

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Вабищевич, М. Д. Раджабов, Моделирование притока к несовершенной скважине в сопряженной постановке, *Матем. моделирование*, 1989, том 1, номер 7, 44–50

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

18 марта 2025 г., 03:11:23



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЯВЛЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ

УДК 517.958:551.49

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИТОКА К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В СОПРЯЖЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

П.Н. Вабищевич, М.Д. Раджабов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Численно моделируется стационарное течение в пористой среде с учетом гидравлики скважины. Вычислительный алгоритм основан на численно-аналитическом решении краевой задачи в области фильтрации.

В гидрогеологии [1–3] выделяют задачи расчета фильтрационных течений к несовершенным по вскрытию (фильтр скважины только частично перекрывает водонесущий пласт) скважинам. В задачах плановой фильтрации такая ситуация моделируется специальными условиями на границах скважины. В более точной постановке приходится решать краевую задачу в области фильтрации с разрывными граничными условиями на скважине.

Второй тип несовершенства скважины проявляется при учете собственного потока жидкости внутри скважины. Гидравлические несовершенства скважины при модельных предположениях о фильтрационном потоке вне скважины рассматриваются, например, в работах [4, 5]. В настоящей работе задача расчета притока к скважине с учетом гидравлики скважины рассматривается в полной постановке.

В § 1 ставится сопряженная задача о стационарном потоке к несовершенной скважине. Она характеризуется нелинейным краевым условием для функции тока на границе скважины. Описанию вычислительного алгоритма решения этой задачи посвящен § 2. Используется численно-аналитический метод, основанный на разделении переменных. По поперечной координате вводится дискретная сетка, а по продольной — решение ищется аналитически. Разработанный алгоритм близок в идейном отношении к тем, которые применяются в работах [6, 7], но более полно учитывает специфику задач математической физики в слоистых средах. Описывается итерационный метод учета нелинейного краевого условия, даются примеры выполненных расчетов.

§ 1. Постановка сопряженной задачи

Рассмотрим течение к одиночной скважине в слоистой среде (рис. 1). Будем считать, что коэффициент фильтрации k зависит только от z и течение в области фильтрации

$$\Omega = \{ (r, z) \mid R < r < \infty, 0 < z < l \}$$

стационарно, а сама скважина совершенна по вскрытию. Здесь R – радиус скважины, а l – толщина пласта. Фильтрационное течение описывается уравнением

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rk(z)} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (1)$$

для функции тока $\psi(r, z)$. На непроницаемых поверхностях $z = 0$ и $z = l$ зададим условия

$$\psi(r, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\psi(r, l) = Q, \quad (3)$$

где Q определяет величину расхода жидкости.

Граничное условие для $\psi(r, z)$ при $r \rightarrow \infty$ вытекает из условия

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad r = \infty.$$

Интегрируя это выражение с учетом граничных условий (2), (3), получим

$$\psi(\infty, z) = \varphi(z) \equiv Q \int_0^z k(s) ds / \int_0^l k(s) ds. \quad (4)$$

Осталось сформулировать условие на скважине (при $r = R$).

Будем считать, что течение внутри скважины меняется плавно. Между выделенными сечениями 1 и 2 (рис. 1) для установившихся течений несжимаемой жидкости запишем уравнение Бернулли (см. [8]):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_c. \quad (5)$$

Здесь $z + p/(\rho g) = s^*(z)$ – пьезометрический напор в сечении z , p – давление, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, $v(z)$ – средняя по сечению скорость, α – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения местных скоростей по сечению. Величина h_c выражает потерю напора между сечениями 1 и 2. Она складывается из потерь в сопротивлении по длине h_D и в местных сопротивлениях h_u .

В нашем случае будем считать, что $h_u = 0$, а сопротивление по длине выражается по формуле Вейсбаха – Дарси

$$h_D = \lambda \frac{z_2 - z_1}{2R} \frac{v^2}{2g}, \quad (6)$$

где λ – коэффициент гидравлического трения.

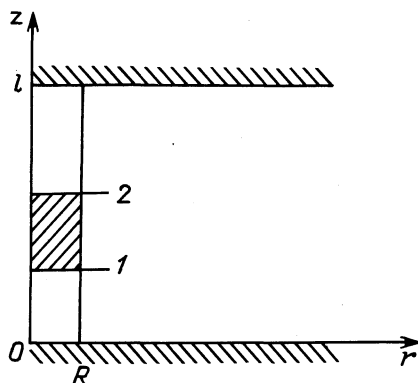


Рис. 1. К постановке задачи

Пусть $z_2 - z_1 = dz$, тогда из уравнения (5) и (6) имеем

$$s^*(z) + \frac{\alpha v^2(z)}{2g} + s^*(z + dz) + \frac{\alpha v^2(z + dz)}{2g} + \frac{\lambda}{2R} dz \frac{v^2(z)}{2g} = 0.$$

С учетом $s^*(z) = s(R, z)$, причем $s(r, z)$ — напор в области фильтрации, получим

$$\frac{\partial s(R, z)}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2g} \frac{d}{dz} (v^2) - \frac{\lambda}{2R} \frac{v^2}{2g}. \quad (7)$$

Свяжем теперь течение в скважине (скорость $v(z)$) с течением вне ее. Обозначим через $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ скорости фильтрации жидкости в Ω . На скважине имеем

$$u_r(R, z) = -k(z) \frac{\partial s(R, z)}{\partial r}, \quad (8)$$

причем $u_r(R, z) < 0$.

За счет $u_r(R, z)$ обеспечивается приток жидкости в скважину. Между сечениями 1 и 2 приток равен

$$dq = -2\pi R u_r(R, z) dz. \quad (9)$$

С другой стороны, имеем

$$dq = dv \cdot \pi R^2. \quad (10)$$

Из (9), (10) следует необходимая связь:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{2}{R} k(z) \frac{\partial s(R, z)}{\partial r}, \quad (11)$$

причем $v(0) = 0$.

Соотношения (7) и (11) определяют граничные условия на скважине. С привлечением определения функции тока они могут быть сформулированы более приемлемым образом.

С учетом того, что

$$k(z) \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

из (7) получим

$$\frac{1}{Rk(z)} \frac{\partial \psi(R, z)}{\partial r} = \frac{\alpha}{2g} \frac{d}{dz} (v^2) + \frac{\lambda}{2R} \frac{v^2}{2g}. \quad (12)$$

Соответственно (11) переписывается в виде

$$\frac{dv}{dz} = \frac{2}{R^2} \frac{\partial \psi(R, z)}{\partial z}. \quad (13)$$

С учетом граничного условия (2) и того, что $v(0) = 0$, интегрируя (13), получим

$$v(z) = \frac{2}{R^2} \psi(R, z). \quad (14)$$

Подстановка (14) в (12) дает необходимое условие на стенке скважины:

$$\frac{1}{k(z)} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \beta \frac{\partial}{\partial z} \psi^2 + \gamma \psi^2, \quad r=R, \quad (15)$$

где $\beta = \frac{2\alpha}{gR^3}$, $\gamma = \frac{\lambda}{R^4 g}$.

§ 2. Вычислительный алгоритм

Для приближенного решения нелинейной краевой задачи (1)–(4), (15) используем простейший итерационный процесс. Обозначим через n номер итерации. При заданном $\psi^n(r, z)$ следующее приближение $\psi^{n+1}(r, z)$ определяется из решения уравнения

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rk(z)} \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k(z)} \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial z} \right) = 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (16)$$

дополненного граничными условиями

$$\psi^{n+1}(r, 0) = 0, \quad (17)$$

$$\psi^{n+1}(r, l) = Q, \quad (18)$$

$$\psi^{n+1}(\infty, z) = \varphi(z), \quad (19)$$

$$\frac{1}{k(z)} \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial r} = \beta \frac{\partial}{\partial z} (\psi^n)^2 + \gamma (\psi^n)^2, \quad r=R. \quad (20)$$

Итерационный процесс (16)–(20), как показывают численные эксперименты, достаточно быстро сходится при начальном приближении $\psi^0(R, z) = 0$.

От $\psi^{n+1}(r, z)$ удобно перейти к новой неизвестной функции $u^{n+1}(r, z)$ с помощью замены

$$\psi^{n+1}(r, z) = u^{n+1}(r, z) + \varphi(z).$$

Это позволяет записать для $u^{n+1}(r, z)$ однородные граничные условия при $r = \infty$ и $z = 0$, $z = l$.

По переменной z введем для простоты равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{z \mid z = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

обозначив через ω_h множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$. Приближенное решение для $u^{n+1}(r, z)$ обозначим $y_i(r)$. Оно определяется из решения дифференциально-разностного уравнения

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dy_i}{dr} \right) + \frac{a_i}{h^2} \left(\frac{1}{a_{i+1/2}} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{a_{i-1/2}} (y_i - y_{i-1}) \right) = 0, \quad (21)$$

$z \in \omega_h.$

Коэффициенты $a_i, a_{i+1/2}$ определяются обычным образом ([9]). Например,

$$a_i = \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} k(z) dz, \quad a_{i+1/2} = \frac{1}{h} \int_{z_i}^{z_{i+1}} k(z) dz.$$

При $i = 0$ и $i = N$ имеем

$$y_0(r) = 0, \quad y_N(r) = 0. \quad (22)$$

С учетом (21), (22) будем искать решение задачи методом разделения переменных. Представим решение $y_i(r)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) в виде

$$y_i(r) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j(r) w_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (23)$$

Здесь через w_i^j обозначены собственные функции сеточной задачи

$$w_0 = 0,$$

$$\frac{w_{i-1}}{a_{i-1/2}} - \left(\frac{1}{a_{i-1/2}} + \frac{1}{a_{i+1/2}} \right) w_i + \frac{w_{i+1}}{a_{i+1/2}} + \lambda_h \frac{h^2}{a_i} w_i = 0, \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$w_N = 0.$$

Сеточную задачу на собственные значения (24) запишем в матричном виде

$$Aw = \lambda_h Bw. \quad (25)$$

В (25) A — трехдиагональная симметричная матрица размерности $N-1$, а B — диагональная матрица.

Обобщенная проблема на собственные значения (25) решается стандартными методами линейной алгебры. Нами использовалась подпрограмма, реализующая QL-алгоритм со сдвигом ([10]). Для приближенного решения полной проблемы (25) затрачивается $O(N^2)$ арифметических действий.

Сформулируем теперь задачу для определения коэффициентов $c_j(r)$ в представлении (23). С учетом ортонормированности собственных функций w^j в H_B ($(Bw^j, w^k) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера) для определения $c_j(r)$ получим уравнение

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dc_j(r)}{dr} \right) - \lambda_h^j c_j(r) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (26)$$

Оно дополняется граничным условием

$$c_j(\infty) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (27)$$

С учетом граничного условия (20) и представления ψ^{n+1} через u^{n+1} получим граничное условие при $r = R$ для $y_i(r)$:

$$\frac{dy_i(R)}{dr} = G(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dc_j(r)}{dr} = \chi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (28)$$

где χ_j — коэффициенты разложения $G(z_i)$ по собственным функциям w^j .

Точное решение задачи (26) – (28) имеет вид

$$c_j(r) = \chi_j \frac{r}{R} \frac{K_1(r\sqrt{\lambda_h^j})}{\sqrt{\lambda_h^j} K_0(R\sqrt{\lambda_h^j})},$$

где $K_{0,1}(x)$ – модифицированная функция Ханкеля. Поэтому для $y_i(r)$ получим представление

$$y_i(r) = \sum_{j=1}^{N-1} \chi_j \frac{r}{R} \frac{K_1(r\sqrt{\lambda_h^j})}{\sqrt{\lambda_h^j} K_0(R\sqrt{\lambda_h^j})} w_i^j. \quad (29)$$

Прибавляя к $y_i(r)$ функцию $\varphi(z)$, получим соответствующее приближение для решения задачи (16) – (20). При переходе от одной итерации к другой уточняется только граничное условие (20) и χ_j в представлении (29).

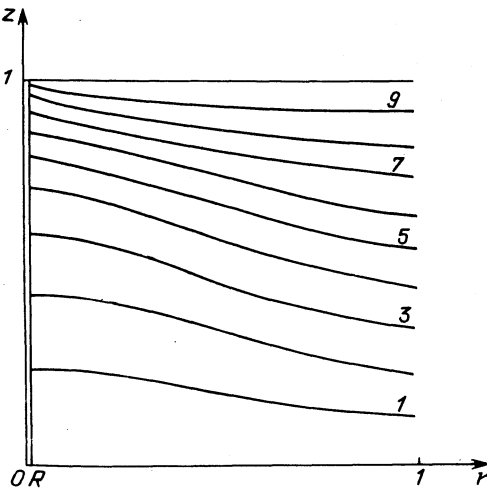


Рис. 2

Рис. 2. Линии тока $\psi = \text{const}$: 1 – $\psi = 0,1$; 2 – 0,2; ...; 9 – 0,9

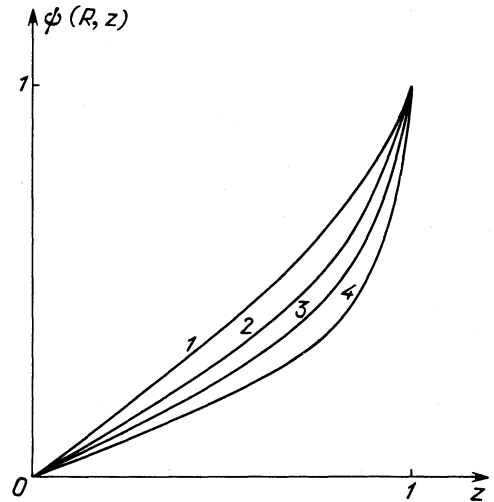


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость $\psi(R, z)$ от z при $\gamma = 0$ и $1 - \beta = 0,05$; 2 – 0,10; 3 – 0,15; 4 – 0,25

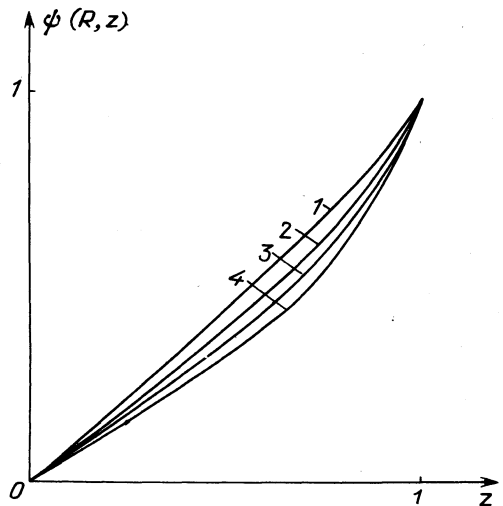


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость $\psi(R, z)$ от z при $\beta = 0$ и $1 - \gamma = 0,05$; 2 – 0,15; 3 – 0,25; 4 – 0,35

§ 3. Примеры расчетов

Разработанный метод решения сопряженной задачи притока к несовершенной скважине применялся для решения модельных задач. Приведем некоторые примеры выполненных расчетов.

На рис. 2 приведены линии тока $\psi = \text{const}$ при $Q = 1$, $k(z) = 1$, $\beta = 0,1$ и $\gamma = 0,25$. Здесь $R = 0,01$, $l = 1$, а число узлов $N = 20$. Наблюдается характерное нарушение однородности потока, соответствующее более интенсивному выбору жидкости у верхней границы пласта.

На рис. 3, 4 отражена зависимость скорости в скважине $v(z)$ от z при различных значениях параметров β и γ . (Изображен график зависимости $\psi(R, z)$ от z . Для получения значений $v(z)$ необходимо использовать связь (14).)

В таблице приведены данные о зависимости приближенного решения от числа узлов N . Здесь $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,25$ и представлены значения $\psi(R, z_i)$.

Таблица 1

$z \backslash N$	20	40	80	$z \backslash N$	20	40	80
0,1	0,045979	0,045964	0,045962	0,6	0,313302	0,313285	0,313298
0,2	0,092536	0,092510	0,092508	0,7	0,392953	0,392975	0,393006
0,3	0,140660	0,140628	0,140626	0,8	0,498565	0,498687	0,498759
0,4	0,191824	0,191789	0,191789	0,9	0,657341	0,657754	0,657936
0,5	0,248222	0,248190	0,248194				

Проведенные расчеты показали высокую эффективность разработанного метода для решения сопряженных задач фильтрации в слоистых средах.

Авторы выражают глубокую благодарность В.М. Шестакову за постановку задачи и А.А. Самарскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.
2. Бочеввер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М. Основы гидрогеологических расчетов. – М.: Недра, 1969.
3. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. – М.: Недра, 1978.
4. Шестаков В.М. Фильтрационный поток к скважине с учетом внутрискважинной гидравлики // Гидромеханика. – 1978. – № 36. – С. 87.
5. Грикевич Э.А. Гидравлика водозаборных скважин. – М.: Недра, 1986.
6. Ляшко И.И., Великозаянченко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – Киев: Наукова думка, 1973.
7. Иванов В.Т., Масютина М.С. Методы решения прямых и обратных задач электрокаротажа. – М.: Наука, 1983.
8. Рабинович Е.З. Гидравлика. – М.: Наука, 1980.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.
10. Уилкинсон, Райни. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976.