Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Х. Файзрахманов, Решеточные свойства полурешеток Роджерса вычислимых и обобщенно вычислимых семейств,
Сиб. электрон. матем. изв., 2019, том 16, 1927–1936

https://www.mathnet.ru/semr1179

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
20 мая 2025 г., 19:32:02

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1927–1936 (2019) УДК 510.5
DOI 10.33048/semi.2019.16.138 MSC 03D45

РЕШЕТОЧНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА ВЫЧИСЛИМЫХ И ОБОБЩЕННО ВЫЧИСЛИМЫХ СЕМЕЙСТВ

М.Х. ФАЙЗРАХМАНОВ

Abstract. We consider the distributivity property and the property of being a lattice of Rogers semilattices of generalized computable families. We prove that the Rogers semilattice of any nontrivial A-computable family is not a lattice for every non-computable set A. It is also proved that if a set A is non-computable then the Rogers semilattice of any infinite A-computable family is not weakly distribuive. Furtermore, we find two infinite computable families with nontrivial distributive and properly weakly distributive nontrivial Rogers semilattices.

Keywords: computable enumeration, generalized computable enumeration, A-computable enumeration, Rogers semilattice.

1. Введение

Статья имеет целью рассмотрение свойств решеточности, дистрибутивности и слабой дистрибутивности полурешеток Роджерса обобщенно вычислимых семейств с общих позиций их равномерной перечислимости относительно произвольных оракулов. Обобщенно вычислимые нумерации и семейства были введены и впервые изучены в работе [1]. До недавнего времени исследования обобщенно вычислимых нумераций были сосредоточены в основном на семействах арифметических (см., например, [2, 3, 4]) и гиперарифметических (см. [5, 6]) множеств. Случаи произвольных оракулов, перечисляющих заданные

Faizrahmanov, M.Kh., Lattice properties of Rogers semilattices of compuatble and generalized computable families .

© 2019 Файзрахманов М.Х.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00028).

Поступила 12 августа 2019 г., опубликована 18 декабря 2019 г.

семейства, впервые были содержательно рассмотрены в работе [7]. К настоящему времени появился ряд работ (см. [8, 9, 10]) с результатами о мощностных, структурных и абсолютных свойствах полурешеток Роджерса обобщенно вычислимых относительно произвольных оракулов семейств.

Необходимые сведения по теории нумераций можно найти в монографии Ю.Л. Ершова [11]. Так *нумерацией* непустого множества X называется произвольное сюръективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \to X$. *Прямой суммой* нумераций α_0, α_1 множества X называется нумерация $\alpha_0 \oplus \alpha_1$, определенная для всех $x \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1$ равенством $(\alpha_0 \oplus \alpha_1)(2x + i) = \alpha_i(x)$. Если α – нумерация X, а β – нумерация $Y \subseteq X$, то говорим, что β *сводится* к α (в этом случае используется обозначение $\beta \leqslant \alpha$), если существует такая вычислимая функция f, что $\beta = \alpha \circ f$. Нумерации α и β называются *эквивалентными* ($\alpha \equiv \beta$), если $\beta \leqslant \alpha$ и $\alpha \leqslant \beta$. Пусть $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ — не более чем счетное семейство, $A \subseteq \mathbb{N}$ — произвольное множество, и α — нумерация $\mathcal{S}$. Следуя [1, 7] назовем α A-*вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{\langle x, y\rangle : y \in \alpha(x)\}$$

A-вычислимо перечислимо (A-в.п.). Семейства, обладающие A-вычислимыми нумерациями, называются A-*вычислимыми* семействами. При $A = \emptyset$ приходим к классических понятиям *вычислимых* нумераций, а при $A = \emptyset^{(n)}$ — к Σ^0_{n+1}-*вычислимым* нумерациям.

Множество всех A-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Com}^A(\mathcal{S})$. Если $\mathcal{F}$ — конечное семейство, то иногда вместо $\mathrm{Com}^A(\mathcal{F})$ будем использовать запись $\mathrm{Com}^A(S_0, \ldots, S_n)$, где $\mathcal{F} = \{S_0, \ldots, S_n\}$. Фактормножество $\mathrm{Com}^A(\mathcal{S})_{/\equiv}$ с порядком, заданным отношением сводимости, образует верхнюю полурешетку $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$, называемую *полурешеткой Роджерса* A-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$. Наименьшей верхней гранью в ней смежных классов нумераций α_0, α_1 будет смежный класс нумерации $\alpha_0 \oplus \alpha_1$. При $A = \emptyset$ будем опускать верхний индекс в обозначениях Com^A и $\mathcal{L}^A$.

2. Решеточность полурешоток Роджерса обобщенно вычислимых семейств

Проблема решеточности полурешеток Роджерса вычислимых семейств была сформулирована Ю. Л. Ершовым [12]. В [13] было получено ее отрицательное решение в исходной постановке, а в [1] — для полурешеток Роджерса Σ^0_{n+2}-вычислимых семейств. В работе автора [9] этот вопрос исследовался для A-вычислимых семейств, где A — произвольное невычислимое множество. Так в процитированной работе было установлено, что полурешетка Роджерса любого бесконечного A-вычислимого семейства не может быть решеткой. В данном параграфе рассматривается случай конечных семейств A-в.п. множеств.

Для произвольного множества A определим идеал $\mathrm{I}^m_T(A)$ верхней полурешетки m-степеней, положив

$$\mathrm{I}^m_T(A) = \{\deg_m(X) : X \leqslant_T A\}.$$

Рассмотрим сперва вопрос решеточности идеалов $\mathrm{I}^m_T(A)$ для невычислимых множеств A. Для его решения нам потребуется понятие *ретрассируемого* множества.

Определение 1. *Множество $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \dots\}$ называется ретрассируемым, если существует такая частично вычислимая функция ψ, что $\psi(a_{n+1}) = a_n$ для всех n и $\psi(a_0) = a_0$.*

Теорема 1. *Пусть A — невычислимое множество. Тогда существуют множества $C_0 \leqslant_T A$, $C_1 \leqslant_T A$ и сильно A-вычислимая последовательность множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие условиям:*

(1) *$A_n \leqslant_m C_i$ для всех $i = 0, 1$, $n \in \mathbb{N}$;*
(2) *$A_n <_m A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*
(3) *для любого множества X, такого что $X \leqslant_m C_0$ и $X \leqslant_m C_1$, существует n, для которого $X \leqslant_m A_n$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $B = \{A \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\} \equiv_T A$, где $A \upharpoonright n$ является $\{0,1\}$-значной строкой $\chi_A(0)\dots\chi_A(n-1)$ ($A \upharpoonright 0$ полагается равной пустой строке $\varnothing$). Будем отождествлять натуральное число n с бинарной строкой σ, если 1σ является двоичной записью числа $n+1$. Пусть

$$B = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\}.$$

Отметим, что B ретрассируемо относительно функции

$$f(\varnothing) = \varnothing,\ f(x_1 \dots x_n x_{n+1}) = x_1 \dots x_n\ (x_i = 0, 1,\ \text{для } 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Поскольку B невычислимо и ретрассируемо, оно иммунно (см., например, [15, II.6.5]). Определим

$$A_n = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle : x_i \notin B, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Ясно, что $A_n \leqslant_T A$ равномерно по n. Кроме того, в [14] (см. также [15, VI.6.15]) было установлено, что $A_n <_m A_{n+1}$ для всех n. Положим

$$C_0 = \{\langle b_n, x\rangle : x \in A_n, n \in \mathbb{N}\},\ C_1 = C_0 \cup \{\langle y, x\rangle : y \notin B, x \in \mathbb{N}\}.$$

По своему определению $C_i \leqslant_T A$ и $A_n \leqslant_m C_i$ для всех $i = 0, 1$, $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость третьего условия. Пусть $X \leqslant_m C_i$, $i = 0, 1$, посредством вычислимой функции f_i. Рассмотрим вычислимую функцию

$$g(x) = \min\{l(f_0(x)), l(f_1(x))\},$$

где l — левая проекция относительно канторовской функции пары $\langle x, y\rangle$. Предположим, что g ограничена сверху некоторой константой N. Тогда

$$X \leqslant_m A_0 \oplus \dots \oplus A_N \leqslant_m A_N$$

и, следовательно, X удовлетворяет условию (3). Допустим, что g не ограничена сверху. В этом случае можно выбрать такую вычислимую последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что

$$\max\{l(f_0(x_n)), l(f_1(x_n))\} < g(x_{n+1})$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Стало быть множества $E_n = \{l(f_0(x_n)), l(f_1(x_n))\}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют ограниченную сильно вычислимую последовательность без пересечений. В силу одновременной иммунности и ретрассируемости B для некоторого n имеем $E_n \cap B = \emptyset$ (см. [15, II.6.10.b]). Значит $f_0(x_n) \notin C_0$ и $f_1(x_n) \in C_1$, что противоречит сводимостям $X \leqslant_m C_i$, $i = 0, 1$, посредством функций f_i. Этим завершается доказательство теоремы. □

Следствие 1. *Если множество A невычислимо, то $\mathrm{I}^m_T(A)$ не является решеткой.*

Доказательство. Зафиксируем множества $C_0 \leqslant_T A$, $C_1 \leqslant_T A$ и сильно A-вычислимую последовательность множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие условиям (1)-(3) теоремы 1. Выберем произвольное множество $X \leqslant_m C_i$, $i = 0, 1$. По теореме 1 существует n, для которого $X \leqslant_m A_n$. Поскольку

$$X \leqslant_m A_n <_m A_{n+1} \leqslant_m C_i, \ i = 0, 1,$$

степень $\deg_m(X)$ не будет наибольшей нижней гранью степеней $\deg_m(C_0)$ и $\deg_m(C_1)$. В силу произвольности выбора X идеал $\mathrm{I}_T^m(A)$ не является решеткой. □

Перейдем к вопросу решеточности полурешеток $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ для конечных семейств A-в.п. множеств $\mathcal{S}$.

Предложение 1. *Если A невычислимо и $\mathcal{S}$ — конечное нетривиальное семейство A-в.п. множеств, то $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ содержит идеал, изоморфный $\mathrm{I}_T^m(A)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ и $S_0 \neq S_1$. Зафиксируем разрешимую A-вычислимую нумерацию ρ семейства $\mathcal{S}_1 = \{S_2, \dots, S_n\}$. Для каждого множества X определим нумерацию ν_X семейства $\{S_0, S_1\}$, положив

$$\nu_X(x) = \begin{cases} S_0, & \text{если } x \notin X, \\ S_1, & \text{если } x \in X. \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства нумераций вида ν_X:

(1) если $X \leqslant_T A$, то ν_X будет A-вычислимой;
(2) $\nu_Y \leqslant \nu_X$ тогда и только тогда, когда $Y \leqslant_m X$;
(3) $\nu_X \oplus \nu_Y = \nu_{X\oplus Y}$;
(4) если нумерация α семейства $\{S_0, S_1\}$ сводится к ν_X, то $\alpha = \nu_Y$ для некоторого множества $Y \leqslant_m X$.

Проверка первых трех свойств тривиальна. Докажем справедливость четвертого свойства. В самом деле, пусть α нумерует семейство $\{S_0, S_1\}$ и $\alpha = \nu_X \circ f$ для некоторой вычислимой функции f. Положим $Y = \{x : \nu_X f(x) = S_1\}$. Имеем $\alpha = \nu_Y$. Кроме того, $Y = \{x : f(x) \in X\}$. Следовательно, $Y \leqslant_m X$. Из свойств (1)-(4) следует, что отображение, сопоставляюшее m-степени каждого множества $X \leqslant_T A$ смежный класс нумерации $\nu_X \oplus \rho$, является изоморфизмом $\mathrm{I}_T^m(A)$ на некоторый идеал $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$. □

Следствие 2. *Если A — невычислимое множество и $\mathcal{S}$ — нетривиальное A-вычислимое семейство, то $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ не является решеткой.*

Доказательство. Если $\mathcal{S}$ конечно, то следствие вытекает из теоремы 1 и предложения 1. Нерешеточность полурешеток $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ для бесконечных $\mathcal{S}$ была установлена в следствии 1 [9]. □

3. Дистрибутивность полурешоток Роджерса обобщенно вычислимых семейств

Верхняя полурешетка $\langle L, \vee, \leqslant\rangle$ называется *дистрибутивной*, если для всех $a_1, a_2, b \in L$, удовлетворяющих соотношению $b \leqslant a_1 \vee a_2$, найдутся такие $b_1, b_2 \in L$, что $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$ и $b = b_1 \vee b_2$. Произвольная решетка является дистрибутивной тогда и только тогда, когда она дистрибутивна как верхняя полурешетка. В теории нумераций хорошо известен следующий факт

Предложение 2. [11] *Если для нумераций α_0, α_1, β выполняется сводимость $\beta \leqslant \alpha_0 \oplus \alpha_1$, то найдутся такие нумерации $\beta_0 \leqslant \alpha_0$ и $\beta_1 \leqslant \alpha_1$, что $\beta \equiv \beta_0 \oplus \beta_1$.*

В сформулированном предложении нумерации β_0, β_1 не обязательно нумеруют то же множество, что α_0, α_1, β. Однако, как было показано в [2], если α_0, α_1, β — нумерации конечного множества X, то β_0, β_1 можно выбрать так же нумерующими все множество X. Таким образом справедливо

Предложение 3. *Если $\mathcal{F}$ — конечное семейство A-в.п. множеств, то $\mathcal{L}^A(\mathcal{F})$ дистрибутивна.*

Легко видеть, что трехэлементная верхняя полурешетка $L = \{a, b, c\}$, в которой a и b несравнимы, а $c = a \vee b$, недистрибутивна. Известно множество примеров полурешеток нумераций, содержащих L в качестве идеала (см. [11, I.6]) и, следовательно, недистрибутивных. В связи с этим в теории нумераций рассматривается так же понятие слабой дистрибутивности.

Определение 2. *Верхняя полурешетка $\langle L, \vee, \leqslant \rangle$ называется слабо дистрибутивной, если для всех $a_1, a_2, b \in L$, удовлетворяющих соотношениям $b \leqslant a_1 \vee a_2$, $b \nleqslant a_1$, $b \nleqslant a_2$, найдутся такие $b_1, b_2 \in L$, что $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$ и $b = b_1 \vee b_2$.*

В работе [2] было установлено, что полурешетка Роджерса любого бесконечного Σ^0_{n+2}-вычислимого семейства не является слабо дистрибутивной. Также в процитированной работе были найдены некоторые достаточные условия для полурешеток Роджерса вычислимых семейств, при выполнении которых они не являются слабо дистрибутивными. В частности, с помощью этих достаточных условий было установлено, что полурешетка Роджерса семейства всех в.п. множеств не является слабо дистрибутивной. Так возникли следующие вопросы, относящиеся к классической теории нумераций:

Вопрос. [2] *Существует ли бесконечное вычислимое семейство в.п. множеств, у которого полурешетка Роджерса нетривиальна и (слабо) дистрибутивна?*

В представленной статье сформулированные вопросы исследуются для случая как вычислимых, так и обобщенно вычислимых относительно произвольного невычислимого оракула бесконечных семейств.

Обратимся сперва к бесконечным семействам A-в.п. множеств, где A — произвольное невычислимое множество. Вопрос о слабой дистрибутивности полурешеток $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ решается отрицательно с помощью следующей теоремы. В ее формулировке используется понятие *минимальной пары* смежных классов нумераций α и β в $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$, которое означает, что $[\alpha]$ и $[\beta]$ не имеют общих нижних граней.

Теорема 2. *Пусть A — невычислимое множество, $\mathcal{S}$ — бесконечное A-вычислимое семейство и S_0, S_1 — два различных множества семейства $\mathcal{S}$. Тогда существуют такие нумерации $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathrm{Com}^A(\mathcal{S})$ и $\alpha_2 \in \mathrm{Com}^A(S_0, S_1)$, что*

(1) *смежные классы нумераций $\alpha_0 \oplus \alpha_2$ и $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ образуют минимальную пару в $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$;*
(2) *α_2 неразрешима;*
(3) *любая нумерация $\gamma \in \mathrm{Com}^A(S_0, S_1)$, сводимая к α_1 и α_2, разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим иммунное ретрассируемое множество

$$B = \{A \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\} = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\} \equiv_T A.$$

Положим

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} S_i, & \text{если } x \notin B, \\ S_j, & \text{если } x = b_j, j \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \alpha_2(x) = \begin{cases} S_0, & \text{если } x \notin B, \\ S_1, & \text{если } x \in B. \end{cases}$$

где $i = 0, 1$. Покажем сперва, что смежные классы нумераций $\alpha_0 \oplus \alpha_2$ и $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ образуют минимальную пару в $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$. Предположим, напротив, существует нумерация β семейства $\mathcal{S}$, сводимая к $\alpha_0 \oplus \alpha_2$ и $\alpha_1 \oplus \alpha_2$. Стало быть, существуют вычислимые функции f_0, f_1, такие что $\beta = (\alpha_i \oplus \alpha_2) \circ f_i$, $i = 0, 1$. Ввиду того, что семейство $\mathcal{S}$ бесконечно, а область значений нумерации α_2 есть конечное семейство, можно фиксировать вычислимую последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющую для всех k условиям

(1) $f_i(x_k)$ четно, $i = 0, 1$;

(2) $\max\{f_0(x_k), f_1(x_k)\} < \min\{f_0(x_{k+1}), f_1(x_{k+1})\}$.

Поскольку для всех k выполняется равенство

$$\alpha_0 \frac{f_0(x_k)}{2} = \alpha_1 \frac{f_1(x_k)}{2},$$

с учетом определений нумераций α_0, α_1 справедливо $\frac{f_i(x_k)}{2} \in B$ хотя бы для одного $i = 0, 1$. Таким образом, каждый элемент ограниченной сильно вычислимой последовательности без пересечений $E_k = \{\frac{f_0(x_k)}{2}, \frac{f_1(x_k)}{2}\}$, $k \in \mathbb{N}$, имеет непустое пересечение с B, что, как и в доказательстве теоремы 1, противоречит его одновременной иммунности и ретрассируемости.

Покажем, что α_2 неразрешима. Действительно, из разрешимости α_2 следует и вычислимость множества $\{x : \alpha_2(x) = S_1\}$, которое, согласно определению α_2, совпадает с B. Следовательно, α_2 неразрешима.

Установим, наконец, что любая нумерация $\gamma \in \mathrm{Com}^A(S_0, S_1)$, сводимая к α_1 и α_2, разрешима. В самом деле, пусть g_1, g_2 — вычислимые функции, сводящие γ к α_1 и α_2 соответственно. Если вычислимая функция $h(x) = \min\{g_1(x), g_2(x)\}$ ограничена, то разрешимость γ следует из справедливости для всех x, y соотношения

$$\gamma(x) = \gamma(y) \Leftrightarrow \alpha_{r_x}(h(x)) = \alpha_{r_y}(h(y)),$$

где $r_z = 1$, $z \in \mathbb{N}$, если $g_1(z) \leqslant g_2(z)$, и $r_z = 2$ в противном случае. Если же h не ограничена, то существует такая вычислимая последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что $\max\{g_1(x_k), g_2(x_k)\} < h(x_{k+1})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, снова получаем ограниченную сильно вычислимую последовательность без пересечений $H_k = \{g_1(x_k), g_2(x_k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, каждый элемент которой имеет непустое пересечение с B, а значит и противоречие с одновременной иммунностью и ретрассируемостью B. Этим завершается доказательство теоремы. □

Следствие 3. *Если A — невычислимое множество и $\mathcal{S}$ — бесконечное A-вычислимое семейство, то $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ не является слабо дистрибутивной.*

Доказательство. Фиксируем нумерации α_0, α_1 и α_2, удовлетворяющие условиям (1)-(3) теоремы 2. Имеем $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \leqslant (\alpha_0 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha_1$. Из условия (1) получаем $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \nleqslant \alpha_0 \oplus \alpha_2$. Из (2) и (3) получаем, что $\alpha_2 \nleqslant \alpha_1$, а значит и $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \nleqslant \alpha_1$. В силу того, что не существует нумерации $\beta \in \mathrm{Com}^A(\mathcal{S})$, сводимой к $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ и $\alpha_0 \oplus \alpha_2$, полурешетка $\mathcal{L}^A(\mathcal{S})$ не является слабо дистрибутивной. □

4. Дистрибутивность полурешоток Роджерса вычислимых семейств

Перейдем к вопросам дистрибутивности и слабой дистрибутивности полурешеток Роджерса бесконечных вычислимых семейств. Сначала установим существование бесконечных вычислимых семейств с нетривиальными дистрибутивными полурешетками Роджерса.

Предложение 4. *Существует бесконечное вычислимое семейство $\mathcal{S}$, такое что $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ изоморфна верхней полурешетке вычислимо перечислимых m-степеней $\mathcal{L}^0$.*

Доказательство. Определим семейства $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}$, положив

$$\mathcal{S}_0 = \{\{0\}, \{0,1\}\},\ \mathcal{S}_1 = \{\{x\} : x \geqslant 2\},\ \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1.$$

Известно [11], что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_0) \cong \mathcal{L}^0$. Также заметим, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ одноэлементна, и выберем произвольную вычислимую нумерацию ρ семейства $\mathcal{S}_1$. Покажем, что любая нумерация $\alpha \in \mathrm{Com}(\mathcal{S})$ эквивалента нумерации вида $\beta \oplus \rho$, где $\beta \in \mathrm{Com}(\mathcal{S}_0)$. В самом деле, для нумерации $\alpha \in \mathrm{Com}(\mathcal{S})$ рассмотрим вычислимое множество

$$C = \{x : 0 \in \alpha(x)\}.$$

Выберем вычислимую функцию f, с областью значений равной C. Положим $\beta(x) = \alpha f(x)$. В силу вычислимости C и одноэлементности $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ имеем

$$\alpha \equiv \beta \oplus \rho.$$

Легко видеть, что для произвольных нумераций $\beta, \gamma \in \mathrm{Com}(\mathcal{S}_0)$ справедливо

$$\beta \leqslant \gamma \Leftrightarrow \beta \oplus \rho \leqslant \gamma \oplus \rho.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(\mathcal{S}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{S}_0) \cong \mathcal{L}^0$. □

Теперь рассмотрим вопрос о существовании вычислимых семейств с полурешетками Роджерса, реализующими собственным образом свойство слабой дистрибутивности.

Теорема 3. *Существует вычислимое семейство $\mathcal{S}$, такое что $\mathcal{L}(S)$ слабо дистрибутивна и содержит минимальную пару.*

Доказательство. Построим вычислимое семейство $\mathcal{S}$ и две его вычислимые нумерации β_0, β_1, выполняя для всех $p = \langle q, r\rangle$ требования

$$R_p : \varphi_q, \varphi_r \text{ всюду определены} \Rightarrow \beta_0 \circ \varphi_q \neq \beta_1 \circ \varphi_r$$

и тем самым обеспечивая наличие минимальной пары в $\mathcal{L}(S)$.

Построение семейства $\mathcal{S}$ и нумераций β_0, β_1

Шаг 0. Полагаем $\beta_{0,0}(2x) = \beta_{0,0}(2x+1) = \beta_{1,0}(2x) = \beta_{1,0}(2x+1) = \{2x\}$ для всех x. Зафиксируем максимальное в.п. множество M и монотонную сильно вычислимую последовательность $\{M_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, для которой $M = \bigcup_s M_s$. Пусть

$$\overline{M}_s = \{z_0^s < z_1^s < z_2^s < \dots\}.$$

Будем говорить, что R_p, $p = \langle q, r\rangle$, *требует внимания на шаге* $s+1$, если для некоторого $y \leqslant s$

$$(1) \qquad \{\varphi_q(y)\downarrow, \varphi_r(y)\downarrow\} \subseteq \{2z_p^s, 2z_p^s + 1\}.$$

Шаг s+1. Выберем наименьшее $p \leqslant s$, для которого R_p требует внимания на данном шаге и не отмечено *выполненным* (если такого p не существует, то полагаем $\beta_{i,s+1}(x) = \beta_{i,s}(x)$ для всех x, $i = 0, 1$, и переходим к следующему шагу). Зафиксируем y, удовлетворяющий условию (1), и определим

$$\begin{gathered}\beta_{0,s+1}\varphi_q(y) = \beta_{1,s+1}(\varphi_r(y) \oplus 1) = \beta_{0,s}(2z_p^s) \cup \{1\},\\ \beta_{0,s+1}(\varphi_q(y) \oplus 1) = \beta_{1,s+1}(\varphi_r(y)) = \beta_{0,s}(2z_p^s) \cup \{3\},\end{gathered} \tag{2}$$

где $\oplus$ — сложение по модулю 2. Отметим R_p *выполненным*, положим

$$\beta_{i,s+1}(x) = \beta_{i,s}(x)$$

для всех $x \notin \{2z_p^s, 2z_p^s + 1\}$, $i = 0, 1$, и перейдем к следующему шагу.

В конце построения положим $\beta_i(x) = \bigcup_s \beta_{i,s}(x)$ для всех x, $i = 0, 1$, и $\mathcal{S} = \beta_0(\mathbb{N})$.

Отметим некоторые свойства построения.

(a) $\beta_0(\mathbb{N}) = \beta_1(\mathbb{N})$;

(b) для всех x и $i = 0, 1$ справедливо $\beta_i(2x) = \beta_i(2x + 1) = \{2x\}$, или $\{\beta_i(2x), \beta_i(2x+1)\} = \{\{2x, 1\}, \{2x, 3\}\}$; кроме того, $\beta_0(2x) = \{2x\}$ тогда и только тогда, когда $\beta_1(2x) = \{2x\}$;

(c) каждое требование R_p выполнено;

(d) если $x \in M_s$, то для всех $t > s$, $i, j = 0, 1$ имеем $\beta_{i,t}(2x + j) = \beta_i(2x + j)$;

(e) семейство

$$\mathcal{S}_1 = \{\beta_0(2x + j) : x \in M,\ j = 0, 1\}$$

обладает единственной с точностью до эквивалентности вычислимой нумерацией ξ, сводимой к любой вычислимой нумерации семейства $\mathcal{S}$;

(f) разность $\mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$, где

$$\mathcal{S}_2 = \{\{2x, 2j + 1\} \in \mathcal{S} : x \in \mathbb{N}, j = 0, 1\},$$

конечна.

Свойства (a)-(d) следуют немедленно из построения. Докажем справедливость свойства (e). Выберем вычислимую функцию g, область значений которой есть M, и для всех x и $j = 0, 1$ определим

$$\xi(2x + j) = \beta_{0,s+1}(2x + j),\ \text{где } s \text{ — первый шаг, такой что } g(x) \in M_s.$$

Теперь справедливость свойства (e) следует из свойств (b) и (d).

Установим справедливость свойства (f). Пусть $\overline{M} = \{z_0 < z_1 < z_2 < \dots\}$. Множество

$$H = \{z \in \overline{M} : \beta_0(2z) = \beta_0(2z + 1) = \{2z\}\}$$

бесконечно, поскольку, согласно (1) и (2), оно содержит все z_p, для которых область определения $\varphi_{l(p)}$ пуста. Непосредственно из построения следует, что множество

$$L = \{x : \{\beta_0(2x), \beta_0(2x + 1)\} = \{\{2x, 1\}, \{2x, 3\}\}\}$$

в.п. Поскольку H бесконечно, $\overline{M \cup L}$ так же будет бесконечным. Следовательно, в силу максимальности M, разность $(M \cup L) \setminus M$ конечна. Отсюда конечна и разность $\mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$.

Покажем, что $\mathcal{L}(S)$ слабо дистрибутивна. Для этого выберем произвольные нумерации $\gamma, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathrm{Com}(\mathcal{S})$ и сильно вычислимую двойную последовательность $\{\gamma_t(x)\}_{x,t\in\mathbb{N}}$, для которых $\gamma \leqslant \alpha_0 \oplus \alpha_1$ и $\gamma(x) = \bigcup_t \gamma_t(x)$, $x \in \mathbb{N}$. Пусть f —

вычислимая функция, такая что $\gamma = (\alpha_0 \oplus \alpha_1) \circ f$. Определим в.п. множества U_0, U_1, V_0, V_1, положив

$$U_0 = \left\{ \frac{f(x)}{2} : f(x) \text{ четно}, x \in \mathbb{N} \right\},\ U_1 = \left\{ \frac{f(x)-1}{2} : f(x) \text{ нечетно},\ x \in \mathbb{N} \right\},$$
$$V_0 = \{y : \exists x \in U_0\,[2y \in \alpha_0(x)]\}\,, V_1 = \{y : \exists x \in U_1\,[2y \in \alpha_1(x)]\}\,.$$

Зафиксируем вычислимые функции h_0 и h_1, области значений которых равны U_0 и U_1 соответственно, и определим $\nu_i = \alpha_i \circ h_i$, $i = 0, 1$. Ясно, что $\gamma \equiv \nu_0 \oplus \nu_1$. Ввиду максимальности M возможны следующие три случая.

Случай 1. Множества $\overline{M \cup V_0}$ и $\overline{M \cup V_1}$ конечны.
Покажем, что в этом случае существуют такие нумерации $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathrm{Com}(\mathcal{S})$, что $\gamma_0 \leqslant \alpha_0$, $\gamma_1 \leqslant \alpha_1$ и $\gamma \equiv \gamma_0 \oplus \gamma_1$. В самом деле, ввиду конечности множеств $\overline{M \cup V_i}$ и разности $\mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$, каждая из нумераций $\nu_i \oplus \xi$ нумерует все семейство $\mathcal{S}$ за исключением лишь конечного числа его элементов. Ввиду свойства (e) и определения нумераций ν_i имеем $\nu_i \oplus \xi \leqslant \alpha_i$. Переопределив нумерации $\nu_i \oplus \xi$ надлежащим образом, чтобы выполнялось $(\nu_i \oplus \xi)(\mathbb{N}) = \mathcal{S}$, получим искомые нумерации γ_0 и γ_1.

Случай 2. Множества $\overline{M \cup V_0}$ и $(M \cup V_1) \setminus M$ конечны.
В этом случае, с учетом свойства (e), имеем $\gamma \leqslant \nu_0 \oplus \nu_1 \leqslant \nu_0 \oplus \xi \leqslant \alpha_0$.

Случай 3. Множества $\overline{M \cup V_1}$ и $(M \cup V_0) \setminus M$ конечны.
Аналогично рассмотрению случая 2 получаем $\gamma \leqslant \alpha_1$.

Поскольку H бесконечно, случай, когда каждое из множеств $(M \cup V_i) \setminus M$ конечно, невозможен, так как в противном случае $\gamma(\mathbb{N}) \neq \mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{L}(S)$ слабо дистрибутивна. □

Следствие 4. *Существует вычислимое семейство $\mathcal{S}$, такое что $\mathcal{L}(S)$ слабо дистрибутивна, но не дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ такое вычислимое семейство, что $\mathcal{L}(S)$ слабо дистрибутивна и содержит минимальную пару. Следовательно, $\mathcal{L}(S)$ содержит идеал, изоморфный недистрибутивной трехэлементной верхней полурешетке $L = \{a, b, c\}$, в которой a и b несравнимы и $c = a \vee b$. Отсюда $\mathcal{L}(S)$ недистрибутивна. □

Следствие 5. *Существует вычислимое семейство $\mathcal{S}$, такое что элементарная теория $\mathcal{L}(S)$ отлична от элементарных теорий полурешеток Роджерса всех A-вычислимых семейств для невычислимых оракулов A.*

Доказательство. Снова выберем такое вычислимое семейство $\mathcal{S}$, что $\mathcal{L}(S)$ слабо дистрибутивна, но не дистрибутивна. Если A — произвольное невычислимое множество и $\mathcal{T}$ — A-вычислимое семейство, то, согласно предложению 3 и следствию 3, либо $\mathcal{L}^A(\mathcal{T})$ дистрибутивна, либо не слабо дистрибутивна. Следовательно, $\mathrm{Th}(\mathcal{L}(S)) \neq \mathrm{Th}(\mathcal{L}^A(\mathcal{T}))$. □

References

[1] S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices*, Algebra and Logic, **36**:6 (1997), 359—369. Zbl 0969.03052

[2] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, A.Sorbi, *Isomorphism types and theories of Rogers semilattices of arithmetical nuberings*, in: Computability and models, S. B. Cooper, S. S. Goncharov (eds.), New York, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003, 79–91.

[3] S.Yu. Podzorov, *Local Structure of Rogers Semilattices of Σ^0_n-Computable Numberings*, Algebra and Logic, **44**:1 (2005), 82–94. Zbl 1104.03038

[4] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, A.Sorbi, *Isomorphism types of Rogers semilattices for families from different levels of the arithmetical hierarchy*, Algebra and Logic, **45**:6 (2006), 361–370. Zbl 1164.03340

[5] S. Badaev, S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S.B.Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, NY, Springer-Verlag, 2008, 19–34. Zbl 1157.03022

[6] S.S. Goncharov, *Computable numberings of hyperarithmetical sets and complexity of countable models*, Mathematical theory and computational practice, 5th Conf. on computability in Europe, CiE 2009 (Heidelberg, Germany, July 19–24), Univ. Heidelberg, 2009, 13–14.

[7] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *Generalized computable universal numberings*, Algebra and Logic, **53**:5 (2014), 355–364. Zbl 1318.03050

[8] M.Kh. Faizrakhmanov, *Universal generalized computable numberings and hyperimmunity*, Algebra and Logic, **56**:4 (2017), 337—347. Zbl 1420.03092

[9] M.Kh. Faizrahmanov, *The Rogers semilattices of generalized computable enumerations*, Siberian Math. J., **58**:6 (2017), 1104–1110. Zbl 1420.03094

[10] S.A. Badaev, A.A. Issakhov, *Some absolute properties of A-computable numberings*, Algebra and Logic, **57**:4 (2018), 275–288. Zbl 07035851

[11] Yu.L. Ershov, *Theory of Numberings*, Nauka, Moscow, 1977. MR506676

[12] Yu.L. Ershov, *Enumeration of families of general recursive functions*, Siberian Math. J., **8**:5 (1967), 1015–1025. Zbl 0191.30401

[13] V.L. Selivanov, *Two theorems on computable numberings*, Algebra and Logic, **15**:4 (1976), 297–306. Zbl 0358.02050

[14] C. G. Jockusch, *Relationships between reducibilities*, Trans. Amer. Math. Soc., **142** (1969), 229–237. MR245439

[15] P. Odifreddi, *Classical recursion theory: The theory of functions and sets of natural numbers*, Amsterdam: Elsevier, 1992. Zbl 0661.03029

Marat Khaidarovich Faizrahmanov
Kazan (Volga Region) Federal University,
18, Kremlyovskaya str.,
Kazan, 420008, Russia
E-mail address: marat.faizrahmanov@gmail.com