ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 241–249

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2005 г. Р. Р. Ашуров, Ю. Э. Файзиев

Посвящается 60-летию академика
Шавката Арифджановича Алимова

В настоящей работе устанавливается равномерная сходимость и сходимость в среднем средних Рисса спектральных разложений оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом, удовлетворяющим условию типа Штуммеля. Класс потенциалов, рассмотренных в данной работе, является наиболее широким при изучении равномерной сходимости спектральных разложений. Это объясняется тем, что если потенциал не удовлетворяет условию Штуммеля (т.е. имеет более сильную особенность), то все непрерывные собственные функции оператора Шрёдингера обращаются в нуль в точке сингулярности потенциала (см. [1]).

Вопросы сходимости и суммируемости спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам с гладкими коэффициентами, исследованы многими авторами (см. обзорную статью [2]).

1. Основные определения. Формулировка результатов. Пусть Ω – произвольная ограниченная область в R^N $(N \geq 3)$ с гладкой границей и $q \in L_2(\Omega)$ – неотрицательная функция. Рассмотрим оператор Шрёдингера $H = -\Delta + q$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$ и обозначим через $\hat{H}$ произвольное неотрицательное самосопряженное расширение оператора H с дискретным спектром. Пусть $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ – собственные числа оператора $\hat{H}$ и $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ – соответствующая полная ортонормированная система собственных функций.

Для любого $s \geq 0$ определим средние Рисса порядка s спектральных разложений функции $f \in L_2(\Omega)$ формулой

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s (f, u_n) u_n(x),$$

где $(f, u_n) = \int_\Omega f(x) u_n(x)\, dx$.

Зафиксируем положительную непрерывную функцию $\omega(t)$, определенную при $t > 0$ и такую, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty. \tag{1}$$

Определение. Будем говорить, что положительная функция $q \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет обобщенному условию Штуммеля, если существует константа C такая, что

$$\int_{|x-y| \leq 1} \frac{|q(y)|^2}{|x-y|^{N-4} \omega(|x-y|)}\, dy < C, \quad x \in \Omega \tag{2}$$

(вне области Ω функция q продолжена нулем).

Класс функций q, удовлетворяющих условию (2), обозначим через Q_ω. Важность обобщенного условия Штуммеля заключается, в частности, в том, что при $q \in Q_\omega$ можно показать непрерывность в Ω всех собственных функций u_n оператора $\hat{H}$ (см. [3, 4]).

Теорема. *Пусть $q \in Q_\omega$. Тогда для средних Рисса порядка $s > (N-1)/2$ спектральных разложений, непрерывных в подобласти $D \subseteq \Omega$, функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ на любом компакте $K \subset D$ справедливо равенство* $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x)$.

В силу выпуклости средних Рисса $E_\lambda^s f(x)$ из теоремы вытекает

Следствие. *Пусть* $f(x) \in L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ *и* $s > (N-1)|1/p - 1/2|$. *Тогда на любом компакте* $K \subset \Omega$ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|E_\lambda^s f - f\|_{L_p(K)} = 0$.

Отметим, что для оператора Шрёдингера с гладким потенциалом теорема доказана в работе [5], а в случае потенциалов, имеющих особенность первого порядка на многообразиях размерности не больше $N-3$, – в работе [6].

Сформулированная теорема является точной в том смысле, что если показатель средних Рисса $s = (N-1)/2$, то утверждение теоремы может не иметь места даже для оператора Лапласа (см. [2]).

При доказательстве теоремы основную роль играет следующая оценка "пачки" собственных функций, которая имеет, впрочем, и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $q \in Q_\omega$ *и* $\mu = \sqrt{\lambda}$. *Тогда справедлива равномерная на каждом компакте* $K \subset \Omega$ *оценка*

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\le 1} |u_n(x)|^2 \le C(K)\mu^{N-1}, \quad \mu > 1. \tag{3}$$

Основная часть настоящей работы посвящена доказательству оценки (3), которое проводится с помощью метода В.А. Ильина (см. [7–11]), основанного на формуле среднего значения. Отметим, что для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом, удовлетворяющим условию Като, получена оценка на диагонали для спектральной функции $\Theta(x, y, \lambda) = O(\lambda^{N/2})$ в работе [10], а в случае потенциалов, удовлетворяющих усиленному условию Штуммеля, лемма 1 доказана в работе [11].

2. Оценка фундаментального решения. В данном пункте, используя метод Е.Е. Леви [12], построим фундаментальное решение $E(x, y, z)$ оператора $\hat{H} - z$, т.е. функцию, для которой

$$(-\Delta + q - z)E(x, y, z) = \delta(x - y), \quad x, y \in \Omega.$$

В случае $q = 0$ фундаментальное решение $E_0(x, y, z)$, экспоненциально убывающее при $\operatorname{Im}\sqrt{z} > 0$, выражается через функцию Ханкеля первого рода:

$$E_0(x, y, z) = C_N \left(\frac{\sqrt{z}}{|x-y|}\right)^{N/2-1} H^{(1)}_{N/2-1}(|x-y|\sqrt{z})$$

[12, с. 100], где величина $\sqrt{z}$ взята с положительной мнимой частью.

Из второй формулы Грина получаем

$$E(x, y, z) = E_0(x, y, z) + \int\limits_\Omega E_0(x, u, z)E(u, y, z)q(u)\,du.$$

Далее введем итерированные ядра

$$E_{k+1}(x, y, z) = \int\limits_\Omega E_0(x, u, z)E_k(u, y, z)q(u)\,du, \quad k \ge 0.$$

Тогда

$$E(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x, y, z), \tag{4}$$

если ряд сходится равномерно по $x, y \in \Omega$. Равномерная сходимость этого ряда в комплексной плоскости в секторе $Z_0 = \{z \in C^1,\ \varepsilon_0 \le \arg z \le \pi - \varepsilon_0\}$, где ε_0, $0 < \varepsilon_0 < \pi/2$, – фиксированное число, вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Существуют константы* c_0, $\alpha > 0$ *такие, что для* $\sqrt{z} \in Z_0$ *и* $|z| > 1$ *справедлива оценка*

$$|E_k(x, y, z)| \le c_0(1/2)^k |x-y|^{2-N} \exp\{-\alpha|x-y|\sqrt{|z|}\}, \quad k \ge 0, \tag{5}$$

где $x, y \in \Omega$.

Доказательство легко проводится методом индукции по k с учетом при $k=0$ следующей оценки (см. [12]):

$$|E_0(x,y,z)| \leq c_0|x-y|^{2-N}\exp\{-2\alpha|x-y|\sqrt{|z|}\}, \quad \sqrt{z}\in Z_0. \tag{6}$$

Из сходимости ряда (4) следует, что для фундаментального решения $E(x,y,z)$ также справедлива аналогичная (6) оценка. Далее, рассуждая совершенно аналогично работе [13], устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon>0$ *и* $\mu_n=\sqrt{\lambda_n}$. *Тогда равномерно на каждом компакте* $K\subset\Omega$ *справедлива оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|^2\mu_n^{-N-\varepsilon}\leq C_1(K).$$

3. Доказательство леммы 1. Далее удобно ввести обозначение

$$U(x,\mu)=\sum_{|\mu_n-\mu|\leq 1}|u_n(x)|^2.$$

Легко проверить, что лемма 1 вытекает из следующего утверждения (заметим, что оценку (3) достаточно доказать для значений μ, удовлетворяющих условию $\mu\geq\mu_0$, где μ_0 – достаточно большое фиксированное число).

Лемма 4. *Справедлива равномерная на любом компакте* $K\subset\Omega$ *оценка*

$$U(x,\mu)\leq(1/2)\sup_{|x-y|<\mu^{-1}}U(y,\mu)+C_2(K)\mu^{N-1}, \quad \mu>\mu_0. \tag{7}$$

Действительно, используя лемму 3, устанавливаем сначала в некоторой области Ω_1, $\bar{\Omega}_1\subset\Omega$, $K\subset\Omega_1$, предварительную оценку

$$U(x,\mu)\leq\mu^{N+\varepsilon}\sum_{|\mu_n-\mu|\leq 1}\frac{|u_n(x)|^2}{\mu_n^{N+\varepsilon}}\leq C_1(\Omega_1)\mu^{N+\varepsilon}.$$

Затем, итерируя оценку (7), получаем $U(x,\mu)=O(\mu^{N-1})$ и поэтому $\sum_{|\mu_n-\mu|\leq 1}|u_n(x)|^2\leq$ $\leq C(K)\mu^{N-1}$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 4. Заметим, что утверждение леммы 4 достаточно доказать для

$$U_1(x,\mu)=\sum_{\mu-1\leq\mu_n\leq\mu-1/2}|u_n(x)|^2,$$

т.е. установить справедливость равномерной на любом компакте $K\subset\Omega$ оценки

$$U_1(x,\mu)\leq\frac{1}{8}\sup_{|x-y|<\mu^{-1}}U_1(y,\mu)+C_2(K)\mu^{N-1}. \tag{8}$$

Итак, остается доказать оценку (8).

Пусть K – компакт из области Ω, R – положительное число, меньшее минимума расстояния между границей области Ω и компакта K (будем полагать, что $R<1/2$).

Рассмотрим функцию

$$v(r)=\begin{cases}(2\pi)^{-N/2}\mu^{N/2}r^{1-N/2}J_{N/2-1}(\mu r) & \text{при} \quad R\leq r\leq 2R,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $r=|x-y|$, x – фиксированная точка в компакте K, $\mu>0$. Вычислим образ Фурье $\hat{v}_n$ функции v, используя формулу среднего значения для решения уравнения $-\Delta u_n+qu_n=\lambda_n u_n$ (см. [12, с. 230])

$$S_r(u_n) = (2\pi)^{N/2}(r\mu_n)^{1-N/2}J_{N/2-1}(r\mu_n)u_n(x) +$$

$$+\frac{\pi}{2} \quad r^{1-N/2}\int\limits_0^r \{J_{N/2-1}(t\mu_n)Y_{N/2-1}(r\mu_n) - J_{N/2-1}(r\mu_n)Y_{N/2-1}(t\mu_n)\}t^{N/2}S_t(qu_n)dt; \tag{9}$$

здесь принято обозначение $S_r(g) = \int_\theta g(x+r\theta)d\theta$, т.е. $S_r(g)$ – интеграл от функции $g(y)$ по всем углам на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x. Тогда получим соотношение (см. [12])

$$u_n(x) = a_n\hat{v}_n(x) + A_1u_n(x) - A_2u_n(x); \tag{10}$$

здесь через A_j, $j = 1,2$, обозначены операторы:

$$A_1u_n(x) = C_N\mu^{N/2}a_n \int\limits_{|x-y|<R} \{l_1Y_{N/2-1}(|x-y|\mu_n) - l_2J_{N/2-1}(|x-y|\mu_n)\}|x-y|^{1-N/2}q(y)u_n(y)dy,$$

$$A_2u_n(x) = C_N\mu^{N/2}a_n\int\limits_R^{2R}\{\Lambda_2(t)J_{N/2-1}(t\mu_n) - \Lambda_1(t)Y_{N/2-1}(t\mu_n)\}t^{N/2}S_t(qu_n)dt,$$

где $C_N = (\pi/2)(2\pi)^{-N/2}$,

$$\Lambda_1(t) = \int\limits_t^{2R} J_{N/2-1}(r\mu)J_{N/2-1}(r\mu_n)rdr, \quad \Lambda_2(t) = \int\limits_t^{2R} J_{N/2-1}(r\mu)Y_{N/2-1}(r\mu_n)rdr,$$

и $l_j = \Lambda_j(R)$, $j = 1,2$; $a_n = \mu_n^{N/2-1}\mu^{-N/2}l_1^{-1}$.

Далее будем использовать следующие оценки, вытекающие из асимптотических поведений бесселевых функций $J_v(t)$, $Y_v(t)$ при больших значениях аргумента (см. [7, 12]):

$$\begin{gathered} |\Lambda_j^{(k)}(t)| \le c_1\mu^{-1}, \quad k = 0,1, \quad j = 1,2, \quad t\in[R;2R], \\ l_1 \ge c_2\mu^{-1}, \quad a_n \le c_3, \quad |\mu_n - \mu| \le 1, \quad \mu \ge \mu_0, \end{gathered} \tag{11}$$

где константы c_i, $i = 1,2,3$, зависят от R.

Применяя равенство Парсеваля и оценивая норму в L_2 функции $v(y)$, получаем (см. [7])

$$\sum_{|\mu_n-\mu|\le1} |\hat{v}_n|^2 \le C_4\mu^{N-1}, \quad C_4 > 0, \quad \mu \ge \mu_0. \tag{12}$$

Для оценки аналогичной суммы от $A_2u_n(x)$ введем обозначение $D(t) = [\Lambda_2(t)J_{N/2-1}(t\mu_n) - \Lambda_1(t)Y_{N/2-1}(t\mu_n)]t^{1-N/2}$. Интегрируя по частям, интеграл $A_2u_n(x)$ приводим к виду

$$A_2u_n(x) = C_N\mu^{N/2}a_n\int\limits_R^{2R} D(t)\frac{d}{dt}\int\limits_{|x-y|<t} q(y)u_n(y)\,dy\,dt =$$

$$= C_N\mu^{N/2}a_n\left[D(2R)\hat{q}_n(2R) - D(R)\hat{q}_n(R) - \int\limits_R^{2R} D'(t)\hat{q}_n(t)\,dt\right],$$

где $\hat{q}_n(t) = \int_{|x-y|<t} q(y)u_n(y)dy$. В силу равенства Парсеваля получаем

$$\mu^N D^2(jR)\sum_{|\mu_n-\mu|\le1} \hat{q}_n^2(jR) \le c\mu^{N-3}\int\limits_{|x-y|<jR} q^2(y)dy \le c\mu^{N-3}.$$

С другой стороны, в силу оценки $|D'(t)| \le ct^{(1-N)/2}\mu^{-1/2}$ (см. (11)) имеем

$$\mu^N \int\limits_R^{2R} [D'(t)]^2 \sum_{|\mu_n-\mu|\le 1} \hat{q}_n^2(t)\,dt \le c\mu^{N-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{|\mu_n-\mu|\le 1} |A_2 u_n(x)|^2 \le C_5\mu^{N-1}, \quad C_5>0, \quad \mu\ge\mu_0. \tag{13}$$

Для оценки интеграла $A_1 u_n(x)$ введем функцию $0 \le f_\mu \in C_0^\infty(|x-y|<R)$ и $f_\mu(y)>0$, $(\alpha/2)\mu^{-1}<|x-y|<\alpha\mu^{-1}$, зависящую только от $|x-y|$:

$$f_\mu(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha\mu^{-1}<|x-y|<R/4, \\ 0 & \text{при } |x-y|<(\alpha/2)\mu^{-1}, \quad |x-y|>R/2, \end{cases}$$

константа $0<\alpha<1$. Обозначим $g_\mu = 1-f_\mu$. В интеграле $A_1u_n(x)$ единицу заменим суммой $f_\mu+g_\mu$. Интеграл, в котором участвует f_μ, обозначим через $Fu_n(x)$, а второй интеграл – через $Gu_n(x)$. Интеграл $Gu_n(x)$ есть сумма двух интегралов по области $|x-y|<\alpha\mu^{-1}$ (обозначим через $G_1u_n(x)$) и по области $R/4<|x-y|<R$ (обозначим $G_2u_n(x)$). Тогда

$$A_1u_n(x) = Fu_n(x) + G_1u_n(x) + G_2u_n(x). \tag{14}$$

Оценка

$$\sum_{|\mu_n-\mu|\le 1} |G_2u_n(x)|^2 \le C_6\mu^{N-1}, \quad \mu\ge\mu_0, \tag{15}$$

доказывается аналогично (13). Для интеграла $G_1u_n(x)$ имеем

$$|G_1u_n(x)| \le \int\limits_{|x-y|<\alpha\mu^{-1}} C_N\mu^{N/2}a_nl_1Y_{N/2-1}(|x-y|\mu_n)|x-y|^{1-N/2}|q(y)|\;|u_n(y)|dy +$$

$$+ C_N\mu^{N/2}a_n \int\limits_{|x-y|<\alpha\mu^{-1}} l_2J_{N/2-1}(|x-y|\mu_n)|x-y|^{1-N/2}|q(y)|\;|u_n(y)|dy.$$

Далее, используя асимптотические оценки бесселевых функций $(t\to 0)$

$$J_v(t) = \Gamma^{-1}(v+1)(t/2)^v(1+O(t^2)), \quad Y_v(t) = -(1/\pi)\Gamma(v)(t/2)^v(1+O(t^2)) \tag{16}$$

и неравенство Коши–Буняковского, с учетом обобщенного условия Штуммеля (2) получаем

$$|G_1u_n(x)| \le C \int\limits_{|x-y|<\alpha\mu^{-1}} \frac{|u_n(y)|\,|q(y)|}{|x-y|^{N-2}}\,dy + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \le$$

$$\le \left[\int\limits_{|x-y|<\alpha\mu^{-1}} \frac{|q(y)|^2}{|x-y|^{N-4}\omega(|x-y|)}\,dy\right]^{1/2} \left[\int\limits_{|x-y|<\alpha\mu^{-1}} \frac{|u_n(y)|\omega(|x-y|)}{|x-y|^N}\,dy\right]^{1/2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{\mu-1\le\mu_n\le\mu-1/2}|G_1u_n(x)|^2\le C\sup_{|x-y|<\mu^{-1}}U_1(y,\mu)\int\limits_{|x-y|<\alpha\mu^{-1}}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^N}dy=$$

$$=o(1)\sup_{|x-y|<\mu^{-1}}U_1(y,\mu)\quad\text{при}\quad\mu\ge\mu_0.\tag{17}$$

Оценим интеграл $Fu_n(x)$. Используя тождество $qu_n=\Delta u_n+\mu_n^2u_n$ и вторую формулу Грина, интеграл $Fu_n(x)$ можно переписать в виде

$$Fu_n(x)=C_N\mu^{N/2}a_n\int\limits_{|x-y|<R}(\Delta+\mu_n^2)\{l_1f_\mu(y)V_1(y)-l_2f_\mu(y)V_2(y)\}u_n(y)\,dy,$$

где $V_1(y)=Y_{N/2-1}(|x-y|\mu_n)|x-y|^{1-N/2}$, $V_2(y)=J_{N/2-1}(|x-y|\mu_n)|x-y|^{1-N/2}$. Введем обозначения $L_j=V_jf_\mu''+2V_j'f_\mu'+r^{-1}(N-1)f_\mu'V_j$, $j=1,2$, где производные взяты по $r=|x-y|$, и

$$F_{1j}u_n(x)=C_N\mu^{N/2}a_n\int\limits_{(\alpha/2)\mu^{-1}<|x-y|<\alpha\mu^{-1}}u_n(y)l_jL_jdy,\quad j=1,2,$$

$$F_2u_n(x)=C_N\mu^{N/2}a_n\int\limits_{R/4<|x-y|<R/2}u_n(y)(l_1L_1-l_2L_2)dy.$$

Тогда, учитывая тождество $(\Delta+\mu_n^2)V_j(y)=0$, $j=1,2$, будем иметь

$$Fu_n(x)=F_{11}u_n(x)-F_{12}u_n(x)+F_2u_n(x).\tag{18}$$

Все слагаемые в интеграле $F_2u_n(x)$ оцениваются совершенно аналогично. Оценим, например,

$$Iu_n(x)=C_Na_nl_1\mu_n\mu^{N/2}\int\limits_{R/4<|x-y|<R/2}u_n(y)f_\mu'(y)\frac{Y_{N/2}(|x-y|\mu_n)}{|x-y|^{N/2-1}}dy.$$

Разложим функцию $Y_{N/2}(|x-y|\mu_n)$ в ряд Тейлора в точке $|x-y|\mu$. Тогда в силу оценки (11), обобщенного неравенства Минковского и равенства Парсеваля получаем

$$\sum_{|\mu_n-\mu|\le1}|Iu_n(x)|^2\le C_N^2(a_nl_1\mu_n)^2\mu^N\Bigg\{\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\Bigg[\sum_{|\mu_n-\mu|\le1}|\mu_n-\mu|^{2k}\times$$

$$\times\Bigg|\int\limits_{R/4<|x-y|<R/2}u_n(y)Y_{N/2}^{(k)}(|x-y|\mu_n)|x-y|^{k-N/2+1}dy\Bigg|^2\Bigg]^{1/2}\Bigg\}^2\le$$

$$\le C\mu^{N-1}\Bigg\{\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\Bigg[\sum_{|\mu_n-\mu|\le1}\Bigg|\int\limits_{R/4<|x-y|<R/2}u_n(y)|x-y|^{1/2-N/2}dy\Bigg|^2\Bigg]^{1/2}\Bigg\}^2=$$

$$=C\mu^{N-1}\Bigg\{\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\Bigg[\int\limits_{R/4<|x-y|<R/2}|x-y|^{1-N}dy\Bigg]^{1/2}\Bigg\}^2\le C_1\mu^{N-1}.\tag{19}$$

Для оценки интегралов $F_{1j}u_n(x)$ нужно конкретизировать функцию f_μ. Пусть $0\le f\in$ $\in C_0^\infty(R)$ и $f(t)=0$ при $t\le0$, $f(t)=1$ при $t\ge1$ и $f'(t)>0$ при $0<t<1$. Положим $f_\mu(t)=f(4\mu(t-1/(4\mu)))$.

Переходя к сферическим координатам, интеграл $F_{11}u_n(x)$ можно представить в виде

$$F_{11}u_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\mu_n^{N/2-1}\int\limits_{(\alpha/2)\mu^{-1}}^{\alpha\mu^{-1}} t^{N/2}\Big\{Y_{N/2-1}(t\mu_n)f''_\mu(t) -$$

$$- f'_\mu(t)\mu_n\left[2Y_{N/2}(t\mu_n) - \frac{N-1}{t\mu_n}Y_{N/2-1}(t\mu_n)\right]\Big\}S_t(u_n)\,dt.$$

Отсюда в силу асимптотических оценок (16) и формулы среднего значения будем иметь

$$F_{11}u_n(x) = \frac{u_n(x)}{2}\left\{\int\limits_{(\alpha/2)\mu^{-1}}^{\alpha\mu^{-1}}\left(4f'_\mu(t) - \frac{2}{N-2}tf''_\mu(t) - \frac{2(N-1)}{N-2}f'_\mu(t)\right)dt + O(\mu^{-1})\right\} + F_{13}u_n(x),$$

причем для интеграла $F_{13}u_n(x)$ справедлива оценка

$$|F_{13}u_n(x)| \le C\int\limits_{(\alpha/2)\mu^{-1}<|x-y|<\alpha\mu^{-1}}\frac{|u_n(y)|\;|q(y)|}{|x-y|^{N-2}}dy.$$

Тогда с учетом неравенства Коши–Буняковского и обобщенного условия Штуммеля (2) получаем

$$\sum_{\mu-1\le\mu_n\le\mu-1/2}|F_{13}u_n(x)|^2 = o(1)\sup_{|x-y|<\mu^{-1}}U_1(y,\mu), \quad \mu\ge\mu_0. \tag{20}$$

Одномерный интеграл после замены переменной $\xi = 4\mu(t - 1/(4\mu))$ вычисляется явно и равен двум. Таким образом,

$$F_{11}u_n(x) = u_n(x)(1 + O(\mu^{-1})) + F_{13}u_n(x). \tag{21}$$

Рассмотрим интеграл $F_{12}u_n(x)$. В силу асимптотики бесселевых функций и формулы среднего значения можно записать

$$F_{12}u_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{l_2}{l_1}\frac{u_n(x)}{\Gamma(N/2)}\left\{\int\limits_{(\alpha/2)\mu^{-1}}^{\alpha\mu^{-1}}\left[\frac{tf''_\mu(t)}{\Gamma(N/2)}\left(\frac{t\mu_n}{2}\right)^{N-2} - \frac{2t\mu_n f'_\mu(t)}{\Gamma(N/2+1)}\left(\frac{t\mu_n}{2}\right)^{N-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{N-1}{\Gamma(N/2)}f'_\mu(t)\left(\frac{t\mu_n}{2}\right)^{N-2}\right]dt + O(\mu^{-1})\right\} + F_{14}u_n(x),$$

при этом для остатка $F_{14}u_n(x)$ справедлива оценка (20). Сумма первого и третьего интегралов равна нулю. Поэтому главный член

$$F_{12}u_n(x) = -\left(\frac{\mu_n}{2}\right)^{N-1}\frac{\pi\mu_n u_n(x)}{\Gamma(N/2)\Gamma(N/2+1)}\frac{l_2}{l_1}\int\limits_{(\alpha/2)\mu^{-1}}^{\alpha\mu^{-1}}t^N f'_\mu(t)dt =$$

$$= -\left(\frac{\alpha\mu_n}{4\mu}\right)^N\frac{\pi u_n(x)}{2^{N-1}\Gamma(N/2)\Gamma(N/2+1)}\frac{l_2}{l_1}\int\limits_0^1(\xi+1)^N f'(\xi)d\xi,$$

где

$$l_1 = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu\mu_n}(\mu-\mu_n)}\sin\frac{R}{2}(\mu-\mu_n)\cos\frac{3R}{2}(\mu-\mu_n) + O(\mu^{-1}),$$

$$l_2 = -\frac{2}{\pi\sqrt{\mu\mu_n}(\mu-\mu_n)}\sin\frac{R}{2}(\mu-\mu_n)\sin\frac{3R}{2}(\mu-\mu_n) + O(\mu^{-1}).$$

Тогда

$$b_N = -\left(\frac{\alpha\mu_n}{2\mu}\right)^N \frac{\pi}{2^{N-1}\Gamma(N/2)\Gamma(N/2+1)}\frac{l_2}{l_1}\int\limits_0^1 (\xi+1)^N f'(\xi)d\xi =$$

$$= \left(\frac{\alpha\mu_n}{2\mu}\right)^N \frac{\pi}{2^{N-1}\Gamma(N/2)\Gamma(N/2+1)}\operatorname{tg}\frac{3R(\mu-\mu_n)}{2}\int\limits_0^1 (\xi+1)^N f'(\xi)d\xi.$$

Оценим коэффициент b_N. Очевидно, что $b_N > 0$. С другой стороны, при $1/2 < \mu-\mu_n < 1$, $0 < \alpha < 1$ имеем

$$b_N \le \frac{\pi}{2^{2N-1}\Gamma(N/2)\Gamma(N/2+1)}\operatorname{tg}\frac{3}{4} < 1.$$

Следовательно,

$$F_{12}u_n(x) = u_n(x)(b_N + O(\mu^{-1})) + F_{14}u_n(x), \tag{22}$$

где $\mu - 1 \le \mu_n \le \mu - 1/2$, $\mu \ge \mu_0$, $0 < b_N < 1$, $N \ge 3$.

Используя соотношения (10)–(22), получаем

$$\sum_{\mu-1\le\mu_n\le\mu-1/2} |u_n(x)|^2 \le o(1)\sup_{|x-y|<\mu^{-1}} U_1(y,\mu) + \sum_{\mu-1\le\mu_n\le\mu-1/2} |F_{11}u_n(x) - F_{12}u_n(x)|^2 + O(\mu^{N-1}) \le$$

$$\le \sum_{\mu-1\le\mu_n\le\mu-1/2} |1-b_N|^2|u_n(x)|^2 + o(1)\sup_{|x-y|<\mu^{-1}} U_1(y,\mu) + O(\mu^{N-1}).$$

Итак, оценка (8), а следовательно, и лемма 4 доказаны.

4. Доказательство теоремы. Применяя к функции $\varphi(\lambda) = E_\lambda f(x)$ тауберову теорему Хёрмандера (см. [2]), получаем следующее утверждение (необходимую оценку скачка функции φ дает лемма 1).

Лемма 5. *Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $f(x) = 0$ при $|x - x_0| < r$, $x_0 \in \Omega$. Тогда при $s \ge 0$ справедливо неравенство*

$$|E_\lambda^s f(x_0)| \le c\|f\|_{L_2(\Omega)}\lambda^{N/4}(1 + r\sqrt{\lambda})^{-1/2-s}.$$

Отсюда в свою очередь вытекает (см. [14])

Лемма 6. *Пусть $s > (N-1)/2$ и функция $f \in L_2(\Omega)$ непрерывна в области $D \subset \Omega$. Тогда равномерно на любом компакте $K \subset D$ имеет место оценка $|E_\lambda^s f(x)| \le C(\|f\|_{C(D)} + \|f\|_{L_2(\Omega)})$.*

Введем функцию

$$F_l(x,y) = \sum_{n=1}^{l}\frac{u_n(x)\bar{u}_n(y)}{\mu_n^{N-1}}, \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n}.$$

Для доказательства теоремы нам необходимо еще следующее свойство этой функции.

Лемма 7. *Пусть K – произвольный компакт из Ω. Существует число $l > 0$ такое, что $F_l(x,x) > 0$, $x \in K$.*

Данное утверждение доказывается аналогично лемме 1.

С учетом указанного свойства функции F_l теорема доказывается достаточно просто. Действительно, пусть $s > (N-1)/2$ и функция f удовлетворяет условиям теоремы, $K \subset \Omega$ – произвольный компакт, $x_0 \in K$.

Рассмотрим функцию $f_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0)F_l(x,x_0)/F_l(x_0,x_0)$. Заметим, что $f_{x_0}(x_0) = 0$. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \in C_0^\infty(\Omega)$ – последовательность функций, обращающихся в нуль в окрестности точки x_0, сходящаяся к f в норме $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)} + \|\cdot\|_{C(D)}$. Тогда в силу лемм 5 и 6 будем иметь

$$\lim_{\lambda\to\infty} E^s_\lambda f_{x_0}(x_0) = \lim_{k\to\infty}\big[\lim_{\lambda\to\infty} E^s_\lambda \varphi_k(x_0) + \lim_{\lambda\to\infty} E^s_\lambda (f_{x_0} - \varphi_k)(x_0)\big] = 0.$$

Следовательно, согласно очевидному равенству $E_\lambda F_l(x,y) = F_l(x,y)$, $\lambda > l$, и регулярности средних Рисса, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ такое, что при $\lambda > \lambda_0$

$$|E^s_\lambda f(x_0) - f(x_0)| \le \left| E^s_\lambda f_{x_0}(x_0) + \frac{f(x_0)}{F_l(x_0,x_0)} E^s_\lambda (F_l(x_0,\cdot))x_0 - f(x_0)\right| \le |E^s_\lambda f_{x_0}(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Авторы благодарны В.А. Ильину и Ш.А. Алимову за обсуждение результатов работы и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашуров Р.Р.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 2000–2002.
2. *Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М.* // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31. Вып. 6. С. 28–83.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М., 1978.
4. *Шенк Д.* // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 1. С. 49–51.
5. *Левитан Б.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20. № 4. С. 437–468.
6. *Алимов Ш.А., Холмухамедов А.Р.* // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент, 1987. С. 147–156.
7. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2. С. 61–120.
8. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. С. 698–701.
9. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1990.
10. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 3. С. 359–369.
11. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 2. С. 188–199.
12. *Титчмарш Э.Ч.* // Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М., 1961.
13. *Alimov S.A., Joo I.* // Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 5–18.
14. *Алимов Ш.А.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 4. С. 669–681.

Ташкентский государственный университет

Поступила в редакцию
29.03.2004 г.