворяющее (пусть это будет z'), затем ищем такое $s' > s$, чтобы выполнилось $\tau^s(m) \subseteq \alpha^{s'}(n) \vee \beta^{s'}(z') \nsubseteq \tau^s(n) \cap \tau^s(m)$. Такое s' всегда найдется, т.к. если допустить, что $(\forall s' > s)(\beta^{s'}(z') \subseteq \tau^s(m) \cap \tau^s(n))$, то из того, что $\beta(z')$ конечное, следует $\beta(z') \subseteq \tau(m) \cap \tau(n)$, а из условия дискретности $\tau(n) =$

$=\tau(m)$ выполняется первый член дизъюнкции (из дальнейшего видно, что $\tau(x)=\alpha(x)$). Если в процессе нахождения такого s' первым выполнится левый член дизъюнкции, то m освобождаем от всех его последователей, все бывшие последователи m делаем последователями n, первое число, еще ни разу не бывшее последователем, делаем последователем m. Пусть в таком случае s_0 – наименьшее такое s', тогда положим $\tau^{s+1}(n)=\tau^{s}(n)\cup\alpha^{s_0}(n)$. Переходим к п.2. В противном случае сразу переходим к п. 2.

2. Положим

$$\tau^{s+1}(m)=\tau^{s}(m)\cup\alpha^{s+1}(m),\quad \tau^{s+1}(n)=\tau^{s}(n)\cup\alpha^{s+1}(n),$$

если они уже построены в п. 1. Для всякого x, такого, что x – последователь n, положим $\nu^{s+1}(x)=\nu^{s}(x)\cup\tau^{s+1}(n)$. Аналогично построим $\nu^{s+1}(x)$ для всех x –последователей m. Для всех остальных x и k положим $\nu^{s+1}(x)=\nu^{s}(x)$, $\tau^{s+1}(k)=\tau^{s}(k)$.

Для всех x, y последователей n, пары $\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle$ засылаем в P. То же самое проделываем со всеми последователями m. Пару $\langle s,s\rangle$ засылаем в P. Переходим к шагу $s+1$. Конструкция описана.

Докажем, что ν есть необходимая позитивная нумерация. Из построения видно, что ν – вычислимая нумерация, P – рекурсивно перечислимое множество, такое, что для всех x $\alpha(x)=\tau(x)$.

а) для всякого x $\nu(x)\in\mathcal{A}$.

Из построения видно, что если x – постоянный последователь n, то $\nu(x)=\alpha(n)$. Поэтому достаточно доказать, что на некотором шаге x станет постоянным последователем некоторого числа. Так как конструкция продолжается бесконечно долго, то x станет последователем некоторого m. Если x освободится, то на том же шаге становится последователем меньшего числа. Отсюда следует, что существует $n_0\leq m$, для которого x – постоянный последователь.

б) Для всякого $A\in\mathcal{A}$ существует x, такое, что $\nu(x)=A$. Пусть $A=\alpha(n_0)=\tau(n_0)$, n_0 – наименьший номер A в нумерации α. Достаточно доказать, что n_0 на некотором шаге n_0 приобретет постоянного последователя. Если n_0 теряет последователя на некотором шаге, то на том же шаге приобретает нового. Следовательно, до-

статочно доказать, что n_0 не может на бесконечном множестве шагов терять последователей. Допустим противное, тогда существует бесконечно много шагов s_i $(s_0 < s_1 < \dots)$, чисел s_i', m_i (уже не обязательно различных), таких, что $s_i' > s_i$, $m_i < n_0$, $\tau^{s_i}(m_i) \subseteq \alpha^{s_i'}(n_0) \subseteq \alpha(n_0) = A$ (выполняется первый член дизъюнкции в п. 1 на шаге s_i). Из $m_i < n_0$ следует, что существует m, такое, что $m < n_0$ и $m_i = m$ для бесконечно многих i. Тогда $\tau(m) \subseteq \alpha(n_0) = \tau(n_0)$ и из дискретности $\mathfrak{A}$ – $\tau(m) = \alpha(m) = \alpha(n_0) = A$. Противоречие, так как n_0 – наименьший номер A в нумерации α

в) $P = \{\langle x, y\rangle \mid \nu(x) = \nu(y)\}$. Если $\langle x, y\rangle \in P$, то x и y – с некоторого момента постоянные последователи одного числа; тогда легко видеть, что $\nu(x) = \nu(y)$. Пусть $\nu(x) = \nu(y)$. На достаточно большом шаге по а) x и y станут постоянными последователями. Допустим, что x и y – постоянные последователи различных чисел – n и m, $n < m$. Тогда $\nu(x) = \tau(n)$, $\nu(y) = \tau(m)$, $\tau(n) = \tau(m)$. Найдется такой шаг s и число z, что $\ell\ell(s) = n$, $r\ell(s) = m$, $z \leq s$, для всех $z' \leq z$ $\beta^s(z') = \beta(z')$ и $\beta(z) \subseteq \tau^s(m) \cap \tau^s(n)$. Правый член дизъюнкции в п.1 не может иметь места, тогда мы должны освободить y. Противоречие. Следовательно, на некотором шаге x и y станут последователями одного числа, и пара $\langle x, y\rangle$ будет заслана в P. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Существует вычислимый слабо эффективно дискретный класс рекурсивно перечислимых множеств, не являющийся эффективно дискретным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – перечислимое неразрешимое множество, $a \in \bar{A}$. Определим $\mathfrak{A} = \{A \cup \{x\} \mid x \in \bar{A}\}$ и его нумерацию

$$\alpha_a(x) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & x \notin A, \\ A \cup \{a\}, & x \in A. \end{cases}$$

Тогда $\alpha_a^{-1}(A \cup \{a\}) = A \cup \{a\}$ неразрешимо, если $x \neq a$, $x \in \bar{A}$, то $\alpha_a^{-1}(A \cup \{x\}) = \{x\}$. Отсюда следует, что если $a \neq b$, $a, b \in \bar{A}$, то нумерации α_a и α_b несравнимы, следовательно, $\mathfrak{A}$ не являет-

ся эффективно дискретным по [3]. Однако $\mathfrak{A}$ – слабо эффективно дискретный класс. Семейство конечных множеств $\mathfrak{A}_F$, удовлетворяющее условиям 1), 2), и его вычислимую нумерацию ν строим следующим образом. Пусть α – вычислимая нумерация $\mathfrak{A}$. Определим для всех x $\nu^{-1}(x) = \phi$.

<u>Шаг n</u>. $\ell(n) = x$. Если $\nu^{n-1}(x) \subseteq \alpha^n(x)$ и существует $y \in \alpha^n(x) - A^n$, то определим $\nu^n(x) = \nu^{n-1}(x) \cup \{y_0\}$, где y_0 – наименьшее такое y. Для всех $k \neq x$ (для всех k, если условие не выполняется) определим $\nu^n(k) = \nu^{n-1}(k)$. Переходим к шагу $n+1$. Теорема доказана.

Используя диагональный метод из конструкции § 4 [2], можно построить слабо эффективно дискретный вычислимый класс конечных множеств, не являющийся эффективно дискретным. Построим вычислимый дискретный класс, не являющийся слабо эффективно дискретным. В конструкции используются идеи из [2]. Для дальнейшего нам требуется следующая

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{A}$ – вычислимый слабо эффективно дискретный класс рекурсивно перечислимых множеств. Тогда существует вычислимый класс конечных множеств $\mathcal{L}$, удовлетворяющий условиям 1), 2) определения и условию 3) для всякого $P \in \mathcal{L}$ существует $A \in \mathfrak{A}$, такое, что $P \subseteq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – вычислимая нумерация $\mathfrak{A}$, β – вычислимая нумерация класса $\mathfrak{A}_F$ конечных множеств, удовлетворяющего условиям 1) и 2). Строим нумерацию ν. Определим для всех x $\nu^{-1}(x) = \phi$.

<u>Шаг n $(n \geq 0)$</u>. $\ell(n) = x$. Если существует i, такое, что $i \leq n$ и $\beta^n(i) \subseteq \alpha^n(x)$, то определим $\nu^n(x) = \nu^{n-1}(x) \cup \beta^n(i_0)$, где i_0 – наименьшее такое i.

Для всех $y \neq x$ (для всех y, если такого i не существует) определим $\nu^n(y) = \nu^{n-1}(y)$. Переходим к шагу $n+1$. Конструкция описана.

Определим $\nu(x) = \bigcup_{n \geq 0} \nu^n(x)$, $\mathcal{L} = \{\nu(x)\}_{x \geq 0}$. Легко видеть, что $\nu(x) \subseteq \alpha(x)$. Пусть i_0 – наименьшее такое i, что $\beta(i) \subseteq \alpha(x)$,

тогда для всех n, начиная с некоторого, если $\ell(n) = x$ будет $\nu^n(x) = \nu^{n-1}(x) \cup \beta(i_0)$, если $\ell(n) \neq x$, то $\nu^n(x) = \nu^{n-1}(x)$, откуда видно, что $\nu(x)$ конечное и $\beta(i_0) \subseteq \nu(x)$. Если $\nu(x) \subseteq \alpha(y) \cap \alpha(z)$, то $\beta(i_0) \subseteq \alpha(y) \cap \alpha(z)$, тогда по свойству 2) класса $\mathfrak{A}_F$ $\alpha(y) = \alpha(z)$. Следовательно, $\mathcal{C}$ удовлетворяет свойствам 1), 2) и 3). Лемма доказана.

Пусть $\pi(i,j)$ – вычислимая нумерация семейства всех рекурсивно перечислимых множеств такая, что для всякой вычислимой нумерации α произвольного класса перечислимых множеств существует i, такое, что для всех j $\alpha(j) = \pi(i,j)$, [1].

ТЕОРЕМА 3. Существует дискретный класс рекурсивно перечислимых множеств, имеющий позитивную нумерацию и не являющийся слабо эффективно дискретным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить нумерацию α некоторого класса рекурсивно перечислимых множеств. Одновременно строим множества M, P и функции $c(e,n)$, $f(e,n)$, $g(e,n)$, $h_1(e,n)$, $h_2(e,n)$. M^n, P^n, $\alpha^n(x)$ – конечные или пустые части множеств M, P, $\alpha(x)$ соответственно, построенные на шаге n конструкции. $\pi^n(e,i)$ – конечная или пустая часть множества $\pi(e,i)$, вычисленная за n шагов вычисления множества $\pi(e,i)$ тем способом, который задает вычислимую нумерацию π. Из дальнейшего будет видно, что $P = \{\langle x,y\rangle \mid \alpha(y) = \alpha(x)\}$, всякое множество $\alpha(x)$ имеет один из видов: $M \cup \{f(e,n)\}$, $M \cup \{f(e,n), h_1(e,n)\}$, $M \cup \{f(e,n), h_2(e,n)\}$, для некоторых e, n, причём $f(e,n)$, $h_1(e,n)$, $h_2(e,n) \notin M$. В ходе конструкции всякое число станет последователем некоторого числа. Четное число имеет последователей двух сортов – левых и правых одновременно. Если число x является последователем e на всех шагах, начиная с некоторого, то x называется постоянным последователем e. На шаге n число x называется неиспользованным, если $x \notin \bigcup_{i \geq 0} \alpha^{n-1}(i)$ (для всякого n это множество конечное), число k называется свободным, если k не является последователем. Определим $M^{-1} = \emptyset$, для всех x $\alpha^{-1}(x) = \emptyset$.

<u>Шаг n $(n \geq 0)$</u>. Если n чётно, то переходим к п. 1, в про –

тивном случае - к п. 2.

1. $n=2k$, $\ell(k)=e$. Если $c(e,n-1)$ определено, то переходим к (*). Пусть $c(e,n-1)$ не определено. Тогда, если e чётно, переходим к п. 1.1, если e нечётно, то к п. 1.2.

1.1. $e=2m$. Проверяем условие:

(1) $(\exists i\leq n)(\exists y)(\forall e'<e)(y\in\pi^n(m,i)\,\&\, y\notin M^{n-1}\,\&\,(c(e',n-1)$ - определено $\Longrightarrow$ (e' чётно $\Longrightarrow \{f(e',n-1),h_1(e',n-1),h_2(e',n-1)\}\cap\pi^n(m,i)=\varnothing$) & (e' нечётно $\Longrightarrow f(e',n-1)\notin\pi^n(m,i))))$.

Если это условие не выполнено, то переходим к (*). Если выполнено, то пусть i_0, y_0 - наименьшие ему удовлетворяющие. Определим $f(e,n)=y_0$, $g(e,n)=i_0$,

$$M^n=M^{n-1}\cup\{x\mid x\in\pi^n(m,i_0)\cup\bigcup_{\substack{e'\text{ чётно},\,e'>e,\\ c(e',n-1)\text{ определено}}}\{f(e',n-1),h_1(e',n-1),h_2(e',n-1)\}\cup\bigcup_{\substack{e'>e,\,e'\text{ нечётно},\\ c(e',n-1)\text{ определено}}}\{f(e',n-1)\}\,\&$$

$x\neq y_0\}$. Для всех $e'>e$ положим $c(e',n)$, $f(e',n)$, $g(e',n)$, $h_1(e',n)$, $h_2(e',n)$ неопределенными. Пусть u_1,u_2 - два наименьших неиспользованных числа, не принадлежащих $M^n\cup\{y_0\}$, k_1; k_2 - два наименьших свободных числа. Определим $c(e,n)=\langle k_1,k_2\rangle$, $h_1(e,n)=u_1$, $h_2(e,n)=u_2$, назовем k_1 левым последователем e, k_2 правым последователем e. Для всякого $e'>e$ освобождаем e' от всех его последователей (если таковые имелись), делаем все бывшие последователи e' левыми последователями e. Определим $\alpha^n(k_1)=M^n\cup\{f(e,n),h_1(e,n)\}$, $\alpha^n(k_2)=M^n\cup\{f(e,n),h_2(e,n)\}$. (Заметим, что $\pi^n(m,i_0)\subseteq\alpha^n(k_1)\cap\alpha^n(k_2)$). Для всех остальных левых последователей e определим $\alpha^n(x)=\alpha^{n-1}(x)\cup\alpha^n(k_1)$. (Заметим, что для всякого левого последователя e на этом шаге $\alpha^{n-1}(x)\subseteq\alpha^n(k_1)$). Переходим к (*).

1.2. $e=2m+1$. Пусть y - наименьшее неиспользованное число. Определим $f(e,n)=y$, $c(e,n)=k_1$, где k_1 - наименьшее свободное число. Назовем k_1 последователем e. Определим $\alpha^n(k_1)=M^{n-1}\cup\{f(e,n)\}$. Переходим к (*).

2. $n=2k+1$, $\ell(k)=e$. Если $c(e,n-1)$ не определено или e нечётно, то переходим к (*). Пусть $e=2m$ и $c(e,n-1)$ определено, $c(e,n-1)=\langle k_1,k_2\rangle$, $g(e,n)=i$. Всегда имеет место

дискретный класс. Тогда по лемме существует вычислимый класс конечных множеств, удовлетворяющий условиям 1), 2) и 3). Пусть e такое, что $\{\pi(e,i)\}_{i\geq 0}$ - этот класс. Тогда из вида элементов $\mathfrak{A}$ для всякого i $\pi(e,i)\cap\overline{M}\neq\emptyset$. Докажем, что существует n_0, такое, что для всех $n\geq n_0$ $c(2e,n)$ определено. Допустим противное, тогда существует n_0 такое, что для всех $e'<2e$ для всех $n\geq n_0$ $c(e',n)$ определено или для всех $n\geq n_0$ $c(e',n)$ не определено и для всех $n\geq n_0$ $c(2e,n)$ не определено. Пусть $A=\{e'\mid e'<2e$ для всех $n\geq n_0$ $c(e',n)$ определено$\}$, $B=\{e'\mid e'\in A$, e' чётно, случай 2.2 имел место для e', i_0' не более конечного множества раз$\}$, $C=\{e'\mid e'\in A$, e' чётно, и случай 2.2 имел место для e', i_0' бесконечное множество раз$\}$, где $g(e',n_0)=i_0'$.

По а) и б) существует n_1 $(n_1\geq n_0)$ такое, что для всех $n\geq n_1$, $e'\in A$, $f(e',n)=f(e',n_1)$, для всякого $e'\in B$ $h_1(e',n)=h_1(e',n_1)$, $h_2(e',n)=h_2(e',n_1)$. Если $e'\in A$, то $f(e',n_1)$ по б) является элементом не более двух множеств из $\mathfrak{A}$, если $e'\in B$, то $h_1(e',n_1)$ является элементом точно одного множества из $\mathfrak{A}$, то же самое для $h_2(e',n_1)$. Так как $\mathfrak{A}$ бесконечно, семейство $\{\pi(e,i)\}_{i\geq 0}$ также бесконечно. Тогда найдется i такое, что для всякого $e'\in A$ $f(e',n_1)\notin\pi(e,i)$, для всякого $e'\in B$ $h_1(e',n_1), h_2(e',n_1)\notin\pi(e,i)$. Существует $y\in\pi(e,i)$, $y\notin M$. Выберем n_2, так что $n_2>n_1$, $n_2=2k$, $\ell(k)=2e$, $i<n_2$, $\pi^{n_2}(e,i)=\pi(e,i)$ и для всякого $e'\in C$ $h_1(e',n_2-1), h_2(e',n_2-1)\notin\pi(e,i)$. Такое n_2 существует, так как множество $\pi(e,i)$ конечное, а поскольку случай 2.2 имеет место для всякого $e'\in C$ на бесконечном множестве шагов, функции $h_1(e',n)$, $h_2(e',n)$ переопределяются бесконечное множество раз, всякое же число, бывшее значением одной из этих функций, а затем переставшее им быть по случаю 2.2, значением ни одной из них на большом шаге быть не может. Тогда при $n=n_2$ $\pi(e,i)$ удовлетворяет условию (1) конструкции и $c(2e,n_2)$ определяется. Противоречие с допущением.

Значит, существует n_0 такое, что для всех $n\geq n_0$ $c(2e,n)$, $f(2e,n)$, $g(2e,n)$ определены, пусть $g(2e,n)=i_0$. Случай 2.2 для e, i_0 иметь место бесконечное множество раз не может, так как $\pi(e,i_0)$ - конечное множество. Значит, существуют n_1, k_1, k_2 такие, что $n_1\geq n_0$, и для всех $n\geq n_1$ $c(2e,n)=\langle k_1,k_2\rangle$, k_1 - постоянный левый последователь e, k_2 - постоянный правый последова-

тель e. Если случай 2.3 имеет место для e, i_0 на бесконечном множестве шагов, то из замечаний в ходе конструкции $\pi(e, i_0) \subseteq \subseteq \alpha(k_1) \cap \alpha(k_2)$. Но $\alpha(k_1) \neq \alpha(k_2)$, получаем противоречие с условием 2). Значит, существует n_2 такое, что $n_2 \geq n_1$, и для всякого $n \geq n_2$, $n = 2k+1$, $\mathcal{C}(k) = 2e$ имеет место случай 2.1. Предположим, что на бесконечном множестве шагов n соответствующее $e' \neq 2e$ чётно и $\{f(e', n-1), h_1(e', n-1), h_2(e', n-1)\} \cap \pi(e, i_0) \neq \phi$. (Случай, когда на бесконечном множестве шагов соответствующее e' нечётно и $f(e', n-1) \in \pi(e, i_0)$, рассматривается аналогично). Тогда существует бесконечно много шагов n, таких, что для каждого из них существует e' такое, что $e' \neq 2e$, e' чётно и $f(e', n-1) \in \in \pi(e, i_0)$ или существует бесконечно много шагов n таких, что для каждого из них существует e' такое, что $e' \neq 2e$, e' чётное и $h_1(e', n-1) \in \pi(e, i_0)$, или то же самое относительно $h_2(e', n-1)$. Пусть выполняется первое. Тогда, так как $\pi(e, i_0)$ конечное, существует $y \in \pi(e, i_0)$ такое, что y является значением функции f на бесконечном множестве шагов. Функция f обладает свойством: если $x = f(e, n)$, то для всех $e' > e$, $m > n$, $x \neq f(e', m)$. Значит, существует e_0' такое, что $e_0' \neq 2e$ и $f(e_0', n) = y$ для бесконечно многих n. По а) функция $f(e_0', n)$ или не определена для всех достаточно больших n, или для них определена и константна, следовательно, существует n_3 такое, что $n_3 \geq n_0$ и для всех $n \geq n_3$ $f(e_0', n) = f(e_0', n_3)$, $f(e_0', n_3) \in \pi(e, i_0)$. По свойству 3) леммы $\pi(e, i_0)$ содержится в некотором множестве из $\mathcal{K}$. Для всех $n \geq n_0$ $f(2e, n) = f(2e, n_0)$ и $f(2e, n_0) \in \pi(e, i_0)$, значит, по б) $\pi(e, i_0) \subseteq \alpha(k_1)$ или $\pi(e, i_0) \subseteq \alpha(k_2)$. Тогда $f(e_0', n_3) \in \alpha(k_1)$ или $f(e_0', n_3) \in \alpha(k_2)$, однако k_1, k_2 не являются постоянными последователями e_0', так как $e_0' \neq 2e$. Противоречие с б). Оставшиеся два случая рассматриваются аналогично. Следовательно, $\mathcal{K}$ – не слабо эффективно дискретный класс. Теорема доказана.

Семейство множеств называется нормальным, если со всяким конечным множеством ему принадлежат все его непустые подмножества [4]. В [4] доказано, что всякая минимальная нумерация бесконечного нормального семейства эквивалентна нумерации, в которой любое конечное множество имеет конечное множество номеров. Следующая теорема устанавливает, что таким же свойством обладают минимальные нумера-

ции дискретных семейств.

ТЕОРЕМА 4. Всякая минимальная нумерация бесконечного вычислимого дискретного семейства рекурсивно перечислимых множеств эквивалентна нумерации, в которой всякое конечное множество имеет конечное множество номеров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – вычислимая минимальная нумерация семейства $\mathfrak{A}$, γ – строго вычислимая нумерация семейства всех конечных множеств. Строим нумерацию β и функцию h Предварительно положим для всех x $\beta^0(x)=\emptyset$.

Шаг 0. Положим $h(0)=0$, $\beta^1(0)=\tau^1(0)$.

Шаг $s+1$ $(s\geq 0)$. Пусть $h(0), h(1)\ldots h(i)$, $i<s+1$, уже определены на предыдущих шагах. Пусть $\ell\ell(s+1)=x$, $r\ell(s+1)=z$ ($\ell(x)$ и $r(x)$ – левая и правая нумерационные функции в канторовской нумерации всех пар натуральных чисел).

(1) Если $\gamma(z)\subseteq\tau^{s+1}(x)$ и $(\forall j\leq i)(\gamma(z)\nsubseteq\beta^{s+1}(j))$, то положим $h(i+1)=x$. В противном случае $h(i+1)$ оставляем неопределенной. Для всех $j\leq i+1$, если $h(j)$ определена, положим $\beta^{s+2}(j)=\beta^{s+1}(j)\cup\tau^{s+2}h(j)$. Для всех остальных j положим $\beta^{s+2}(j)=\beta^{s+1}(j)$. Переходим к шагу $s+2$. Конструкция описана. Из построения видно, что β – вычислимая нумерация, а h – вычислимая функция. Семейство $\mathfrak{A}$ бесконечное и дискретное, поэтому условие (1) будет выполняться на бесконечном множестве шагов. Следовательно, h всюду определена. Легко видеть, что для всякого x $\beta(x)=\tau h(x)$, следовательно, $\beta(x)\in\mathfrak{A}$. Допустим, что $A\in\mathfrak{A}$ и для всех x $\beta(x)\neq A$. Пусть $A=\tau(n)$. $\mathfrak{A}$ дискретно, тогда существует шаг $s+1$, такой, что $\ell\ell(s+1)=n$, $r\ell(s+1)=z$, $\gamma(z)\subseteq\tau^{s+1}(n)$, и для всякого $B\in\mathfrak{A}$, $B\neq A$ будет $\gamma(z)\nsubseteq B$. Тогда на этом шаге положим $h(i+1)=n$ для соответствующего i. Получим $\beta(i+1)=\tau(n)$, что противоречит допущению. Следовательно, β – нумерация семейства $\mathfrak{A}$.

Пусть A конечное и $A\in\mathfrak{A}$. Пусть $A=\tau(n)$. По доказанному, для некоторого x $\beta(x)=A$. Пусть на шаге s_0+1 $\beta^{s_0+1}(x)=\tau^{s_0+1}(x)=A$, тогда на всяком последующем шаге $s+1$, таком,

что $\ell\ell(s+1)=m$, $\tau(m)=A$, условие (1) выполняться не будет, A не получит в нумерации β больше ни одного номера. Итак, A имеет в нумерации β конечное множество номеров. По построению, для всех x $\beta(x)=\tau h(x)$, т.е. β сводится к τ. Если τ – минимальная нумерация, то β эквивалентна τ. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Всякое бесконечное вычислимое дискретное семейство конечных множеств вычислимо с конечными повторениями (т.е. имеет нумерацию, в которой каждое множество имеет конечное множество номеров).

Заметим, что в [4] приведен пример вычислимого семейства конечных множеств, которое не может быть вычислимо с конечными повторениями.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить благодарность С.С.Марченкову и В.А.Успенскому за внимание к этой работе.

Литература

1. Ю.Л.ЕРШОВ, Теория нумераций, ч.1, НГУ, 1969.

2. Ю.Л.ЕРШОВ, О вычислимых нумерациях, Алгебра и логика, 7, № 5 (1968), 71–99.

3. А.И.МАЛЬЦЕВ, Позитивные и негативные нумерации, ДАН СССР, 160, № 2 (1965), 278–280.

4. С.С.МАРЧЕНКОВ, О минимальных нумерациях систем рекурсивно перечислимых множеств, ДАН СССР, 198, № 3 (1971), 530–532.

5. В.А.УСПЕНСКИЙ, О вычислимых операциях, ДАН СССР, 103, № 5 (1955), 773–776.

Поступило 17 февраля 1972 г.