

**ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ, НАДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-
ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ.
VI. CR -ПОДМНОГООБРАЗИЯ В МНОГООБРАЗИИ
ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ**

Н. Д. Поляков

ВВЕДЕНИЕ

CR -структура на подмногообразиях, наделенных различными дифференциально-геометрическими структурами, в последние годы стала предметом исследования многих математиков. Геометрическое исследование CR -структур было начато в эрмитовых и почти эрмитовых многообразиях (см. [9]).

Бежанку и Папагюк [21] ввели в метрическом почти контактном многообразии класс подмногообразий, названный ими полуинвариантными подмногообразиями. Подмногообразие M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ называется полуинвариантным подмногообразием, если в каждой точке $x \in M_m$ справедливо $T_x(M_m) = D_x \oplus D_x^\perp \oplus \{\xi_x\}$, где $\varphi D_x \subset D_x$, $\varphi D_x^\perp \subset T_x^\perp(M_m)$. Инвариантные и антиинвариантные подмногообразия в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ являются частными классами полуинвариантных подмногообразий. Яно и Кон назвали полуинвариантные подмногообразия контактными CR -подмногообразиями [48], а Кобаяси [31] — CR -подмногообразиями M_m . В настоящей работе мы будем использовать это последнее название.

Связь между CR -подмногообразиями в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ и CR -подмногообразиями в $M(J, g)$ характеризуется следующей теоремой.

Теорема. Подмногообразие M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$, каждая касательная плоскость которого содержит структурный вектор $\vec{\xi}$, является CR -подмногообразием тогда и только тогда, когда M_m является CR -подмногообразием в многообразии метрической почти комплексной структуры $M = M_{n+1} \times R$ (R — вещественная прямая) с голоморфным распределением D и вполне вещественным распределением $D^\perp \oplus \{\xi\}$ [22]. В этом случае $\varphi D_x \subset D_x$, $\varphi D_x^\perp \subset T_x^\perp(M_m)$.

Понятие CR -подмногообразий M_m было введено для многообразия метрической почти контактной структуры при ортогональном оснащении M_m в M_{n+1} .

Введенные нами [12] понятия CR_v -подмногообразий и $CR_{v(\sigma)}$ -подмногообразий в M_{n+1} (см. § 2) обобщают понятие CR -подмногообразий: 1) CR_v -подмногообразия и $CR_{v(\sigma)}$ -подмногообразия исследуются в многообразии почти контактной структуры (в этом случае наличие метрики G на M_{n+1} , согласованной с $(\varphi\xi\eta)$, не является существенным); 2) CR_v -подмногообразии ассоциируются с полями различных нормалей v , $CR_{v(\sigma)}$ -подмногообразии — с полями пучков нормалей $v(\sigma)$, в то время как CR -подмногообразии ассоциированы только с полем ортогонально оснащающих нормалей $T^\perp(M_m)$.

Такая более широкая точка зрения на CR -структуру позволяет включить в рассмотрение и другие типы подмногообразий в многообразии почти контактной структуры, которые при обычной постановке задачи естественно выпадают из рассмотрения.

Если M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ нормально оснащено полем $v(M_m)$, то на M_m естественным образом индуцируется CR_v -структура или $CR_{v(\sigma)}$ -структура, и M_m становится CR_v -подмногообразием или $CR_{v(\sigma)}$ -подмногообразием (§ 3). Если M_m является $CR_{v(\sigma)}$ -подмногообразием в M_{n+1} с произвольной римановой метрикой h , то на M_{n+1} определяется внутренним образом (с помощью преобразования метрики h) метрика G , согласованная с почти контактной структурой так, что M_m становится CR -подмногообразием в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ в обычном понимании (§ 4).

Наряду с исследованием CR -подмногообразий в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$, началось изучение CR -подмногообразий многообразий f -структуры [38], почти контактной метрической 3-структуры [35], [36]. Введено понятие почти полуинвариантных подмногообразий в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ [26], [40], [42]. CR -подмногообразия являются частным классом почти полуинвариантных подмногообразий.

На протяжении всего изложения индексы будут приобретать следующие значения: $I, J, K, \dots = 1, \dots, n+1$; $i, j, \dots = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n+1$; $A, B, \dots = 1, \dots, n+1$; $n+2, a, b, \dots = 1, \dots, d$; $u, v, \dots = 1, \dots, l$.

Автор благодарит профессора Н. М. Остиану за научные консультации при написании настоящей работы.

§ 1. ПОДМНОГООБРАЗИЯ M_m , ПОГРУЖЕННЫЕ В ПОЧТИ КОНТАКТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

1. Основные понятия. Пусть M_{n+1} — гладкое дифференцируемое многообразие класса C^∞ . Над $(n+1)$ -мерной координатной окрестностью U гладкого многообразия M_{n+1} , в которой

текущая точка x определяется системой координат x^I , можно ввести вполне интегрируемую систему $(n+1)$ линейно независимых линейных дифференциальных форм ω^I , первыми интегралами которой являются координаты x^I , т. е.

$$\omega^J = X_K^J dx^K, \quad (1.1)$$

где $\det \|X_K^J\| \neq 0$. В остальном величины X_K^J будут считаться произвольными и рассматриваются как независимые переменные. Известно [4], что при помощи форм ω^J над окрестностью U можно построить последовательность форм $\omega_K^J, \omega_{K_1 K_2}^J, \dots$, обладающих расслоенной структурой [3] по отношению к формам ω^J .

Определение 1.1. [2], [11]. Почти контактной структурой на нечетномерном дифференцируемом многообразии M_{n+1} ($n = 2q$) называется дифференциально-геометрическая структура первого порядка, определенная на M_{n+1} полями линейных однородных геометрических объектов φ, ξ, η , относительные компоненты которых подчинены конечным соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi_J^I \varphi_K^J &= -\delta_K^I + \xi^I \eta_K, & \varphi_J^I \xi^J &= 0, \\ \varphi_J^I \eta_I &= 0, & \xi^I \eta_I &= 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Геометрические объекты φ, ξ, η называются структурными объектами почти контактной структуры на M_{n+1} .

Дифференциальные уравнения полей структурных объектов имеют вид:

$$d\varphi_J^I - \varphi_L^I \omega_J^L + \varphi_J^L \omega_L^I = \varphi_{JK}^I \omega^K, \quad (1.3)$$

$$d\xi^I + \xi^L \omega_L^I = \xi_K^I \omega^K, \quad (1.4)$$

$$d\eta_J - \eta_L \omega_J^L = \eta_{JK} \omega^K. \quad (1.5)$$

Многообразии M_{n+1} , снабженное почти контактной структурой, называется многообразием почти контактной структуры или почти контактными многообразием $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Если на $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ введена положительно определенная риманова метрика G такая, что

$$\begin{aligned} G_{IK} \varphi_L^I \varphi_M^K &= G_{LM} - \eta_L \eta_M, \\ G_{IK} \xi^I &= \eta_K, \end{aligned} \quad (1.6)$$

то многообразие называется метрическим почти контактными многообразием [2].

2. $(f\xi\eta\rho)$ -структура, индуцированная на подмногообразии M_m . В многообразии M_{n+1} почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$ зададим m -мерное подмногообразие M_m параметрическими дифференциальными уравнениями:

$$\omega^I = \Lambda_i^I \theta^i, \quad (1.7)$$

где θ^i — структурные формы многообразия параметров S_m (см. [11], § 2, п. 1) и

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i. \quad (1.8)$$

Формы $\bar{\theta}_j^i = \theta_j^i|_{\theta^i=0}$ являются инвариантными формами полной линейной группы, которую мы будем обозначать D_m^1 . В каждой фиксированной точке $x \in M_m$ эта группа представлена как группа преобразований векторного репера $\vec{\Lambda}_i = \Lambda_i^j \vec{e}_j$ в касательной плоскости $T_x(M_m)$ (\vec{e}_j — векторный репер в $T_x(M_m)$).

Функции Λ_i^j в каждой точке $x \in M_m$ образуют фундаментальный объект первого порядка подмногообразия M_m . Дифференциальные уравнения поля этого объекта имеют вид:

$$d\Lambda_i^j - \Lambda_i^k \theta_k^j + \Lambda_i^j \omega_j^k = \Lambda_{ik}^j \theta^k. \quad (1.9)$$

Оснастим подмногообразие M_m в многообразии M_{n+1} полем нормалей $\nu_x(M_m)$. $\nu(M_m) = \bigcup_{x \in M_m} \nu_x(M_m)$ называется нормальным расслоением. Плоскость $\nu_x(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$ определим системой $(n+1-m)$ линейно независимых векторов $\vec{\nu}_\alpha = \nu_\alpha^j \vec{e}_j$.

Дифференциальные уравнения оснащающего поля $\nu(M_m)$ имеют вид:

$$d\nu_\alpha^j - \nu_\beta^j \theta_\alpha^\beta + \nu_\alpha^j \omega_j^k = \nu_{\alpha k}^j \theta^k, \quad (1.10)$$

где $\bar{\theta}_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\beta|_{\theta^i=0}$ являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(n+1-m, R)$. Из (1.10) следует, что поле метрического объекта $\{\nu_\alpha^j\}$ присоединено к группе $D_n^1 \times GL(n+1-m, R)$.

Матрица $\begin{vmatrix} \Lambda_i^j \\ \nu_\alpha^j \end{vmatrix}$, построенная из компонент Λ_i^j , ν_α^j , имеет ранг $n+1$ и позволяет ввести «обращенные» объекты $\Lambda_j^i^*$, $\nu_j^\alpha^*$ такие, что выполняются следующие конечные соотношения (см. [11], § 5):

$$\begin{aligned} \Lambda_i^* \Lambda_j^i &= \delta_i^j, & \Lambda_i^* \nu_j^\alpha &= 0, \\ \nu_\alpha^j \Lambda_j^i &= 0, & \nu_\alpha^j \nu_j^\beta &= \delta_\alpha^\beta, \\ \Lambda_i^* \Lambda_k^i + \nu_\alpha^* \nu_k^\alpha &= \delta_k^i. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Известна [11] следующая теорема.

Теорема (Основная теорема). Если поверхность M_m , погруженная в дифференцируемое многообразие M_{n+1} почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащена полем плоскостей $\nu(M_m)$, то на M_m естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура ранга m и коранга $(n+2-m)$.

Структурными объектами индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ -структуры на M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ являются следующие геометрические объекты f^i_j , $\xi^i_A = \{\xi^i_\alpha, \xi^i_{n+2}\}$, $\eta^i_A = \{\eta^i_\alpha, \eta^i_{n+2}\}$, $\rho^i_B = \{\rho^i_\beta, \rho^i_{n+2}, \rho^i_{n+2}, \rho^i_{n+2} = 0\}$. Компоненты структурных объектов определяются из следующих равенств:

$$\vec{\Phi}\Lambda_i = f^i_j \vec{\Lambda}_j + \eta^i_\alpha \vec{v}_\alpha, \quad (1.12)$$

$$\vec{\Phi}v_\alpha = -\xi^i_\alpha \vec{\Lambda}_j + \rho^i_\beta v_\beta, \quad (1.13)$$

$$\vec{\xi} = \xi^i_{n+2} \vec{\Lambda}_j - \rho^i_{n+2} v_\beta, \quad (1.14)$$

$$\eta^{n+2}_i = \eta_j \Lambda^j_i, \quad (1.15)$$

$$\rho^{n+2}_\alpha = \eta_j v^j_\alpha \quad (1.16)$$

и подчинены конечным соотношениям:

$$\begin{aligned} f^i_j f^j_k &= -\delta^i_k + \xi^i_A \eta^A_k, & f^i_j \xi^j_A &= -\rho^B_A \xi^i_B, \\ f^i_j \eta^j_A &= -\rho^A_B \eta^B_j, & \rho^A_B \rho^B_C &= -\delta^A_C + \xi^i_C \eta^i_A. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Каждая из систем величин f^i_j , ξ^i_α , ξ^i_{n+2} , η^i_β , η^i_{n+2} , ρ^i_α , ρ^i_{n+2} , ρ^i_{n+2} определяет на M_m поле геометрического объекта. Дифференциальные уравнения этих величин можно определить путем дифференцирования (1.12)–(1.16) с учетом (1.3)–(1.5), (1.9), (1.10). Известно [10], [16], что поля структурных объектов f^i_j , ξ^i_{n+2} , η^i_{n+2} являются линейными однородными объектами, присоединенными к группе D^1_m , а поля объектов ρ^i_α , ρ^i_{n+2} , ρ^i_{n+2} — линейными однородными объектами, присоединенными к $GL(n+1-m, R)$. Поля геометрических объектов ξ^i_α , η^i_β присоединены к группе $D^1_m \times GL(n+1-m, R)$.

Поля объектов f^i_j , ρ^i_β определяют на M_m линейные операторы f и ρ . В каждой точке $x \in M_m$ линейный оператор f действует в слое $T_x(M_m)$, а линейный оператор ρ — в слое $v_x(M_m)$.

Известно [10], [16]:

1) Поля геометрических объектов ξ^i_α и ξ^i_{n+2} определяют на M_m распределения линейных элементов (ξ_α) и (ξ_{n+2}) , соответственно, причем каждый элемент распределения (ξ_α) порожден векторами $\vec{\xi}_\alpha = \xi^i_\alpha \vec{\Lambda}_i$, а каждый элемент распределения (ξ_{n+2}) — вектором $\vec{\xi}_{n+2} = \xi^i_{n+2} \vec{\Lambda}_i$.

2) Поле геометрического объекта ξ^i_A определяет на M_m распределение s -мерных линейных элементов (ξ_A) ($0 \leq s \leq m$), каждый элемент которого порожден векторами $\vec{\xi}_\alpha$, $\vec{\xi}_{n+2}$, причем распределения (ξ_α) и (ξ_{n+2}) являются подрасслоениями распределения (ξ_A) .

3) Поля геометрических объектов η_i^α , η_i^{n+2} определяют на M_m распределения линейных элементов (η^α) и (η^{n+2}) , соответственно, причем относительно репера $R(\Lambda_i, \nu_\alpha)$ в каждой точке $x \in M_m$ элемент распределения $(\eta^\alpha)_x$ определяется системой линейных уравнений:

$$\eta_i^\alpha x^i = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad (1.18)$$

а элемент распределения $(\eta^{n+2})_x$ — системой

$$\eta_i^{n+2} x^i = 0, \quad x^\alpha = 0. \quad (1.19)$$

4) Поле геометрического объекта η_i^A определяет распределение k -мерных линейных элементов (η^A) ($0 \leq k \leq m$).

Из равенств (1.12) — (1.17) следует, что распределение (η^A) инвариантно относительно действия линейных операторов f и φ , а распределение (ξ_A) инвариантно относительно действия линейного оператора f .

§ 2. CR_ν -СТРУКТУРА И $CR_{\nu(\sigma)}$ -СТРУКТУРА НА ПОДМНОГООБРАЗИИ M_m В M_{n+1} ($\varphi\xi\eta$)

1. Типы поверхностей M_m . С точки зрения взаимного расположения касательной плоскости $T_x(M_m)$ в точке $x \in M_m$ структурного вектора ξ_x и ковектора η_x в M_{n+1} ($\varphi\xi\eta$) различаем три типа поверхностей M_m (см. [13]):

1. $T_x(M_m) \not\subset \eta_x$ и $\xi_x \notin T_x(M_m)$;
2. $\xi_x \in T_x(M_m)$;
3. $T_x(M_m) \subset \eta_x$.

Справедливо следующее:

- для поверхностей типа 1: $\eta_i^{n+2} \neq 0$, $\rho_{n+2}^\alpha \neq 0$;
- для поверхностей типа 2: $\rho_{n+2}^\alpha = 0$;
- для поверхностей типа 3: $\eta_i^{n+2} = 0$.

2. Понятие CR_ν -структуры и $CR_{\nu(\sigma)}$ -структуры.

Определение 2.1. π -структуру на касательном расслоении $T(M_m)$ подмногообразия M_m , нормально оснащенного полем нормалей $\nu(M_m)$, в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, определенную распределениями линейных элементов D и L , назовем CR -структурой, ассоциированной с полем нормалей $\nu(M_m)$ или CR_ν -структурой, если в каждой точке $x \in M_m$ выполняются следующие условия:

$$\text{а) } \varphi D_x \subset D_x, \quad \text{б) } \varphi L_x \subset \nu_x(M_m). \quad (2.1)$$

Предположим, что размерность элементов распределения D равна d ($\dim D_x = d$), а размерность элементов распределения L равна l ($\dim L_x = l$).

Так как, согласно определению 2.1, распределения D и L определяют π -структуру в касательном расслоении подмногообразия M_m , то в каждой точке $x \in M_m$ выполняются следующие условия: $D_x \cap L_x = \{x\}$, $d+l=m$.

Из условия (2.1a) следует, что распределение D инвариантно относительно действия аффинора φ почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$, т. е. φ -инвариантно. Распределение D назовем инвариантным распределением CR_ν -структуры на M_m . Очевидно, что если $d=m$ (т. е. $l=0$), то подмногообразие является φ -инвариантным подмногообразием в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ [1d].

Из условия (2.1б) следует, что распределение φL линейных элементов φL_x является подрасслоением $\nu(M_m)$ нормально оснащающего расслоения. Плоскость φL_x является образом плоскости L_x под действием линейного оператора φ , а это означает, что в каждой точке $x \in M_m$ плоскости L_x и φL_x не имеют общих направлений, т. е. $L_x \cap \varphi L_x = \{x\}$.

В работах [13], [44] введено понятие антиинвариантного подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. Аналогично введем понятие антиинвариантного распределения в почти контактном многообразии M_{n+1} .

Определение 2.2. Распределение линейных элементов \mathcal{H} в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ назовем антиинвариантным распределением, ассоциированным с полем нормалей ν , если в каждой точке $x \in M_m$ справедливо $\varphi\mathcal{H}_x \subset \nu_x$.

Из определений 2.1 и 2.2 следует, что распределение l -мерных линейных элементов L является антиинвариантным распределением. Распределение L назовем антиинвариантным распределением CR_ν -структуры на M_m .

Из (2.1б) следует, что размерность элементов распределения φL не должна превышать размерности нормально оснащающих плоскостей $\nu_x(M_m)$ подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Следовательно, если подмногообразие M_m типа 2, то $l-1 \leq n+1-m$, а для остальных типов подмногообразий M_m $l \leq n+1-m$. Если для подмногообразия M_m типа 2 $l-1=n+1-m$, а для остальных типов подмногообразий $l=n+1-m$, то в каждой точке $x \in M_m$ плоскость φL_x совпадает с нормально оснащающей плоскостью $\nu_x(M_m)$.

Если для подмногообразия M_m типа 2 $l-1 < n+1-m$, а для остальных типов подмногообразий $l < n+1-m$, то подмногообразие M_m можно нормально оснастить полями σ -параметрических пучков нормалей $\nu(\sigma)$ плоскостей $\nu_x(\sigma)$ с общей осью φL_x . Для поверхностей типа 2 $\sigma=n-m-l-1$, а для остальных типов поверхностей $\sigma=n-m-l$.

В связи с этим мы можем дать определение CR -структуры на подмногообразии M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащенном полем пучков нормалей $\nu(\sigma)$, т. е. ввести понятие CR -структуры

на M_m , ассоциированной с полем пучка нормалей $\nu(\sigma)$ подмногообразия M_m .

Определение 2.3. π -структуру на касательном расслоении $T(M_m)$ подмногообразия M_m , нормально оснащенного полем нормалей $\nu(M_m)$, в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, определенную распределениями линейных элементов D и L , назовем CR -структурой, ассоциированной с полем пучка нормалей $\nu(\sigma)$, или $CR_{\nu(\sigma)}$ -структурой подмногообразия M_m , если в каждой точке $x \in M_m$ выполняются следующие условия:

$$а) \varphi D_x \subset D_x, \quad б) \varphi L_x \subset \nu_x(\sigma). \quad (2.2)$$

Из (2.2а) следует, что распределение D φ -инвариантно, а из условия (2.2б) следует, что распределение φL линейных элементов φL_x является осью σ -параметрического пучка нормалей $\nu(\sigma)$ подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

В работе [14] введено понятие $N(\sigma)$ -антиинвариантного подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. Аналогично введем понятие $\nu(\sigma)$ -антиинвариантного распределения в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Определение 2.4. Распределение линейных элементов \mathcal{H} в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ назовем $\nu(\sigma)$ -антиинвариантным распределением, если в каждой точке $x \in M_m$ $\varphi\mathcal{H}_x$ совпадает с осью пучка нормалей $\nu_x(\sigma)$.

Из определений (2.3) и (2.4) следует, что распределение l -мерных линейных элементов является $\nu(\sigma)$ -антиинвариантным распределением в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. Распределение L назовем $\nu(\sigma)$ -антиинвариантным распределением $CR_{\nu(\sigma)}$ -структуры на M_m .

Подмногообразием M_m , несущее CR_{ν} -структуру, назовем CR_{ν} -подмногообразием, а подмногообразием M_m , несущее $CR_{\nu(\sigma)}$ -структуру, назовем $CR_{\nu(\sigma)}$ -подмногообразием M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

3. Фундаментальные объекты распределений D и L . Так как распределение d -мерных линейных элементов D на M_m является подрасслоением касательного расслоения $T(M_m)$ подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, то фундаментальный объект распределения D определяется в $T(M_m)$ системой величин D_a^i , образующих геометрический объект, поле которого определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$dD_a^i + D_a^j \theta_j^i - D_b^i \tau_a^b = D_{ak}^i \theta^k. \quad (2.3)$$

Формы τ_a^b подчинены следующим структурным уравнениям

$$d\tau_a^b = \tau_a^c \wedge \tau_c^b + \theta^k \wedge \tau_{ak}^b. \quad (2.4)$$

При этом каждая плоскость D_x распределения D задается системой d -линейно независимых векторов $\vec{D}_a = D_a^i \vec{\Lambda}_i$.

В каждой фиксированной точке $x \in M_m$ формы τ_a^b являются

инвариантными формами полной линейной группы $GL(d, R)$, представленной в $T_x(M_m)$ в виде группы преобразований репера $\{\vec{D}_a\}$.

Так как распределение l -мерных линейных элементов на M_m также является подрасслоением касательного расслоения $T(M_m)$ подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$, то структурный объект распределения L определяется в $T(M_m)$ системой величин L_u^i , образующей геометрический объект, поле которого задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dL_u^i - L_v^i \sigma_u^v + L_u^j \theta_j^i = L_{uk}^i \theta^k. \quad (2.5)$$

Элемент L_x распределения L в точке $x \in M_m$ задается системой l -линейно независимых векторов $\vec{L}_u = L_u^i \vec{A}_i$.

Формы σ_u^v подчинены структурным уравнениям:

$$d\sigma_u^v = \sigma_u^w \wedge \sigma_w^v + \theta^k \wedge \sigma_{uk}^v. \quad (2.6)$$

В каждой точке $x \in M_m$ векторы \vec{D}_a, \vec{L}_u образуют векторный репер в $T_x(M_m)$. В связи с этим можно ввести в рассмотрение обращенные объекты \vec{D}_i^a и \vec{L}_i^u , подчиненные известным формулам (см. § 1).

Каждая из систем величин

$$P_j^i = D_a^i \vec{D}_j^a, \quad Q_j^i = L_u^i \vec{L}_j^u \quad (2.7)$$

является линейным однородным объектом, присоединенным к группе D_m^1 .

Компоненты этих тензоров удовлетворяют соотношениям:

$$P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad PQ + QP = 0, \quad P + Q = I \quad (2.8)$$

и, следовательно, в каждой точке $x \in M_m$ являются проектирующими операторами в $T_x(M_m)$ на D_x и L_x , соответственно. При этом любой вектор \vec{X} из $T_x(M_m)$ имеет разложение $\vec{X} = P\vec{X} + Q\vec{X}$.

Рассмотрим системы величин:

$$r_{ab}^i = D_{aj}^i D_b^j - D_{bj}^i D_a^j, \quad (2.9)$$

$$r_{uv}^i = L_{uj}^i L_v^j - L_{vj}^i L_u^j. \quad (2.10)$$

Величины $\{r_{ab}^i, D_u^i\}, \{r_{uv}^i, L_u^i\}$ образуют геометрические объекты, которые называются объектами неголономности соответствующих распределений [5]. Необходимыми и достаточными условиями голономности распределения $D(L)$ являются обращение в нуль компонент объекта неголономности r_{ab}^i (r_{uv}^i).

4. f -структура на CR_V -подмногообразии. Если на M_m определена CR_V -структура, то распределение d -мерных линейных элементов D является Φ -инвариантным распределением. Аналити.

чески это означает, что выполняются равенства:

$$\Phi \vec{D}_a = \psi_a^b \vec{D}_b. \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует

$$d\psi_a^b - \psi_c^b \tau_a^c + \psi_a^c \tau_c^b = \psi_a^b \theta^k. \quad (2.12)$$

Следовательно, величины ψ_a^b определяют линейно однородный геометрический объект, присоединенный к $GL(d, R)$. В каждой точке $x \in M_m$ объект ψ_a^b определяет линейный оператор ψ_x .

Свернув (2.11) с Φ , получим:

$$-\vec{D}_a + D_a^i \eta_i^{n+2} \vec{\xi} = \psi_a^b \psi_c^d \vec{D}_c. \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует:

Утверждение 2.1. Если в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}$ не принадлежит элементу Φ -инвариантного распределения D CR -подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\Phi \xi \eta)$, то на распределении D индуцируется почти комплексная структура со структурным объектом ψ_a^b и $d = \dim D_x$ является четным.

Утверждение 2.2. Если в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}$ принадлежит элементу Φ -инвариантного распределения D CR -подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\Phi \xi \eta)$, то на распределении D индуцируется почти контактная структура и $d = \dim D_x$ является нечетным.

Из (1.12) и (2.11) следует:

$$\text{а) } f \vec{D}_a = \psi_a^b \vec{D}_b, \quad \text{б) } \eta_i^a D_a^i = 0. \quad (2.14)$$

Следовательно, распределение D CR -подмногообразия является инвариантным распределением относительно действия аффинора f и в каждой точке $x \in M_m$ справедливо $D_x \subset (\eta^a)_x$.

Так как M_m является CR -подмногообразием, то распределение l -мерных линейных элементов L является антиинвариантным распределением, т. е. в каждой точке $x \in M_m$ $\Phi L_x \subset \nu_x$. Аналитически это означает, что

$$\Phi \vec{L}_u = u_u^\alpha \vec{\nu}_\alpha. \quad (2.15)$$

Продифференцировав (2.15), получим систему дифференциальных уравнений для функций u_u^α :

$$du_u^\alpha - u_v^\alpha \sigma_u^v + u_u^\beta \theta_\beta^\alpha = u_{uu}^\alpha \theta^k. \quad (2.16)$$

Следовательно, $\{u_u^\alpha\}$ образуют геометрический объект, присоединенный к $GL(l, R) \times GL(n+1-m, R)$.

Из (2.15) с учетом (1.12) получим следующие равенства:

$$\text{а) } f^i L_u^i = 0, \quad \text{б) } \eta_i^\alpha L_u^i = u_u^\alpha. \quad (2.17)$$

Равенства (2.17б) определяют охват* компонент геометрического объекта $\{u_n^a\}$. Из равенств (2.17а) следует, что любой вектор \vec{X} , принадлежащий элементу L_x распределения L в точке $x \in M_m$, под действием линейного оператора f_x отображается в нулевой вектор.

Утверждение 2.3. В каждой точке $x \in M_m$ элемент распределения D является образом линейного оператора f_x , а элемент распределения L — ядром линейного оператора f_x , т. е. $D_x = \text{Im } f_x, L_x = \text{Ker } f_x$.

Из (2.14б) и (2.17а) следует

$$f_i^j \eta_j^A = 0. \quad (2.18)$$

В силу конечных соотношений на компоненты индуцированной на M_m ($f\xi\eta\rho$)-структуры (1.17), получим равенства, эквивалентные (2.18):

$$\rho_B^A \eta_i^B = 0. \quad (2.19)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Если подмногообразии M_m в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ снабжено CR_ν -структурой, то справедливы равенства (2.18).

При выполнении равенств (2.18) из соотношений (1.17) следует $f^3 + f = 0$, а следовательно, на CR_ν -подмногообразии M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ естественным образом индуцируется f -структура [5]. Если в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}$ не принадлежит элементу распределения D , то ранг f -структуры на CR_ν -подмногообразии M_m равен размерности элемента распределения D , т. е. $\text{rang } f_x = \dim D_x = d$. Если же в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}$ принадлежит элементу распределения D , то ранг f -структуры меньше элемента распределения D на одну единицу, т. е. $\text{rang } f_x = \dim D_x - 1 = d - 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ снабжено CR_ν -структурой, то на M_m естественным образом индуцируется f -структура ранга r со структурным объектом $\{f_j^i\}$, причем $r = \dim D_x$, при выполнении условия $\vec{\xi} \notin D_x$ и $r = \dim D_x - 1$, при выполнении условия $\vec{\xi} \in D_x$.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.3. Если подмногообразии M_m нормально оснащено полем нормали $\nu(M_m)$ в почти контактном многообразии и снабжено f -структурой ранга r со структурным объектом $\{f_j^i\}$, компоненты которого определены из равенств (1.12), то на M_m естественным образом индуцируется CR_ν -структура, при-

чем $\dim D_x = r+1$ при $\vec{\xi} \in D_x^*$ и $\dim D_x = r$ при $\vec{\xi} \notin D_x$ (D — инвариантное распределение CR_V -подмногообразия).

Из теорем 2.2 и 2.3 следуют необходимые и достаточные условия задания CR_V -структуры на подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры.

Теорема 2.4. На подмногообразии M_m , нормально оснащенном полем нормали $\nu(M_m)$ в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, определяется CR_V -структура тогда и только тогда, когда на M_m задана f -структура ранга r со структурным объектом $\{f_j^i\}$.

5. f -структура в нормальном расслоении $\nu(M_m)$. В силу теоремы 2.1, если подмногообразие M_m является CR_V -подмногообразием в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, то выполняются условия (2.18), (2.19). Тогда из соотношений (1.17) следует $\rho^3 + \rho = 0$, а это означает, что геометрический объект $\{\rho_\beta^\alpha\}$ является структурным объектом f -структуры в нормальном расслоении $\nu(M_m)$ CR_V -подмногообразия в почти контактном многообразии M_{n+1} .

Итак, справедлива теорема.

Теорема 2.5. В нормальном расслоении $\nu(M_m)$ CR_V -подмногообразия в почти контактном многообразии M_{n+1} естественным образом индуцируется f -структура со структурным объектом $\{\rho_\alpha^\beta\}$.

З а м е ч а н и е. Результаты, полученные в настоящем параграфе в пунктах 2—5, справедливы также и для $CR_{V(\sigma)}$ -подмногообразий M_m в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

§ 3. $CR_{V(\sigma)}$ -СТРУКТУРА, ЕСТЕСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ ВОЗНИКАЮЩАЯ НА M_m В $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$

Показано, что на нормально оснащенном подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры естественным образом возникают CR_V -структура и $CR_{V(\sigma)}$ -структура (см. [12]).

1. Из § 1 следует, что поля геометрических объектов η_i^A , ξ_A^i определяют на M_m распределения линейных элементов, обозначенные, соответственно, (η^A) , (ξ_A) ($\dim(\eta^A)_x = k$, $\dim(\xi_A)_x = s$). Показано, что распределение линейных элементов (η^A) является Ф-инвариантным распределением, т. е. в каждой точке $x \in M_m$ справедливо $\Phi(\eta^A)_x \subset (\eta^A)_x$.

Рассмотрим такие нормально оснащенные подмногообразия M_m в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, для которых выполняется следующее требование:

Требование (*). Элементы распределений (η^A) , (ξ_A) в каждой точке $x \in M_m$ покрывают всю касательную плоскость $T_x(M_m)$ подмногообразия M_m , т. е. $T_x(M_m) = (\eta^A)_x + (\xi_A)_x$.

Это означает, что в каждой точке $x \in M_m$ ранг системы векторов $\{\vec{\xi}_A, \vec{\varepsilon}_e\}$, ($e=1, \dots, k$), равен m , где $\vec{\xi}_A = \xi_A^i \vec{\Lambda}_i$, а векторы $\varepsilon_e = \varepsilon_e^i \vec{\Lambda}_i$ определяют элемент $(\eta^A)_x$ распределения (η^A) . Очевидно, что при этом $s+k \geq m$.

Если $s+k=m$, то в силу требования (*) распределения (η^A) , (ξ_A) определяют π -структуру в касательном расслоении $T(M_m)$, т.е. в каждой точке $x \in M_m$ справедливо $(\eta^A)_x \oplus (\xi_A)_x = T_x(M_m)$.

В зависимости от ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ можно различать два вида нормально оснащенных подмногообразий в многообразии почти контактной структуры:

Случай А. Матрица $\|\eta_i^A\|$ имеет максимально возможный ранг.

Случай Б. Матрица $\|\eta_i^A\|$ является матрицей пониженного ранга.

2. Случай А. В этом случае

$$\text{rang} \|\eta_i^A\| = n + 2 - m, \quad (3.1)$$

размерность элементов распределения (η^A) равна $2m - n - 2$, а размерность подмногообразия должна удовлетворять условию $m > \frac{n+2}{2}$.

Утверждение 3.1. Подмногообразие M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ в случае максимальности ранга $\|\eta_i^A\|$ (при выполнении условий (3.1)) не может быть m -мерным интегральным многообразием распределения η , т.е. не является подмногообразием типа 3 в M_{n+1} .

Действительно, если M_m — подмногообразие типа 3, то $\text{rang} \|\eta_i^A\| < n + 2 - m$.

Так как элементы распределений (η^A) , (ξ_A) покрывают всю касательную плоскость подмногообразия M_m (требование (*)), то в силу (3.1) $\dim(\xi_A)_x = s = n + 2 - m$. А это означает, что в случае А векторы $\vec{\xi}_A$ являются линейно независимыми векторами.

Из сказанного следует, что в случае А распределения (η^A) , (ξ_A) определяют π -структуру в касательном расслоении $T(M_m)$. Из теорем 1 и 2 ([16], § 1) следует, что поля структурных объектов $\{\eta_i^A\}$, $\{\xi_A^i\}$ ($f\xi\eta$)-структуры на M_m в случае максимальности их рангов определяют π -структуру в касательном расслоении $T(M_m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\det \|K_A^B\| = \det \|\xi_A^i \eta_i^B\| \neq 0. \quad (3.2)$$

Следовательно, в случае А выполняется также условие (3.2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. На нормально оснащем подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ π -структура в $T(M_m)$, определенная парой распределений (ξ_A) , (η^A) , в случае максимальности рангов матриц $\|\eta_i^A\|$, $\|\xi_A^i\|$ индуцирует CR -структуру, ассоциированную с полем нормали $\Phi(\xi_A)$.

тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_m)$.

Для доказательства данной теоремы найдем образы векторов $\vec{\xi}_A$ под действием аффинора Φ . Из равенств (1.13), (1.14) соответственно, следует:

$$\Phi \vec{\xi}_\alpha = -\rho_\alpha^A \xi_A^i \vec{\Lambda}_i + K_\alpha^\beta \vec{v}_\beta, \quad (3.3)$$

$$\Phi \vec{\xi}_{n+2} = \rho_{n+2}^\alpha (-\xi_\alpha^i \vec{\Lambda}_i + \rho_\alpha^\beta \vec{v}_\beta). \quad (3.4)$$

1) Пусть в каждой точке $x \in M_m$ справедливо $\vec{\xi} \in T_x(M_m)$. Это означает, что подмногообразие M_m является подмногообразием типа 2, а следовательно, выполняются условия $\rho_{n+2}^\alpha = 0$. Из невырожденности матрицы $\|K_A^B\|$ (см. (3.2)) следует невырожденность матрицы $\|K_\alpha^\beta\|$. Отсюда следует, что в каждой точке $x \in M_m$ размерность плоскости $\Phi(\xi_A)_x$, натянутой на векторы $\Phi \vec{\xi}_A$, равна $n+1-m$, и векторы $\Phi \vec{\xi}_\alpha$ не принадлежат касательной плоскости $T_x(M_m)$. Фактически, при этом плоскость $\Phi(\xi_A)_x$ совпадает с плоскостью $\Phi(\xi_\alpha)_x$, натянутой на векторы $\Phi \vec{\xi}_\alpha$. Следовательно, в каждой точке $x \in M_m$ справедливо:

$$T_x(M_m) = (\eta^A)_x \oplus (\xi_\alpha)_x \oplus \xi_x, \quad (3.5)$$

где

$$\Phi(\eta^A)_x \subset (\eta^A)_x, \quad \Phi(\xi_\alpha)_x \cap T_x(M_m) = \{x\}. \quad (3.6)$$

Условия (3.5), (3.6) означают, что пара распределений (ξ_A) , (η^A) в случае максимальности рангов матриц $\|\eta_i^A\|$, $\|\xi_A^i\|$ индуцирует на подмногообразии M_m типа 2 в многообразии почти контактной структуры CR -структуру, ассоциированную с полем нормалей $\Phi(\xi_A)$.

2) Пусть пара распределений (ξ_A) , (η^A) в случае максимальности рангов матриц $\|\eta_i^A\|$, $\|\xi_A^i\|$ индуцирует на подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ CR -структуру, ассоциированную с полем нормалей $\Phi(\xi_A)$.

Из этого следует, что в каждой точке $x \in M_m$ размерность плоскости $\Phi(\xi_A)_x$ равна $n+1-m$, т. е. $\dim \Phi(\xi_A)_x = \dim(\xi_A)_x - 1$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда структурный вектор $\vec{\xi}$ почти контактной структуры $(\Phi\xi\eta)$ принадлежит элементу распределения (ξ_A) [13], то есть $\vec{\xi} \in (\xi_A)_x \subset T_x(M_m)$. Следовательно, в этом случае подмногообразие M_m является подмногообразием типа 2 в многообразии почти контактной структуры.

Справедлива также теорема.

Теорема 3.2. На нормально оснащенном подмногообразии M_m (ν — поле нормалей) в многообразии почти контактной

структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ π -структура в $T(M_m)$, определенная парой распределений (ξ_A) , (η^A) , в случае максимальности рангов матриц $\|\xi_A^i\|$, $\|\eta_i^A\|$ индуцирует CR -структуру, ассоциированную с полем нормалей ν , тогда и только тогда, когда компоненты геометрического объекта ρ_A^B тождественно обращаются в нуль.

Таким образом, в случае А только на подмногообразии M_m типа 2 естественным образом возникает CR_ν -структура.

3. Случай Б. В этом случае

$$0 < \text{rang} \|\eta_i^A\| < n + 2 - m. \quad (3.7)$$

Известно [16], что размерность элементов распределения (η^A) всегда четная, следовательно, ранг матрицы $\|\eta_i^A\|$ понижается на четное число единиц. Пусть

$$\text{rang} \|\eta_i^A\| = n + 2 - m - 2t, \quad (3.8)$$

где $0 < 2t < n + 2 - m$. При этом $\dim(\eta^A)_x = 2m - n - 2 + 2t$. Следовательно, касательная плоскость $T_x(M_m)$ подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ содержит $(2m - n - 2 + 2t)$ -мерную Φ -инвариантную плоскость $(\eta^A)_x$.

Так как ранг матрицы $\|\eta_i^A\|$ понижен на $2t$ единиц, то справедливы следующие соотношения:

$$c_A^\xi \eta_i^A = c_\alpha^\xi \eta_i^\alpha + c_{n+2}^\xi \eta_i^{n+2} = 0, \quad (3.9)$$

где $\xi, \eta, \dots = 1, \dots, 2t$, c_A^ξ — некоторые функции, удовлетворяющие условиям

$$\text{rang} \|c_A^\xi\| = 2t, \quad (3.10)$$

$$dc_\alpha^\xi - c_\beta^\xi \vartheta_\alpha^\beta + c_\alpha^\eta \omega_\eta^\xi = c_{\alpha k}^\xi \theta^k, \quad (3.11)$$

$$dc_{n+2}^\xi + c_{n+2}^\eta \omega_\eta^\xi = c_{n+2k}^\xi \theta^k, \quad (3.12)$$

где ϑ_α^β — формы, определенные в § 1, а ω_η^ξ — новые формы, причем $\overline{\omega_\eta^\xi} = \omega_\eta^\xi|_{\theta^k=0}$ являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(2t, R)$.

Предположим теперь, что индексы σ, τ, \dots пробегает любые $2t$ значений ряда $(m+1, \dots, n+1)$, а индексы ρ, q, r, \dots пробегает остальные $(n+1 - m - 2t)$ значений.

Исследование случая Б для подмногообразия типа 3 проведено отдельно в конце настоящего пункта. Поэтому можно считать, что

$$\det \|c_\sigma^\xi\| \neq 0. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что матрица $\|c_\alpha^\xi\|$ имеет обратную матрицу $\|c_\xi^\sigma\|$:

$$c_\xi^\sigma c_\eta^\xi = \delta_\eta^\sigma, \quad c_\xi^\sigma c_\tau^\xi = \delta_\tau^\sigma. \quad (3.14)$$

Свернув равенства (3.9) с c_{ξ}^{σ} , получим:

$$\eta_i^{\sigma} = \mu_{\rho}^{\sigma} \eta_i^{\bar{\rho}} = \mu_{\rho}^{\sigma} \eta_i^{\rho} + \mu_{n+2}^{\sigma} \eta_i^{n+2}, \quad (3.15)$$

где индекс $\bar{\rho}$ пробегает все значения, принимаемые индексом ρ , и еще одно значение $n+2$. В равенствах (3.15)

$$\mu_{\rho}^{\sigma} = -c_{\xi}^{\sigma} c_{\xi}^{\sigma}. \quad (3.16)$$

Система величин $\mu_{\rho}^{\sigma} = \{\mu_{\rho}^{\sigma}, \mu_{n+2}^{\sigma}\}$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\mu_{\rho}^{\sigma} - \mu_{\rho}^{\sigma} \vartheta_{\rho}^{\sigma} + \mu_{\rho}^{\tau} \vartheta_{\tau}^{\sigma} + \vartheta_{\rho}^{\sigma} - \mu_{\rho}^{\sigma} \mu_{\rho}^{\tau} \vartheta_{\tau}^{\sigma} = \mu_{\rho k}^{\sigma} \theta^k, \quad (3.17)$$

$$d\mu_{n+2}^{\sigma} + \mu_{n+2}^{\tau} (\vartheta_{\tau}^{\sigma} - \mu_{\rho}^{\sigma} \vartheta_{\tau}^{\rho}) = \mu_{n+2 k}^{\sigma} \theta^k. \quad (3.18)$$

Из (3.17), (3.18) следует, что система величин $\{\mu_{\rho}^{\sigma}, \mu_{n+2}^{\sigma}\}$ образует на M_m геометрический объект, а система μ_{ρ}^{σ} является под-объектом этого объекта.

Свернув равенства (3.15) с f_j^i , получим

$$\rho_{\rho}^{\sigma} = -\rho_{\rho}^{\sigma} \mu_{\rho}^{\tau} + \mu_{\rho}^{\sigma} \rho_{\rho}^{\tau} \mu_{\rho}^{\tau} + \mu_{\rho}^{\sigma} \rho_{\rho}^{\sigma}, \quad (3.19)$$

и свернув эти же равенства с ξ_A^i , получим:

$$K_A^{\sigma} = \mu_{\rho}^{\sigma} K_A^{\bar{\rho}}. \quad (3.20)$$

Из равенств (3.20) следует, что при уменьшении ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ на $2t$ единиц ранг матрицы $\|K_B^A\|$ также уменьшается на $2t$ единиц.

Введем в рассмотрение следующие формы

$$\vartheta_q^{\rho} = \vartheta_q^{\rho} + \mu_q^{\sigma} \vartheta_{\sigma}^{\rho}, \quad (3.21)$$

$$\vartheta_{n+2}^{\rho} = \mu_{n+2}^{\sigma} \vartheta_{\sigma}^{\rho}. \quad (3.22)$$

Из равенств (3.21), (3.22) и систем дифференциальных уравнений (3.17), (3.18) следует, что в каждой фиксированной точке $x \in M_m$ формы ϑ_q^{ρ} являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(n+1-m-2t, R)$, а формы $\vartheta_q^{\bar{\rho}} = \{\vartheta_q^{\rho}, \vartheta_{n+2}^{\rho}, \vartheta_q^{n+2} = 0, \vartheta_{n+2}^{n+2} = 0\}$ — инвариантными формами некоторой группы Ли. Обозначим эту группу H .

Построим следующие системы величин:

$$\kappa_q^{\bar{\rho}} = \rho_q^{\bar{\rho}} + \mu_q^{\sigma} \rho_{\sigma}^{\bar{\rho}}, \quad (3.23)$$

$$d\kappa_q^{\bar{\rho}} + \kappa_r^{\bar{\rho}} \vartheta_q^{\bar{r}} + \kappa_q^{\bar{r}} \vartheta_r^{\bar{\rho}} = \kappa_q^{\bar{\rho} k} \theta^k. \quad (3.24)$$

Из (3.24) следует, что система величин $\kappa_{\bar{q}}^{\bar{p}}$ образует линейно однородный геометрический объект, присоединенный к группе H .

Величины $\eta_i^{\bar{p}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\eta_i^{\bar{p}} - \eta_j^{\bar{p}} \theta_j^i + \eta_i^{\bar{q}} \theta_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \eta_{ik}^{\bar{p}} \theta^k, \quad (3.25)$$

а следовательно, образуют на M_m геометрический объект, присоединенный к группе $D_m^1 \times H$.

Рассмотрим следующие системы величин:

$$L_{\bar{p}}^i = \xi_{\bar{p}}^i + \mu_{\bar{p}}^{\sigma} \xi_{\sigma}^i. \quad (3.26)$$

Продифференцировав (3.26), получим:

$$dL_{\bar{p}}^i + L_{\bar{p}}^j \theta_j^i - L_{\bar{q}}^i \theta_{\bar{p}}^{\bar{q}} = L_{\bar{p}k}^i \theta^k. \quad (3.27)$$

Следовательно, система величин (3.26) также образует геометрический объект, присоединенный к группе $D_m^1 \times H$.

Очевидно, что поле геометрического объекта $\eta_i^{\bar{p}}$ определяет на M_m распределение $(2m - n - 2 + 2t)$ -мерных линейных элементов (η^A), а поле геометрического объекта $L_{\bar{p}}^i$ — распределение $(n + 2 - m - 2t)$ -мерных линейных элементов L .

Свернув равенства (3.26) с $\eta_i^{\bar{q}}$, получим

$$L_{\bar{p}}^i \eta_i^{\bar{q}} = \kappa_{\bar{r}}^{\bar{q}} \kappa_{\bar{p}}^{\bar{r}} + \delta_{\bar{p}}^{\bar{q}} = \tilde{K}_{\bar{p}}^{\bar{q}}. \quad (3.28)$$

Из (3.23) следует, что матрица $\|\tilde{K}_{\bar{p}}^{\bar{q}}\|$ является невырожденной матрицей. Следовательно, распределения (η^A) и L в касательном расслоении $T(M_m)$ подмногообразия M_m определяют π -структуру.

Используя формулы охвата геометрических объектов f_j^i , $\eta_i^{\bar{p}}$, $L_{\bar{q}}^i$, $\kappa_{\bar{q}}^{\bar{p}}$, а также соотношений (1.17), получим конечные соотношения на компоненты этих объектов. Эти соотношения имеют вид (1.17). Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. На нормально оснащенном подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры при понижении ранга матрицы $\|\eta_i^{\bar{p}}\|$ на $2t$ единиц индуцируется новая $(f\xi\eta\rho)$ -структура со структурными объектами f_j^i , $\eta_i^{\bar{p}}$, $L_{\bar{q}}^i$, $\kappa_{\bar{q}}^{\bar{p}}$, поля геометрических объектов $\eta_i^{\bar{p}}$, $L_{\bar{q}}^i$ которой определяют в касательном расслоении $T(M_m)$ π -структуру.

Линейно независимые векторы $\vec{L}_{\bar{p}} = L_{\bar{p}}^i \vec{\Lambda}_i$ под действием линейного оператора Φ отображаются в векторы

$$\Phi \vec{L}_{\bar{p}} = -\kappa_{\bar{p}}^{\bar{q}} L_{\bar{q}} + \mu_{\bar{q}}^{\sigma} \tilde{K}_{\bar{p}}^{\bar{q}} \vec{v}_{\sigma} + K_{\bar{p}}^{\bar{q}} \vec{v}_{\bar{q}}. \quad (3.29)$$

Из невырожденности матрицы $\|\bar{K}_\rho^{\bar{L}}\|$ следует, что $\Phi\bar{L}_\rho \notin T_x(M_m)$.

В каждой точке $x \in M_m$ размерность плоскости ΦL_x , натянутой на векторы $\Phi\bar{L}_q$, равна $(n+2-m-2t)$, если структурный вектор $\bar{\xi}$ не принадлежит плоскости L_x , и равна $(n+1-m-2t)$, если структурный вектор $\bar{\xi}$ принадлежит плоскости L_x .

В $T_x(M_{n+1})$ рассмотрим σ -параметрический пучок нормально оснащенных плоскостей $N_x(\sigma)$ с общей инвариантной осью ΦL_x . Параметр σ равен $2t-2$, если $\bar{\xi}_x \notin T_x(M_m)$, и равен $2t-3$, если $\bar{\xi}_x \in T_x(M_m)$.

Итак, доказали справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.4. На нормально оснащенном подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ при понижении ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ на $2t$ единиц индуцируется CR -структура, ассоциированная полю σ -параметрического пучка нормалей с общей инвариантной осью ΦL_x .

При выполнении условий (3.8) подмногообразие M_m может быть либо типа 1, либо типа 2. Рассмотрим теперь случай, когда M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ типа 2. При этом $\rho_{n+2}^\alpha = 0$, $K_{n+2}^\alpha = 0$, $K_{n+2}^{n+2} = 0$, а следовательно, $\mu_{n+2}^\alpha = 0$. Из (3.26) следует, что если M_m типа 2, то вектор $\bar{L}_{n+2} = L_{n+2}^i \bar{A}_i$ совпадает со структурным вектором $\bar{\xi}$. Следовательно, в каждой точке $x \in M_m$ плоскость L_x представляет собой прямую сумму $L_x = L'_x \oplus \bar{\xi}_x$, где $L'_x - (n+1-m-2t)$ -мерная плоскость, натянутая на систему линейно независимых векторов \bar{L}_ρ . В таком случае мы имеем $T_x(M_m) = (\eta^A)_x \oplus L'_x \oplus \bar{\xi}_x$, где $\Phi L_x' \cap T_x(M_m) = \{x\}$, а это означает, что подмногообразие M_m несет $CR_{\nu(\sigma)}$ -структуру, ассоциированную полю σ -параметрического ($\sigma = 2t-3$) пучка нормалей $N(\sigma)$ с общей инвариантной осью $\Phi L_x'$.

Итак, доказана теорема.

Теорема 3.5. На нормально оснащенном подмногообразии M_m типа 2 в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ при понижении ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ на $2t$ единиц индуцируется CR -структура, ассоциированная с полем σ -параметрического пучка нормалей $N(\sigma)$ с общей инвариантной осью $\Phi L_x'$.

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда компоненты геометрического объекта $\kappa \frac{\bar{p}}{q}$ (см. (3.23)) тождественно обращаются в нуль. При этом справедливы теоремы.

Теорема 3.6. На нормально оснащенном подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ при понижении ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ на $2t$ единиц и при равенстве нулю компонент $\kappa \frac{\bar{p}}{q}$ естественным образом индуцируется f -

структура ранга $(2m + 2t - n - 2)$ и CR_v -структура.

Теорема 3.7. На нормально оснащенной подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ при понижении ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ на $2t$ единиц естественным образом индуцируется CR_v -структура тогда и только тогда, когда подмногообразии M_m снабжено f -структурой ранга $2m + 2t - n - 2$.

Мы исключали из рассмотрения подмногообразия типа 3. Рассмотрим теперь подмногообразии M_m типа 3. Аналитически это означает, что выполняются равенства $\eta_i^{n+2} = 0$. Свернув эти равенства с f_j^i , получим $\rho_\alpha^{n+2}\eta_i^\alpha = 0$. Из этого следует, что ранг матрицы $\|\eta_i^A\|$ понижен на 2 единицы.

Следовательно, если M_m является подмногообразием типа 3 в многообразии почти контактной структуры, то $\text{rang}\|\eta_i^A\| \leq n - m$ и $\dim(\eta^A)_x = k \leq 2m - n$.

Теоремы 3.4—3.7 остаются в силе и для подмногообразий типа 3 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

4. f -структура на M_m при его почти контактном вложении в M_{n+1} . В работах [6], [7] изучен вопрос о почти контактном вложении нечетномерного подмногообразия в многообразии почти контактной структуры.

Определение 3.1. Если на нечетномерном подмногообразии M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ естественным образом индуцируется почти контактная структура, то вложение M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ называется почти контактным вложением [6].

Укажем связь почти контактного вложения с индуцированной CR_v -структурой на M_m в многообразии почти контактной структуры.

Предположим теперь, что размерность подмногообразия M_m нечетная. Будем считать, что в равенствах (3.8) $2t = n + 1 - m$. А это означает, что $\text{rang}\|\eta_i^A\| = 1$ и $\dim(\eta^A)_x = k = m - 1$. При таком допущении пучок плоскостей $(\eta^A)_x$ вырождается в φ -инвариантную гиперплоскость, совпадающую с плоскостью $(\eta^{n+2})_x$. Так как $2t = n + 1 - m$, то индексы ξ, η, \dots и α, β, \dots пробегают одну и ту же область значений. Матрица $\|c_\alpha^\xi\|$ невырожденная и для обратной матрицы $\|c_\xi^{\alpha*}\|$ имеем:

$$c_\alpha^\xi c_\eta^\alpha = \delta_\eta^\xi, \quad c_\alpha^\xi c_\xi^{\beta*} = \delta_\alpha^\beta. \quad (3.30)$$

Равенство (3.15) при этом имеет вид:

$$\eta_i^\alpha = c^\alpha \eta_i^{n+2}, \quad (3.31)$$

где $c^\alpha = -c_\xi^\alpha c_{n+2}^\xi$. Поле геометрического объекта c^α определяет на M_m поле вектора $\vec{C} = c^\alpha \vec{v}_\alpha$, принадлежащего нормально оснащающей плоскости $v_x(M_m)$.

Введем в рассмотрение следующие системы величин:

$$\varkappa = c^\alpha \rho_\alpha^{n+2}, \quad (3.32)$$

$$L^i = \xi_{n+2}^i + c^\alpha \xi_\alpha^i. \quad (3.33)$$

Продифференцировав эти равенства, убеждаемся, что функции \varkappa определяют на M_m абсолютный инвариант, а функции L^i — геометрический объект, присоединенный к D_m^1 . Поле геометрического объекта (3.33) определяет на M_m поле вектора $\vec{L} = L^i \vec{\Lambda}_i$.

На подмногообразии M_m справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.8. Распределение $(m-1)$ -мерных плоскостей (η^{n+2}) и поле прямых, порожденное полем вектора \vec{L} , определяют в касательном расслоении $T(M_m)$ подмногообразия M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ π -структуру.

Теорема 3.9. На нормально оснащенном подмногообразии M_m (m — нечетное) в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ при понижении ранга матрицы $\|\eta_i^A\|$ до 1 индуцируется $(f\xi\eta\rho)$ -структура коранга 1.

Структурными объектами индуцированной на M_m $(f\xi\eta\rho)$ -структуры коранга 1 являются следующие геометрические объекты: f_j^i , L^i , η_j^{n+2} , \varkappa .

Теорему 3.9 можно сформулировать и следующим образом.

Если в каждой точке $x \in M_m$ гиперплоскость η_x^{n+2} Φ -инвариантна, то на нормально оснащенном подмногообразии M_m естественным образом индуцируется $(f\xi\eta\rho)$ -структура коранга 1.

Следствие. Если в каждой точке $x \in M_m$ гиперплоскость η_x^{n+2} Φ -инвариантна и вектор \vec{C} принадлежит η_x (т. е. $\varkappa = 0$), то на нормально оснащенном подмногообразии M_m естественным образом индуцируется почти контактная структура.

Следовательно, при $\varkappa = 0$ вложение M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ является почти контактным вложением.

Найдем образ вектора \vec{L} под действием линейного оператора Φ :

$$\Phi\vec{L} = -\varkappa c^\beta \vec{\xi}_\beta + (1 + \varkappa^2) \vec{C}. \quad (3.34)$$

Из (3.34) следует, что вектор $\Phi\vec{L}$ в каждой точке $x \in M_m$ не принадлежит касательной плоскости $T_x(M_m)$. Рассмотрим теперь пучок нормально оснащающихся плоскостей $N_x(\sigma)$, осью которого является прямая, проходящая через точку x и направленная по вектору $\Phi\vec{L}$. При этом $\sigma = 2(n-m)$.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 3.10. Если в каждой точке $x \in M_m$ гиперплоскость η_x^{n+2} Φ -инвариантна, то на нормально оснащенном подмногообразии M_m естественным образом индуцируется $CR_{\nu(\sigma)}$ -структура, ассоциированная с полем пучка нормалей $N_x(\sigma)$, где $\sigma = 2(n-m)$.

Если $\kappa=0$, то из (3.34) следует, что $\vec{\Phi L} = \vec{C}$, а это означает, что на M_m индуцируется CR_v -структура.

Теорема 3.11. Если в каждой точке $x \in M_m$ гиперплоскость $(\eta^{n+2})_x$ Φ -инвариантна, то на нормально оснащенном подмногообразии M_m индуцируется CR_v -структура тогда и только тогда, когда вложение M_m в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ является почти контактным вложением.

5. Гиперповерхность в $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$. В почти контактном многообразии M_{n+1} рассмотрим гиперповерхность $M_m (m=n)$. При этом $i, j, \dots = 1, \dots, m=n; \alpha, \beta, \dots = n+1; A, B, \dots = n+1, n+2$.

Из (3.3), (3.4) следует

$$\begin{aligned} \vec{\Phi \xi}_{n+1} &= -\rho_{n+1}^A \vec{\xi}_A + \rho_{n+1}^{n+1} \vec{v}_{n+1}, \\ \vec{\Phi \xi}_{n+2} &= \rho_{n+2}^{n+1} (-\vec{\xi}_{n+1} + \rho_{n+2}^{n+1} \vec{v}_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

а следовательно, для гиперповерхности M_m справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.12. На любой нормально оснащенной гиперповерхности M_m типа 2 в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ естественным образом индуцируется CR -структура, ассоциированная с полем нормали $\vec{\Phi \xi}_{n+1}$.

Теорема 3.13. Гиперповерхности M_m типа 1 и типа 3 в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\Phi\xi\eta)$ не допускают оснащения CR_v -структурой.

§ 4. CR -СТРУКТУРА В МЕТРИЧЕСКОМ ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

1. Индуцированная метрическая $(f\xi\eta\rho)$ -структура. Предположим, что на дифференцируемом многообразии M_{n+1} почти контактной структуры введена положительно определенная риманова метрика G , согласованная с почти контактной структурой (см. § 1). Эта метрика индуцирует: а) риманову метрику g на подмногообразии M_m , определенную полем геометрического объекта $g_{ij} = G_{IJ} \Lambda_i^I \Lambda_j^J$; б) метрический тензор в нормальном расщеплении $\nu(M_m)$, определенный полем геометрического объекта $g_{\alpha\beta} = G_{IJ} \nu_\alpha^I \nu_\beta^J$; в) геометрический объект $g_{i\alpha} = g_{\alpha i} = G_{IJ} \Lambda_i^I \nu_\alpha^J$.

Очевидно, что в каждой точке $x \in M_m$ плоскости $T_x(M_m)$, $\nu_x(M_m)$ взаимно ортогональны в метрике G тогда и только тогда, когда $g_{i\alpha} = 0$.

Нормально оснащающую плоскость $\nu_x(M_m)$, ортогональную касательной плоскости $T_x(M_m)$, назовем ортогонально оснащающей плоскостью и обозначим $T_x^\perp(M_m)$.

Так как многообразие $(\Phi\xi\eta G)$ -структуры можно интерпретировать как многообразие $(\Phi\xi\eta)$ -структуры, оснащенное полем

тензора G , то естественно, геометрия подмногообразия M_m в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ -структуры переносится на случай подмногообразия M_m в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ -структуры. В связи с этим, теоремы и соотношения, приведенные в §§ 1—3, справедливы и для рассматриваемого в этом параграфе подмногообразия M_m . Однако возникают и новые соотношения, связывающие индуцированные метрикой G объекты g_{ij} , g_{ia} , $g_{\alpha\beta}$ с компонентами структурных объектов индуцированной на M_m $(f\xi\eta\rho)$ -структуры.

Справедлива теорема [11], [13]:

Теорема 4.1. На подмногообразии M_m , погруженном в метрическое почти контактное многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ и нормально оснащенный полем плоскостей $\nu_x(M_m)$, индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$ -структура.

2. Понятие CR -структуры.

Определение 4.1. Подмногообразие M_m типа 2 ($\xi_x \in T_x(M_m)$) в многообразии метрической почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ называется CR -подмногообразием, если существуют в касательном расслоении $T(M_m)$ распределения линейных элементов D и D^\perp , и в каждой точке $x \in M_m$ выполняются следующие условия: 1) $T_x(M_m) = D_x \oplus D_x^\perp \oplus \xi_x$ и D_x , D_x^\perp , ξ_x взаимно ортогональны в метрике G ; 2) распределение линейных элементов D инвариантно относительно действия φ , т. е. $\varphi D_x \subset D_x$; 3) распределение линейных элементов D^\perp антиинвариантно, т. е. $\varphi D_x^\perp \subset T_x^\perp(M_m)$ (см. [48]).

Определение 4.2. Подмногообразие M_m типа 3 ($T_x(M_m) \subset \pi_x$) в многообразии метрической почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ называется CR -подмногообразием, если существуют в касательном расслоении $T(M_m)$ распределения линейных элементов D и D^\perp , и в каждой точке $x \in M_m$ выполняются следующие условия: 1) $T_x(M_m) = D_x \oplus D_x^\perp$ и D_x , D_x^\perp взаимно ортогональны в метрике G ; 2) распределение линейных элементов D инвариантно относительно действия φ , т. е. $\varphi D_x \subset D_x$; 3) распределение линейных элементов D^\perp антиинвариантно, т. е. $\varphi D_x^\perp \subset T_x^\perp(M_m)$ (см. [39]).

Замечание. CR -подмногообразия в многообразии метрической почти контактной структуры являются $CR_{T^\perp(M_m)}$ -многообразиями, а CR -структура на подмногообразии M_m ассоциирована с полем ортогонально оснащающих плоскостей $T^\perp(M_m)$.

Докажем теперь, что если на многообразии M_{n+1} почти контактной структуры задана произвольная риманова метрика h_{ij} , то на M_{n+1} можно определить внутренним образом новую риманову метрику G , согласованную с почти контактной структурой. При этом подмногообразие M_m , снабженное $CR_{\nu(o)}$ -структурой, становится CR -подмногообразием.

Итак, допустим, что подмногообразие M_m в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ оснащено $CR_{\nu(\sigma)}$ -структурой, т. е. CR -структурой, ассоциированной с σ -параметрическим пучком нормалей $\nu(\sigma)$ с общей инвариантной осью φL_x (см. § 2). В пучке нормалей $\nu(\sigma)$ возьмем произвольно фиксированную нормальную оснащающую плоскость ν_x в точке $x \in M_m$. Тогда из компонент тензора римановой метрики h_{IJ} , компонент фундаментальных объектов подмногообразия и нормали определим систему величин:

$$h_{IJ} = h_{KJ} (\Lambda_i^K \Lambda_i^* - \nu_\alpha^K \nu_j^{\alpha*}), \quad \bar{h}_{IJ} = \frac{1}{2} h_{IJ}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что \bar{h}_{IJ} является метрическим тензором на многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. В метрике \bar{h} нормально оснащающая плоскость $\nu_x(M_m)$ является ортогонально оснащающей плоскостью, т. е. $\nu_x(M_m) = T_x^\perp(M_m)$.

По известным формулам (см., например, [2]) метрику \bar{h} преобразуем так, чтобы новая метрика G стала согласованной с почти контактной структурой, т. е. выполнялись равенства (1.6). Формула охвата компонент метрического тензора G_{IJ} имеет вид:

$$G_{IJ} = \frac{1}{2} (\tilde{h}_{IJ} + \tilde{h}_{LK} \varphi_I^L \varphi_J^K + \eta_I \eta_J), \quad (4.2)$$

где

$$\tilde{h}_{IJ} = \bar{h}_{LK} \varphi_I^L \varphi_J^K + \eta_I \eta_J. \quad (4.3)$$

Итак, имеем метрическую почти контактную структуру $(\varphi\xi\eta G)$ на многообразии M_{n+1} .

Найдем теперь условия ортогональности $L_x, \varphi L_x$ в метрике G . Для этого свернем (4.2) с $L_u^I \varphi_M^J L_v^M$:

$$G_{IJ} L_u^I \varphi_M^J L_v^M = \frac{1}{2} \bar{h}_{LK} \nu_\alpha^{LK} (u_u^\alpha \eta_J L_v^J - u_v^\alpha \eta_J L_u^J). \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что если в каждой точке $x \in M_m$ выполняется одно из следующих условий:

$$\bar{h}_{LK} \nu_\alpha^{LK} = 0, \quad (4.5)$$

$$\eta_J L_u^J = 0, \quad (4.6)$$

то плоскости $L_x, \varphi L_x$ в метрике G являются ортогональными плоскостями.

В M_{n+1} , снабженном $(\varphi\xi\eta G)$ -структурой, справедливо:

1) Если в многообразии метрической почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ выполнены условия (4.5), и в каждой точке структурный вектор $\vec{\xi}$ принадлежит элементам распределения D , то M_m является CR -подмногообразием (в смысле определения 4.1).

Такие CR -подмногообразия называют ξ -горизонтальными [31].

2) Если в многообразии метрической почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta G)$ выполнены условия (4.5), и в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор ξ не принадлежит элементам распределения D , то M_m является CR -подмногообразием (в смысле определения 4.1).

Такие CR -подмногообразия называют ξ -вертикальными [31].

3) Если в многообразии метрической почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta G)$ выполнены условия (4.6), и в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор ξ принадлежит ортогонально оснащающей плоскости $T_x^\perp(M_m)$, то M_m является CR -подмногообразием (в смысле определения 4.2).

Такие CR -подмногообразия называют ξ^\perp -подмногообразиями [39].

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 4.2. Если в многообразии M_{n+1} почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$ с произвольной римановой метрикой $h_{I,J}$ задано $CR_{\nu(\sigma)}$ -подмногообразие M_m , то в M_{n+1} можно определить внутренним образом риманову метрику G , согласованную с почти контактной структурой так, что подмногообразие M_m становится CR -подмногообразием либо в смысле определения 4.1, либо 4.2.

3. Ковариантные производные структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$ -структуры. Для дальнейшего исследования CR -подмногообразий предположим, что в многообразии M_{n+1} задана риманова связность $D = \{D_{JK}^I\}$, ассоциированная метрическому тензору G [10]. В этом случае тензор G в связности D ковариантно постоянен, и формы

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - D_{JK}^I \omega^K \quad (4.7)$$

являются формами римановой связности D .

Обозначим через $\dot{\gamma}$ индуцированную связность на M_m , а через $\overset{*}{\gamma}$ — вертикальную связность в ортогонально оснащающем расслоении. Известно [10], что если D — риманова, то $\dot{\gamma}$ — также риманова, ассоциированная метрическому тензору g_{ij} , а $\overset{*}{\gamma}$ — метрическая связность, ассоциированная метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$.

При этом формулы Гаусса и Вейенгартена, соответственно, имеют вид [10]:

$$\tilde{\Lambda}_{ik}^j = H_{ik}^\alpha \nu_\alpha^j, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\nu}_{\alpha k}^j = l_{\alpha k}^i \Lambda_i^j. \quad (4.9)$$

Компоненты тензоров H_{ik}^α , $l_{\alpha k}^i$ связаны известными конечными соотношениями (см. [10], (1.20)):

$$l_{\alpha k}^i g_{ij} = -g_{\alpha\beta} H_{jk}^\beta. \quad (4.10)$$

Используя уравнения Гаусса и Вейенгартена, из равенств (1.12)–(1.16) найдем ковариантные производные структурных объектов индуцированной на M_m ($f\xi\eta\rho$)-структуры в связностях $D, \overset{\circ}{\gamma}, \overset{*}{\gamma}$:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\nabla}_k f_i^m &= (\nabla_k \Phi_J^I) \Lambda_i^J \overset{*}{\Lambda}_I^m + H_{ik}^\beta \xi_\beta^m - \eta_i^\alpha l_{\alpha k}^m, \\
 \overset{\circ}{\nabla}_k \eta_i^\beta &= (\nabla_k \Phi_J^I) \Lambda_i^J \overset{*}{\nu}_I^\beta + H_{ik}^\gamma \rho_\gamma^\beta - f_i^j H_{jk}^\beta, \\
 \overset{\circ}{\nabla}_k \xi_\alpha^i &= (\nabla_k \Phi_J^I) \nu_\alpha^J \overset{*}{\Lambda}_I^i - l_{\alpha k}^m f_m^i + \rho_\alpha^\beta l_{\beta k}^i, \\
 \overset{*}{\nabla}_k \rho_\alpha^\beta &= (\nabla_k \Phi_J^I) \nu_\alpha^J \overset{*}{\nu}_I^\beta - l_{\alpha k}^m \eta_m^\beta + \xi_\alpha^j H_{jk}^\beta, \\
 \overset{\circ}{\nabla}_k \xi_{n+2}^i &= (\nabla_k \xi^I) \overset{*}{\Lambda}_I^i + \rho_{n+2}^\beta l_{\beta k}^i, \\
 \overset{\circ}{\nabla}_k \eta_i^{n+2} &= (\nabla_k \eta_I) \Lambda_I^i + H_{ik}^\beta \rho_\beta^{n+2}, \\
 \overset{*}{\nabla}_k \rho_{n+2}^\beta &= (\nabla_k \xi^I) \nu_I^\beta - \xi_{n+2}^j H_{jk}^\beta, \\
 \overset{*}{\nabla}_k \rho_\alpha^{n+2} &= (\nabla_k \eta_J) \nu_\alpha^J + l_{\alpha k}^i \eta_i^{n+2},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $\nabla, \overset{\circ}{\nabla}, \overset{*}{\nabla}$ — символы ковариантных производных в связностях $D, \overset{\circ}{\gamma}, \overset{*}{\gamma}$, соответственно, а $\overset{\circ}{\nabla}$ — символ ковариантной производной в связностях $\overset{\circ}{\gamma}, \overset{*}{\gamma}$.

4. CR -подмногообразия типа 2. Пусть M_m — CR -подмногообразие типа 2 (см. § 2). В этом случае $\rho_{n+2}^\alpha = 0$ и равенства (1.14) примут вид: $\overset{\circ}{\xi} = \xi_{n+2}^i \Lambda_i$. Будем считать, что подмногообразие M_m нормально оснащено полем плоскостей $T_x^\perp(M_m)$. При этом $g_{i\alpha} = 0$. Для таких подмногообразий справедливо:

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= g_{im} f_i^t f_j^m + g_{\alpha\beta} \eta_i^\alpha \eta_j^\beta + \eta_i^{n+2} \eta_j^{n+2}, \\
 g_{\alpha\beta} &= g_{ij} \xi_\alpha^i \xi_\beta^j + g_{\gamma\delta} \rho_\alpha^\gamma \rho_\beta^\delta, \\
 g_{im} f_i^t \xi_\alpha^m &= g_{\beta\gamma} \eta_i^\beta \rho_\alpha^\gamma, \\
 \eta_i^{n+2} &= g_{ij} \xi_{n+2}^j, \quad \rho_\alpha^{n+2} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Для CR -подмногообразий типа 2 справедливы теоремы, аналогичные теоремам 2.1–2.5. Доказательства этих теорем приведены в работах [22], [48].

Связность $\overset{\circ}{\gamma}$, определенная на подмногообразии M_m , индуцирует связности на распределениях линейных элементов D и $L\oplus\{\xi\}$.

Пусть связность $\overset{1}{\gamma}$ на распределении D является индуцированной, а связность $\overset{2}{\gamma}$ на распределении $L\oplus\{\xi\}$ — вертикальной. Запишем соответствующие уравнения Гаусса и Вейенгартена

для $\{D_a^i\}$, $\{L_u^i\}$, $\{\xi_{n+2}^i\}$:

$$\nabla_k^1 D_a^i = h_{ak}^u L_u^i + h_{ak}^{n+2} \xi_{n+2}^i, \quad (4.13)$$

$$\nabla_k^2 L_u^j = k_{uk}^a D_a^j, \quad \nabla_k^0 \xi_{n+2}^i = k_{n+2k}^a D_a^i, \quad (4.14)$$

где ∇^1 — символ ковариантной производной относительно связностей $\overset{\circ}{\gamma}$, $\overset{1}{\gamma}$, а ∇^2 — символ ковариантной производной относительно связностей $\overset{\circ}{\gamma}$, $\overset{2}{\gamma}$.

В § 2 найдены объекты неголономности распределений D и L (см. (2.9), (2.10)). Выразим компоненты этих объектов неголономности через ковариантные производные объектов D_a^i , L_u^i :

$$r_{ab}^i = (\nabla_k^1 D_a^i) D_b^k - (\nabla_k^1 D_b^i) D_a^k, \quad (4.15)$$

$$r_{uv}^i = (\nabla_k^2 L_u^i) L_v^k - (\nabla_k^2 L_v^i) L_u^k. \quad (4.16)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. Если M_m типа 2 является CR -подмногообразием, то справедливы равенства:

$$1) \eta_i^\alpha r_{uv}^i = 0, \quad \eta_i^{n+2} r_{uv}^i = 0, \quad (4.17)$$

$$2) g_{ki} \eta_{[j|a|t]}^i L_u^j L_v^t = g_{it} (\nabla_k \Phi_j^i) \overset{*}{\Lambda}^i L_u^j L_v^t, \quad (4.18)$$

$$3) f_j^i r_{ab}^j = 0, \quad \eta_j^{n+2} r_{ab}^j = 0. \quad (4.19)$$

Из (4.17) — (4.18) следует

Теорема 4.3. Необходимыми и достаточными условиями голономности антиинвариантного распределения D^\perp CR -подмногообразия являются следующие равенства:

$$g_{mj} f_i^m (\nabla_k \Phi_j^i) L_u^j \overset{*}{\Lambda}^i L_v^k = 0. \quad (4.20)$$

Из равенств (4.19) следует:

$$r_{ab}^i = -\xi_a^i [(\nabla_k \Phi_{[j|a|l]}^i) \Lambda_j^l \overset{*}{\nu}^i - f_{[j|H_{[m|k]}^i]}^m] D_a^j D_b^k. \quad (4.21)$$

5. CR -подмногообразия в многообразии Сасаки.

1. Нормальное контактное метрическое многообразие M_{n+1} называется многообразием Сасаки [29]. Блэр [29] нашел необходимые и достаточные условия, при выполнении которых многообразие $M_{n+1}(\phi\xi\eta G)$ является многообразием Сасаки. Эти условия имеют вид:

$$\nabla_K \Phi_J^I = G_{KJ} \xi^I - \eta_J \delta_K^I. \quad (4.22)$$

Используя (1.2) и (4.22), получим

$$\nabla_K \xi^I = -\Phi_K^I, \quad \nabla_K \eta_J = G_{J\ K} \Phi_K^I. \quad (4.23)$$

Яно и Кон доказали [44], что в многообразии Сасаки, если структурный вектор ξ в каждой точке x принадлежит $T_x^\perp(M_m)$, то подмногообразие M_m является антиинвариантным подмногообразием. Следовательно, в многообразии Сасаки не существует нетривиальных CR -подмногообразий типа 3.

С учетом равенства нулю компонент ρ_{n+2}^α , ρ_α^{n+2} и формул (4.22), (4.23), из равенств (4.11) находим ковариантные производные структурных объектов индуцированной на M_m ($f\xi\eta\rho$)-структуры. Эти формулы, названные основными формулами, приведены в работах [22], [18], [41].

2. Одной из основных тем исследования CR -подмногообразий является проблема интегрируемости распределений D , D^\perp , $D \oplus \{\xi\}$, $D^\perp \oplus \{\xi\}$, $D \oplus D^\perp$ в многообразии Сасаки.

Теорема 4.4 [22]. Антиинвариантное распределение D^\perp CR -подмногообразия в многообразии Сасаки всегда интегрируемо.

Действительно, в силу равенств (4.22), условия (4.20) в многообразии Сасаки всегда выполняются.

Теорема 4.5. [22], [48]. Пусть M_m — CR -подмногообразие в многообразии Сасаки. Тогда справедливо:

- 1) распределение $D^\perp \oplus \{\xi\}$ всегда интегрируемо;
- 2) распределения D и $D \oplus D^\perp$ не могут быть интегрируемыми;
- 3) распределение $D \oplus \{\xi\}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$H_{m[kf_i^m]}^\alpha x^k y^l = 0, \quad (4.24)$$

где $\vec{X} = x^i \vec{\Lambda}_i$, $\vec{Y} = y^j \vec{\Lambda}_j$ — произвольные векторы из D_x .

В бескоординатной записи равенства (4.24) имеют вид:

$$h(X, \varphi Y) = h(\varphi X, Y), \quad X, Y \in D, \quad (4.25)$$

где $h(X, Y)$ — вторая фундаментальная форма подмногообразия.

Теорема 4.6 [23]. Пусть M_m — CR -подмногообразие в многообразии Сасаки. Тогда эквивалентны следующие три предположения: 1) распределение $D \oplus \{\xi\}$ -интегрируемо; 2) вторая фундаментальная форма M_m удовлетворяет условию (4.25); 3) вторая фундаментальная форма M_m удовлетворяет условию:

$$G(h(X, \varphi Y) \varphi Z) = G(h(\varphi X, Y), \varphi Z), \quad (4.26)$$

где $X, Y \in D$, $Z \in D^\perp$.

3. Изучены [19], [25] различные виды CR -подмногообразий в многообразии Сасаки, характеризующиеся некоторыми дополнительными условиями на вторую фундаментальную форму подмногообразия M_m .

Известно, что M_m — вполне геодезическое подмногообразие, если

$$h(X, Y) = 0, \quad X, Y \in T_x(M_m). \quad (4.27)$$

Если условия (4.27) выполняются для произвольных векторов X, Y , принадлежащих элементу \mathcal{H}_x некоторого распределения \mathcal{H} ($\mathcal{H}_x \subset T_x(M_m)$), то M_m называют \mathcal{H} -геодезическим. Исходя из этого, в многообразии Сасаки вводятся понятия: D -геодезические, D^\perp -геодезические, $D \oplus \{\xi\}$ -геодезические, $D \oplus D^\perp$ -геодезические CR -подмногообразия M_m [19], [25].

Доказано, что в многообразии Сасаки не существует нетривиальных вполне омбилических, а следовательно, и вполне геодезических CR -подмногообразий [22], [25]. Все вполне омбилические CR -подмногообразия являются ϕ -инвариантными подмногообразиями. Необходимыми и достаточными условиями $D \oplus \{\xi\}$ -геодезичности CR -подмногообразия M_m являются условия $h(X, Y) = 0$, где $X, Y \in D$ [25].

CR -подмногообразия M_m в многообразии Сасаки называются (D, D^\perp) -геодезическими (смешанно вполне геодезическими), если $h(X, Y) = 0$, $X \in D, Y \in D^\perp$ [19], [41], [31].

Если 1-форма u со значениями в нормальном расслоении параллельна в связности $\overset{*}{\nabla}$, то CR -подмногообразии в многообразии Сасаки является (D, D^\perp) -геодезическим (u получена из равенств $uX = \phi QX, X \in T_x(M_m)$) [20]. CR -подмногообразии в многообразии Сасаки является (D, D^\perp) -геодезическим тогда и только тогда, когда вектор $\vec{B}_1 = l_{\alpha k}^i N^\alpha x^k$ принадлежит элементу распределения D ($\vec{N} = N^\alpha \vec{v}_\alpha \in T_x^*(M_m), \vec{X} = x^i \vec{\Lambda}_i \in D$) и вектор $\vec{B}_2 = l_{\alpha k}^i N^\alpha y^k$ принадлежит элементу распределения $D \oplus \{\xi\}$ ($\vec{Y} = y^i \vec{\Lambda}_i \in D^\perp \oplus \{\xi\}$) [31], [25] (D, D^\perp) -геодезическое CR -подмногообразие в многообразии Сасаки называется (D, D^\perp) -слоеным, если распределение $D \oplus \{\xi\}$ -инволютивное [25].

4. Интегральные многообразия максимальной размерности голономного распределения называются листьями.

Приведем основные геометрические характеристики листов голономных распределений линейных элементов на CR -подмногообразии M_m в многообразии Сасаки.

В силу теорем 4.4 и 4.5 распределения D^\perp и $D^\perp \oplus \{\xi\}$ голономные. Каждый лист распределения D^\perp является антиинвариантным подмногообразием типа 3, а каждый лист распределения $D^\perp \oplus \{\xi\}$ является антиинвариантным подмногообразием типа 2.

Предположим, что условия (4.24) для CR -подмногообразия M_m выполняются. В этом случае в силу теоремы 4.5 распределение $D \oplus \{\xi\}$ инволютивно. Каждый лист распределения $D \oplus \{\xi\}$ является ϕ -инвариантным подмногообразием типа 2.

Если CR -подмногообразии M_m является $D \oplus \{\xi\}$ -геодезическим, то каждый лист распределения $D \oplus \{\xi\}$ вполне геодезическим вложен в многообразии Сасаки M_{n+1} [19], [25].

Если CR -подмногообразии M_m в многообразии Сасаки является (D, D^\perp) -геодезическим, то

1) каждый лист антиинвариантного распределения D^\perp вполне геодезически вложен в M_m [19], [25];

2) каждый лист антиинвариантного распределения D^\perp вполне геодезически вложен в M_{n+1} тогда и только тогда, когда M_m является D^\perp -геодезическим [19], [25].

Каждый лист распределения D^\perp CR -подмногообразия в многообразии Сасаки вполне геодезически вложен в M_m тогда и только тогда, когда вектор $h(X, Y)$ ($X \in D^\perp, Y \in D$) принадлежит $\tilde{\nu}$ (плоскость $\tilde{\nu}_x$ принадлежит плоскости $T_x^\perp(M_m)$ и ортогональна ϕD_x^\perp) [25].

Каждый лист распределения D^\perp CR -подмногообразия в многообразии Сасаки M_{n+1} вполне геодезически вложен в M_{n+1} тогда и только тогда, когда вектор $\nabla_{X\phi} Y$ ($X, Y \in D^\perp$) принадлежит ϕD^\perp и вектор $h(X, Z)$ ($X \in D^\perp, Z \in D \oplus D^\perp$) принадлежит $\tilde{\nu}$ [25].

5. Особый интерес исследования представляют CR -подмногообразия M_m в многообразии Сасаки, характеризующиеся тем, что в каждой точке $x \in M_m$ $\dim D_x^\perp = \dim T_x^\perp(M_m)$. В этом случае $\phi D_x^\perp = T_x^\perp(M_m)$. Такие CR -подмногообразия названы родовыми CR -подмногообразиями (generic) [20], [48]. Приведем основные результаты исследования родовых CR -подмногообразий:

1) Родовое CR -подмногообразие в многообразии Сасаки является (D, D^\perp) -геодезическим тогда и только тогда, когда каждый лист антиинвариантного распределения D^\perp вполне геодезически вложен в M_m [25].

2) Если M_m — родовое CR -подмногообразие в многообразии Сасаки с плоской нормальной связностью, то оно является (D, D^\perp) -геодезическим CR -подмногообразием [21].

3) Если M_m — родовое CR -подмногообразие в многообразии Сасаки, то каждый лист антиинвариантного распределения D^\perp вполне геодезический в M_{n+1} тогда и только тогда, когда M_m (D, D^\perp) -геодезически и D^\perp -геодезически вложен в M_{n+1} [25].

4) f -структура на M_m называется η -параллельной [48], если

$$\overset{\circ}{\nabla}_k f_j^i = g_{im} P_k^i P_j^m \xi_{n+2}^i - \eta_j^{n+2} P_k^i. \quad (4.28)$$

Пусть M_m — родовое CR -подмногообразие. Если f -структура η -параллельна, то M_m локально является произведением римановых подмногообразий $M_1 \times M_2$, где M_1 — вполне геодезическое инвариантное подмногообразие и M_2 — антиинвариантное подмногообразие типа 3 в M_{n+1} [25].

6. CR -подмногообразие M_m в многообразии Сасаки называется CR -произведением (полуинвариантным произведением), если M_m локально является произведением римановых подмногообразий $M_1 \times M_2$, где M_1 — инвариантное подмногообразие и M_2 — антиинвариантное подмногообразие типа 3 в M_{n+1} [41], [34].

Следовательно, если CR -подмногообразие является CR -произведением, то M_1 является листом инвариантного распределения $D\oplus\{\xi\}$, а M_2 — листом антиинвариантного распределения D^\perp . Очевидно, что если M_m — CR -произведение, то распределение $D\oplus\{\xi\}$ — голономное, т. е. выполняются условия (4.25).

CR -подмногообразие M_m является CR -произведением в многообразии Сасаки тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих требований:

- 1) f -структура на M_m η -параллельна [41];
- 2) вектор $\vec{A} = (\nabla_k x^l) y^k \vec{\Lambda}_l$ принадлежит элементу распределения $D\oplus\{\xi\}$ ($\vec{X} = x^i \vec{\Lambda}_i \in D_x$, $\vec{Y} = y^i \vec{\Lambda}_i \in T_x(M_m)$) [19];
- 3) справедливы равенства

$$\xi_\alpha^i H_{ij}^\alpha x^l y^j = 0, \quad (4.29)$$

где $X \in D_x$, $Y \in T_x(M_m)$ [19];

- 4) 1-форма u параллельна в связности $\tilde{\gamma}^*$ [20].

Теорема 4.7. Пусть M_m — CR -подмногообразие в многообразии Сасаки. Тогда эквивалентны следующие предложения [19]:

- 1) M_m — CR -произведение;
- 2) выполнены условия:

$$l_{\alpha k}^l x^k \eta_m^\alpha z^m = 0, \quad (4.30)$$

где $X \in D$, $Z \in D^\perp$;

- 3) вторая фундаментальная форма удовлетворяет условию:

$$h(Y, \Phi X) = \Phi h(Y, X), \quad X \in D_x, \quad Y \in T_x(M_m).$$

7. Известно (см., например, [41]), что Φ -бисекционная кривизна в многообразии Сасаки M_{n+1} для двух ортонормированных векторов X, Y определяется по формулам:

$$\tilde{H}_B(X, Y) = R(X, \Phi X, \Phi Y, Y), \quad (4.31)$$

где R — тензор кривизны многообразия M_{n+1} . В работе [41] изучены CR -подмногообразия в M_{n+1} , для которых Φ -бисекционная кривизна $\tilde{H}_B < -2$ и $\tilde{H}_B > -2$. Справедливы следующие два предложения:

1) Пусть M_{n+1} — многообразие Сасаки с Φ -бисекционной кривизной $\tilde{H}_B < -2$. Тогда каждое CR -подмногообразие, являющееся CR -произведением, либо инвариантное подмногообразие, либо антиинвариантное подмногообразие типа 2 в M_{n+1} .

2) Пусть M_{n+1} — многообразие Сасаки с Φ -бисекционной кривизной $\tilde{H}_B > -2$ и CR -подмногообразие M_m — CR -произведение. Тогда 1) M_m не является родовым CR -подмногообразием

и 2) M_m не является (D, D^\perp) -геодезическим CR -подмногообразием.

8. Проведено исследование вполне контактно омбилических и вполне контактно геодезических CR -подмногообразий в многообразии Сасаки.

Подмногообразие M_m называется вполне контактно омбилическим, если существует векторное поле α из $T^\perp(M_m)$ такое, что

$$h(X, Y) = G(\varphi X, \varphi Y)\alpha + \eta(X)h(Y, \xi) + \eta(Y)h(X, \xi), \quad (4.32)$$

где $X, Y \in T(M_m)$ [19]. Если $\alpha = 0$, то M_m называется вполне контактно геодезическим. Доказано:

1) Нетривиальное вполне контактно омбилическое CR -подмногообразие $\dim D_x^\perp > 1$ является вполне контактно геодезическим CR -подмногообразием [19].

2) Вполне контактно геодезическое CR -подмногообразие локально является произведением римановых подмногообразий $M_1 \times M_2$, где M_1 — вполне геодезическое инвариантное подмногообразие и M_2 — вполне геодезическое антиинвариантное подмногообразие типа 2 [19].

3) Всякое вполне контактно омбилическое CR -подмногообразие в многообразии Сасаки является CR -подмногообразием с нормальной индуцированной f -структурой [24].

9. Исследование псевдоомбилических CR -подмногообразий в многообразии Сасаки провел Бежанку в работе [19]. В работе [47] найдены необходимые и достаточные условия, при которых инфинитезимальные преобразования в многообразии Сасаки переводят CR -подмногообразия в CR -подмногообразия. Свойства CR -подмногообразий коразмерности 2 изучены в [17], [30], а коразмерности 1 в [43].

10. CR -подмногообразия в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$ изучены в работах [19]—[21], [23], [25], [33], [48]. Многообразие Сасаки называется сасакиевой пространственной формой, если φ -секционная кривизна постоянна [29].

Для CR -подмногообразий M_m в $M_{n+1}(c)$ справедливы следующие результаты:

1) Если M_m является (D, D^\perp) -слоеным и $c > -3$, то M_m является либо антиинвариантным, либо инвариантным подмногообразием в $M_{n+1}(c)$ [25].

2) Если M_m является (D, D^\perp) -слоеным нетривиальным CR -подмногообразием, то $c \leq -3$ [25].

3) Не существует нетривиальных CR -произведений при $c < -3$ [48].

4) Не существует нетривиальных псевдоомбилических CR -подмногообразий при $\dim D^\perp > 1$ и $c \neq -3$ [19].

5) Если нормальная связность плоская $m < \frac{n}{2} + 1$ и $c > 1$, то M_m — антиинвариантное [33].

6) Если распределение $D \oplus \{\xi\}$ — инволютивное, то $\tilde{H}_B(X) \leq c$ для любого вектора $X \in D$ [21].

7) M_m является D -геодезическим тогда и только тогда, когда распределение $D \oplus \{\xi\}$ — инволютивное и $\tilde{H}_B(X) = c$ для любого вектора $X \in D$ [21].

8) Если M_m — родовое CR -подмногообразие в $M_{n+1}(c)$ ($c \neq -3$), в котором f -структура является η -параллельной, то M_m — антиинвариантное подмногообразие [21].

9) Если M_m — родовое CR -подмногообразие в $M_{n+1}(c)$ ($c \neq 1$), в котором вторая фундаментальная форма параллельна, то M_m — антиинвариантное подмногообразие [21].

В работах [48], [46] изучены CR -подмногообразия сферы со стандартной сасакиевой структурой.

6. CR -подмногообразия в некоторых частных классах метрических почти контактных многообразий.

1. $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ называется кокелеровым, если $\nabla_{\kappa}\varphi^j = 0$ [28]. В кокелеровом многообразии M_{n+1} [28] исследован вопрос голономности распределений D , D^\perp , $D \oplus \{\xi\}$, $D^\perp \oplus \{\xi\}$ CR -подмногообразия: распределения D^\perp , $D^\perp \oplus \{\xi\}$ всегда голономны; распределения D и $D \oplus \{\xi\}$ голономны тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.25). Вполне омбилические CR -подмногообразия являются вполне геодезическими [28]. Если M_m — вполне геодезическое CR -подмногообразие, то M_m локально является произведением римановых подмногообразий $M_1 \times M_2 \times \gamma$, где M_1 — лист распределения D , M_2 — лист распределения D^\perp , γ — кривая, касательная к которой в каждой точке $x \in M_m$ совпадает с вектором ξ [28].

2. $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ называется приблизительно сасакиевым многообразием, если $(\nabla_X\varphi)Y + (\nabla_Y\varphi)X = \eta(Y)X + \eta(X)Y - 2G(X, Y)\xi$ [32].

Вопрос голономности распределений D , D^\perp , $D \oplus \{\xi\}$, $D^\perp \oplus \{\xi\}$ CR -подмногообразия M_m в приблизительно сасакиевом многообразии M_{n+1} исследовал Кобаяси [32].

3. Почти контактное метрическое многообразие является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\nabla_{\kappa}\varphi^j = G_{Lj}\varphi_k^L\xi^k - \eta_j\varphi_k^k. \quad (4.33)$$

В многообразии Кенмоцу распределения D^\perp , $D^\perp \oplus \{\xi\}$, $D \oplus D^\perp$ CR -подмногообразия являются голономными [39], а распределения D , $D \oplus \{\xi\}$ являются голономными тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.25) [39]. Не существует CR -произведений в многообразии Кенмоцу постоянной φ -голоморфной секционной кривизны $c < -1$ [37]. Если вторая фундаментальная форма нетривиального ξ -вертикального CR -подмногообразия M_m ($\dim D_x^\perp > 1$) в многообразии Кенмоцу постоянной φ -голоморфной секционной кривизны параллельна, то $c = -1$ и M_m — пространство постоянной кривизны, равной -1 .

Подмногообразия M_m типа 3, являющиеся CR -подмногообразиями в многообразии Кенмоцу, изучены в [39].

Антиинвариантное распределение D^\perp таких подмногообразий всегда инволютивно, а инвариантное распределение D -инволютивно тогда и только тогда, когда

$$h(X, \varphi Y) - h(\varphi Y, X) = 2G(\varphi X, Y)\xi,$$

где $X, Y \in D$. В многообразии Кенмоцу не существует минимальных CR -подмногообразий. Если M_m типа 3 является нетривиальным CR -подмногообразием ($\dim D_x^\perp > 1$), то оно является вполне омбилическим тогда и только тогда, когда $h(X, Y) = -G(X, Y)\xi$, где $X, Y \in D$ [39].

ЛИТЕРАТУРА

1. Балазюк Т. Н., Остиану Н. М., Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. IV. Подмногообразия коразмерности 1 в многообразиях почти комплексной структуры. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 15, 127—164 (РЖМат, 1984, 5A743)
2. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1979, 9, 5—246 (РЖМат, 1980, 1A800)
3. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
4. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков. В сб. «Тр. Геометр. семинара. (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1966, т. 1, 133—190 (РЖМат, 1967, 7A382)
5. —, Остиану Н. М., Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. В сб. «Тр. Геометр. семинара (Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР)». М., 1971, 3, 49—94 (РЖМат, 1972, 6A680)
6. Опольская Е. В., О почти контактном погружении в многообразии почти контактной структуры. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1982, № 13, 76—80 (РЖМат, 1983, 6A696)
7. —, Поляков Н. Д., К вопросу о почти контактном вложении в многообразии почти контактной структуры. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1987, 18
8. Остиану Н. М., О расширении понятия CR -подмногообразия в многообразии почти комплексной структуры. ВИНТИ АН СССР, М., 1987. 7 с., ил. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ)
9. —, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. V. CR -подмногообразия в многообразии почти комплексной структуры. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1987, 19, 58—100
10. —, Домбровский Р. Ф., Поляков Н. Д., Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1982, 13, 27—76 (РЖМат, 1982, 9A590)
11. —, Поляков Н. Д., Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. Ито-

- ги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1980, 11, 3—63 (РЖМат, 1980, 11728)
12. Поляков Н. Д., CR_{σ} -подмногообразие в почти контактном многообразии. ВИНТИ АН СССР. М., 1987. 24 с., ил. Библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ)
 13. —, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma)$ -антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1982, 13, 77—117 (РЖМат, 1982, 9A591)
 14. —, Об $N(\sigma)$ -антиинвариантных поверхностях в почти контактном многообразии. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1982, № 13, 81—86 (РЖМат, 1983, 6A697)
 15. —, Дифференциальная геометрия многообразий f -структуры. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 15, 95—125 (РЖМат, 1984, 5A732)
 16. —, Классификация $(f\xi\eta\rho)$ -структур. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1982, 14, 52—72 (РЖМат, 1983, 5A592)
 17. Arca G., Rosca R., Contact CR submanifolds of a Sasakian manifold, admitting a contact concircular vector pairing. Tensor, 1983, 40, № 3, 280—284 (РЖМат, 1986, 9A690)
 18. Vejanu A., On semi-invariant submanifolds of a almost contact metric manifold. An. şti. Univ. Iaşi, 1981, sec. 1a, 27, suppl., 17—22 (РЖМат, 1983, 5A600)
 19. —, Umbilical semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. Tensor, 1982, 37, Commem. vol. 1, 203—213 (РЖМат, 1984, 8A729)
 20. —, A theorem of classification for semi-invariant submanifolds of a Sasakian space form. An. şti. Univ. Iaşi Math., 1983, 29, № 1, 59—64 (РЖМат, 1984, 5A737)
 21. —, Papaghiuc N., On the curvature of semi-invariant submanifolds in a Sasakian space form. Bul. Inst. politehn. Iaşi, 198, sec. 1, 26, № 3—4, 45—52 (РЖМат, 1982, 4A670)
 22. —, —, Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. An. şti. Univ. Iaşi, 1981, sec. 1a, 27, № 1, 163—170 (РЖМат, 1981, 10A550)
 23. —, —, Some results on sectional curvatures of semi-invariant submanifolds in Sasakian space forms. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1983, 27, № 2, 99—100 (РЖМат, 1983, 12A855)
 24. —, —, Normal semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. Mat. весн., 1983, 35, № 4, 345—355 (РЖМат, 1986, 12A924)
 25. —, —, Semi-invariant submanifolds of a Sasakian space form. Colloq. math. (PRL), 1984, 48, № 2, 229—240 (РЖМат, 1985, 3A685)
 26. —, —, Almost semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. Bull. math. Soc. sci. Math. RSR, 1984, 28, № 1, 13—30 (РЖМат, 1984, 10A606)
 27. —, —, An integral formula for semi-invariant submanifolds in a Sasakian space form. Bull. Inst. Politehn. Iaşi, 1985, suppl. sec. 1, 33—39 (РЖМат, 1986, 7A799)
 28. —, Smaranda D., Semi-invariant submanifolds of a co-Kähler manifolds. An. şti. Univ. Iaşi, 1983, sec. 1a, 29, № 2, 27—32 (РЖМат, 1984, 11A622)
 29. Blair D. E., Contact manifolds in Riemannian geometry. Lect. Notes Math., 1976, 509, 146 pp. (РЖМат, 1976, 9A640)
 30. Calapso M. T., Contact CR -submanifold carrying a contact normal section in a Sasakian manifold. Tensor, 1984, 41, № 1, 23—26 (РЖМат, 1986, 8A765)
 31. Kobayshi Minoru, CR -submanifolds of a Sasakian manifold. Tensor, 1981, 35, № 3, 297—307 (РЖМат, 1982, 8A689)
 32. —, Integrabilities of horizontal and vertical distributions on CR -submanifolds of a nearly Sasakian manifold. Tensor, 1982, 36, № 2, 215—221 (РЖМат, 1984, 9A644)

33. —, *CR*-submanifolds of a Sasakian space form with flat normal connection. Tensor, 1982, 36, № 2, 207—214 (PЖMar, 1984, 9A647)
 34. —, Contact *CK* products of Sasakian manifolds. Tensor, 1982, 36, № 3, 281—288 (PЖMar, 1984, 9A646)
 35. —, 33 contact *CR*-submanifolds of manifolds with Sasakian 3-structure. Tensor, 1983, 40, № 1, 57—69 (PЖMar, 1986, 8A763)
 36. —, Differential geometry of symmetric two fold *CR*-submanifolds in manifolds with cosymplectic 3-structure. Tensor, 1984, 41, № 1, 69—89 (PЖMar, 1986, 8A766)
 37. —, Semi-invariant submanifolds of a certain class of almost contact manifolds. Tensor, 1986, 43, № 1, 28—36 (PЖMar, 1987, 6A790)
 38. Ornea L., Subvarietăți Cauchy-Riemann generice în *S*-varietăți. Stud. si cerc. mat., 1984, 36, № 5, 435—443 (PЖMar, 1985, 7A800)
 39. Papaghiuc N., Semi-invariant submanifolds in a Kenmotsu manifold. Rend. mat. cappl., 1983, 3, № 4, 607—622 (PЖMar, 1985, 2A731)
 40. —, Almost semi-invariant submanifolds in Sasakian space forms. An. ști. Univ. Iași, 1983, sec. 1a, 29, № 2, 5—14 (PЖMar, 1984, 11A621)
 41. —, Semi-invariant products in Sasakian manifolds. An. ști. Univ. Iași, 1984, sec. 1a, 30, № 2, 69—78 (PЖMar, 1985, 4A687)
 42. —, Some results on almost semi-invariant submanifolds in Sasakian manifolds. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1984, 28, № 4, 353—367 (PЖMar, 1986, 8A874)
 43. Rosca R., Hypersurface a vecteur normal Φ -contact concirculaire dans une variété sasakienne. Tensor, 1984, 41, № 2, 133—138 (PЖMar, 1986, 8A768)
 44. Yano K., Kon M., Anti-invariant submanifolds. Lect. Notes Pure and Appl. Math., vol. 21. Marcel Dekker. New York-Basel, 1976, viii, 183 pp. (PЖMar, 1977, 7A629K)
 45. —, —, Differential geometry of *CR*-submanifolds. Geom. Dedic., 1981, 10, 1—4, 369—391 (PЖMar, 1981, 8A722)
 46. —, —, Contact *CR*-submanifolds. Kodai Math. Z., 1982, 5, № 2, 238—252 (PЖMar, 1983, 5A599)
 47. —, —, Infinitesimal variations of submanifolds of a Sasakian manifolds. Tensor, 1982, 37, Commem. vol. 1, 7—15 (PЖMar, 1984, 9A649)
 48. —, —, *CR*-submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds. Boston e a.: Birkhäuser, 1983, X, 214 pp. (Progr. Math., vol. 30) (PЖMar, 1985, 4A681K)
-