

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Beilinson, A. N. Varchenko, A. B. Goncharov,  
V. V. Schechtman, Projective geometry and  $K$ -theory,  
*Algebra i Analiz*, 1990, Volume 2, Issue 3, 78–130

<https://www.mathnet.ru/eng/aa188>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

May 15, 2025, 01:12:03



© 1990 г.

А. А. Бейлинсон, А. Н. Варченко,  
А. Б. Гончаров, В. В. Шехтман

### ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И К-ТЕОРИЯ

Александру Гротендику к 60-летию

В статье изучаются конструкции мотивных когомологий пары конфигураций прямых на плоскости. Прослеживаются многочисленные связи рассматриваемой проблематики с другими вопросами гомологической алгебры и проективной геометрии.

Как известно, группа линейных комбинаций многогранников в  $\mathbb{R}^3$ , рассматриваемых с точностью до движений, относительно операции разрезания многогранников является подгруппой в  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z} \otimes \mathbb{R}$ , при вложении в  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z} \otimes \mathbb{R}$  многограннику отвечает инвариант Дена и объем [1]. Изучение мотивных когомологий проективной плоскости с выделенными на ней двумя конфигурациями прямых приводит к аналогичной задаче описания группы  $A_2$  линейных комбинаций пар треугольников на проективной плоскости, рассматриваемых с точностью до действия  $\text{PGL}(3)$ , относительно операций разрезания любого из двух треугольников. Оказывается, что эта группа с точностью до 2-кручения изоморфна  $B_{1,2} \otimes S^2 B_1$ , где  $S^2 B_1$  - симметрический квадрат мультипликативной группы поля  $k$ , над которым рассматривается проективная плоскость, а  $B_{1,2}$  - это группа Блоха того же поля.

Аналогично группе  $A_2(k)$  пар треугольников на проективной плоскости  $\mathbb{P}^2(k)$  определяется группа  $A_n(k)$  пар  $n$ -мерных симплексов в проективном пространстве  $\mathbb{P}^n(k)$ . Мы рассматриваем группу  $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_n(k)$ , где  $A_0(k) = \mathbb{Z}$ ,  $A_1(k) = k^*$  - мультипликативная группа поля  $k$ .  $A$  наделяется структурой алгебры Хопфа. С алгеброй Хопфа  $A$  стандартным образом связывается серия комплексов  $A^*(n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ , представляющих собой компоненты "кобар-конструкции", см. (3.19). Гипотетически гомологии этих комплексов, тензорно умноженные на  $\mathbb{Q}$ , изоморфны факторам  $\gamma$ -фильтрации на  $K$ -группах Квиллена поля  $k$ , см. гипотезу (3.19.3). Первым нетривиальным комплексом является определенный в (3.18) комплекс

$$A^*(2) : 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\nu_{11}} k^* \otimes k^* \longrightarrow 0,$$

сосредоточенный в степенях 1, 2. Мы доказываем, что  $H^2(A^*(2)) \simeq K_2(k)$ ,  $H^1(A^*(2))_{\mathbb{Q}} \simeq K_3^{\text{nd}}(k)_{\mathbb{Q}}$ , где  $K_3^{\text{nd}}(k) = K_3(k)/K_1^3(k)$  - неразложимая часть группы  $K_3(k)$ , см. § 3.

Мы приводим конструкцию мотивных когомологий пары конфигураций прямых на

плоскости, см. (2.17). Идеи мотивных когомологий восходят к Гротендику, см. [2].

В § 1 изложен эскиз теории смешанных структур Ходжа, которая подсказывает конструкции мотивных когомологий, изложенные в § 2. В § 3 изложены конструкции, связывающие группу пар треугольников с группой Блоха. В § 4, 5 собраны доказательства.

Большая часть результатов этой работы анонсирована в [3].

Мы благодарны Спенсеру Блоху, Дону Загиру, Андрею Суслину за полезные обсуждения.

### § 1. Дилогарифм Аомото и алгебра Ходжа-Тейта

**1.1. Дилогарифм Аомото.** Треугольником на проективной плоскости  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  назовем тройку прямых  $L = (L_0, L_1, L_2)$ , его вершинами - точки  $L_{1j} = L_1 \cap L_j$ . С треугольником связана дифференциальная 2-форма  $\omega_L = \text{dln}(z_1/z_0) \wedge \text{dln}(z_2/z_0)$ , где  $z_j=0$  - однородное уравнение прямой  $L_j$ . С парой треугольников  $(L, M)$  связан интеграл

$$a(L, M) = \int_{\Delta_M} \omega_L, \tag{1.1.1}$$

где ориентированная 2-пленка  $\Delta_M$  - это криволинейный треугольник со сторонами на прямых  $\{M_j\}$ , с вершинами в  $\{M_{1j}\}$ , не пересекающий  $L$  и ориентированный так, как показано на рис. 1.1. Интеграл зависит от выбора пленки, но не меняется при ее непрерывной деформации. Интеграл называется *дилогарифмом Аомото*, см. [4].

Дилогарифм Аомото обладает следующими свойствами.

(1.1.2). *Кососимметричность.* При перенумерации набора  $L$  или набора  $M$  интеграл умножается на знак перестановки номеров.

(1.1.3). *Аддитивность.* Аддитивность по циклу. Пусть прямая  $M_3$  проходит через  $M_{12}$ . Положим  $M' = (M_0, M_1, M_3)$ ,  $M'' = (M_0, M_3, M_2)$ , тогда

$$a(L, M) = a(L, M') + a(L, M''),$$

если  $\Delta_M = \Delta_{M'} + \Delta_{M''}$ , см. рис. 1.2.

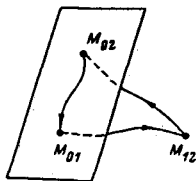


Рис. 1.1.

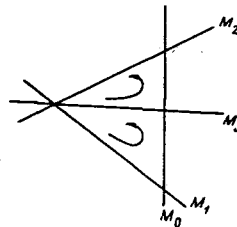


Рис. 1.2.

*Аддитивность по дифференциальной форме.* Пусть прямая  $L_3$  проходит через  $L_{12}$ , тогда

$$a(L, M) = a(L', M) + a(L'', M),$$

поскольку  $\omega_L = \omega_{L'} + \omega_{L''}$ .

(1.1.4). *Проективная инвариантность.* Для любого  $g \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$

$$a(gL, gM) = a(L, M),$$

если  $\Delta_{g \cdot n} = g \cdot \Delta_n$ .

Аналогично дилогарифму Аомото определяется полилогарифм Аомото порядка  $n$ . Полилогарифм Аомото порядка  $n$  определяется по двум наборам гиперплоскостей  $L = (L_0, \dots, L_n)$ ,  $M = (M_0, \dots, M_n)$  в проективном пространстве  $P^n(C)$ . Это - интеграл  $n$ -формы  $\omega_L$  по криволинейному  $n$ -симплексу  $\Delta_n$ , где форма и симплекс определены аналогично предыдущему. Полилогарифм обозначим через  $a_n(L, M)$ . Полилогарифм Аомото порядка  $n$  обладает свойствами кососимметричности, аддитивности, инвариантности, аналогичными свойствам (1.1.2)-(1.1.4).

Например, полилогарифм Аомото порядка 1 отвечает двум парам точек  $L = (L_0, L_1)$ ,  $M = (M_0, M_1)$  на проективной прямой и равен интегралу формы  $d \ln(z_1/z_0)$  по кривой, идущей из  $M_1$  в  $M_0$ . Пусть  $r(L_0, L_1, M_0, M_1)$  - двойное отношение четверки точек  $L, M$ , т.е. число, в которое переходит  $M_0$  под действием проективного преобразования, переводящего  $(L_0, L_1, M_1)$  в  $(\infty, 0, 1)$ . Тогда

$$a_1(L, M) = \ln r(L_0, L_1, M_0, M_1).$$

Полилогарифмы Аомото разных порядков взаимосвязаны: произведение полилогарифмов Аомото порядков  $p$  и  $q$  выражается в виде подходящей суммы полилогарифмов Аомото порядков  $p+q$ . Например, рассмотрим конфигурацию прямых в  $P^2(C)$ , изображенную на рис. 1.3. Тогда при подходящем выборе циклов имеем

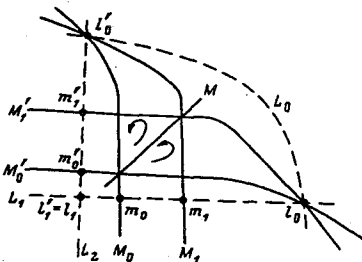


Рис. 1.3. Прямоугольник.

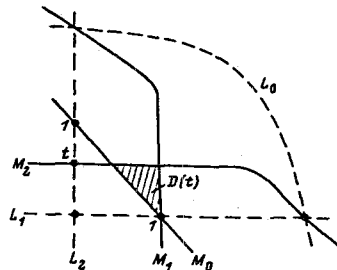


Рис. 1.4.

$$a_2(L; M'_0, M_1, M) + a_2(L; M, M'_1, M_0) = a_1(l, m) \cdot a_1(l', m').$$

1.2. Классический дилогарифм Эйлера [5] при  $t \in R$ ,  $0 < t < 1$ , определяется формулой

$$Li_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n/n^2, \quad (1.2.1)$$

$Li_2$  продолжается до многозначной аналитической функции на  $P^1(C) \setminus \{0, 1, \infty\}$  и удовлетворяет следующему функциональному уравнению. Положим

$$L(t) = Li_2(t) + \frac{1}{2} \ln t \cdot \ln(1-t) - \frac{\pi^2}{6}, \quad (1.2.2)$$

где  $\frac{\pi^2}{6} = Li_2(1)$ .  $L(t)$  называется функцией Роджерса. (Наше определение отличается константой  $-\frac{\pi^2}{6}$  от традиционного, [6, 7]).

Пусть  $0 < s < t < 1$ . Тогда

$$L(t) - L(s) + L(s/t) - L\left(\frac{1-t^{-1}}{1-s^{-1}}\right) + L\left(\frac{1-t}{1-s}\right) = 0. \tag{1.2.3}$$

Имеют место тождества

$$Li_2(t) + Li_2(1-t) + \ln t \cdot \ln(1-t) = \frac{\pi^2}{6}, \tag{1.2.4}$$

$$Li_2(t) + Li_2\left(\frac{t}{t-1}\right) + \frac{1}{2} \ln^2(1-t) = 0. \tag{1.2.5}$$

Доказательство этих тождеств см. в п.1.27, 1.11, 1.12 [5]. Другое доказательство приведено в (5.20).

Дилогарифм Эйлера - частный случай дилогарифма Аомото. А именно рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 1.4. Тогда

$$Li_2(t) = a_2(L, M) = \int_{D(t)} \frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y}. \tag{1.2.6}$$

**1.3. Смешанные структуры Ходжа.** Структура Ходжа веса  $l$  состоит из конечнопорожденной абелевой группы  $H_Z$  и убывающей фильтрации  $\{F^p\}$  в  $H_C = H_Z \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ , обладающей свойствами

$$H_C = F^p \otimes \bar{F}^{1-p+1}$$

для любого  $p$ . Черта означает комплексное сопряжение.

**Пример.** Структура Тейтса  $Z(-j)$  веса  $2j$  состоит из группы  $H_Z = \mathbb{Z}$  и фильтрации  $F^p = 0$  при  $p > j$ ,  $F^p = H_C$  при  $p \leq j$ .

Смешанная структура Ходжа состоит из конечнопорожденной абелевой группы  $H_Z$  и двух фильтраций - весовой  $W_\bullet$  и ходжевой  $F^\bullet$ .

Весовая фильтрация  $W_\bullet$  - это возрастающая фильтрация на  $H_C = H_Z \otimes \mathbb{C}$ . Ходжева фильтрация  $F^\bullet$  - это убывающая фильтрация на  $H_C$ . Ходжева фильтрация индуцирует структуру Ходжа веса  $l$  на каждом факторе  $Gr_1^W = W_1 / W_{1-1}$  весовой фильтрации. Индуцированная фильтрация определяется формулой

$$F^p Gr_1 = (F^p \cap W_1 \otimes \mathbb{C} + W_{1-1} \otimes \mathbb{C}) / W_{1-1} \otimes \mathbb{C}.$$

Структура Ходжа - частный случай смешанной структуры Ходжа. Очевидным образом определяются понятие морфизма смешанных структур Ходжа, а также стандартные линейные операции - прямой суммы, тензорного произведения. Смешанные структуры Ходжа образуют абелеву категорию. Согласно [7], когомологии квазипроективного многообразия обладают естественной смешанной структурой Ходжа.

Назовем смешанную структуру Ходжа  $H$  *тейтовской*, если все ее весовые факторы имеют вид  $\mathbb{Z}(i)^{n_i}$ . Назовем  $n$ -оснащением такой структуры задание пары морфизмов  $e: \mathbb{Z}(-n) \rightarrow gr_{2n}^W H$ ,  $e: gr_0^W H \rightarrow \mathbb{Z}(0)$ . Иными словами,  $n$ -оснащение состоит в задании

целочисленного вектора в  $gr_{2n}^W$  и целочисленного ковектора в  $gr_{2n}^W H$ .

Введем на множестве  $n$ -оснащенных тэйтовых структур отношение эквивалентности: наименьшее отношение эквивалентности, при котором  $H_1 \sim H_2$ , если существует морфизм  $H_1 \rightarrow H_2$ , согласованный с оснащениями. Обозначим через  $\mathcal{H}_n$  множество классов эквивалентности. Оказывается, на  $\mathcal{H}_n$  можно ввести структуру абелевой группы. Именно пусть  $(H, e_1, \overset{\vee}{e}_1)$  и  $(H_2, e_2, \overset{\vee}{e}_2)$  - две  $n$ -оснащенные тэйтовые структуры. Рассмотрим

структуру  $H_1 \otimes H_2$  с оснащением  $Z(-n) \xrightarrow{\Delta} Z(-n) \otimes Z(-n) \xrightarrow{e_1 \otimes e_2} gr_{2n}^W(H_1 \otimes H_2)$ ,  $gr_0^W(H_1 \otimes H_2) \xrightarrow{e_1 \otimes e_2} Z(0) \otimes Z(0) \xrightarrow{\Sigma} Z(0)$ , где  $\Delta$  - диагональ,  $\Sigma$  - сумма. Это операция определяет закон сложения в  $\mathcal{H}_n$ . При этом нулевым элементом будет класс структуры, у которой либо вектор, либо ковектор оснащения нулевой, обратным элементом к  $(H, e, \overset{\vee}{e})$  является класс  $(H, -e, \overset{\vee}{e})$  (или  $(H, e, -\overset{\vee}{e})$ ). Эти определения аналогичны определению структуры абелевой группы на группах Ext по Йонедэ.

Группа  $\mathcal{H}_1$  изоморфна  $\mathbb{C}^*$ . Действительно, пусть  $H$  - представитель класса  $[H] \in \mathcal{H}_1$ .  $H$  задается положением одномерного ходжева подпространства  $F^1$  относительно одномерного весового подпространства  $W_0$  в двумерном пространстве  $H$ . Пусть  $e_1 \in H$  - вектор, двойственный к оснащению ковектору на  $W_0$ ,  $e_2$  - целочисленный вектор, проектирующийся в оснащение в  $gr_2^W H$ .  $e_2$  определен с точностью до  $k \cdot e_1$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $f = \lambda e_1 + e_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  - вектор из  $F^1$ . Тогда число  $s(H) = \exp(2\pi i \lambda)$  не зависит от выбора вектора  $e_2$  и определяет изоморфизм  $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

Пусть  $L = (L_0, L_1, L_2)$ ,  $M = (M_0, M_1, M_2)$  - треугольники в  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Рассмотрим двумерные комплексные когомологии пары  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus L$ ,  $M \setminus (M \cap L)$ . Это пространство имеет каноническую смешанную структуру Ходжа  $H(L, M)$  [12]. Факторы ее весовой фильтрации нетривиальны в весах 0, 2, 4 и имеют вид  $Z(0)$ ,  $Z(-1)^k$ ,  $Z(-2)$ , где  $k=0, 1, 2, 3, 4$  в зависимости от расположения прямых  $L, M$ .  $H(L, M)$  обладает следующим оснащением: в  $gr_4^W H$  выделен вектор-класс формы  $\omega_L / (2\pi i)^2$ , а на  $gr_0^W H$  выделен ковектор-класс цикла  $\Delta_M$ . Таким образом,  $H(L, M)$  - тейтова структура длины 2.

Оказывается, что класс  $[H(L, M)] \in \mathcal{H}_2$  обладает свойствами, аналогичными (1.1.2)-(1.1.4).

(1.3.1). *Антисимметричность* при перенумерации набора  $L$  или набора  $M$ .

(1.3.2). *Аддитивность*.

$$[H(L, M)] = [H(L, M')] + [H(L, M'')],$$

$$[H(L, M)] = [H(L', M)] + [H(L'', M)].$$

(1.3.3). *Проективная инвариантность*.

$$[H(gL, gM)] = [H(L, M)],$$

где использованы обозначения пункта (1.1).

Действительно, антисимметричность и проективная инвариантность очевидны.

Докажем аддитивность по  $L$ . Рассмотрим смешанную структуру Ходжа  $H_1$  в двумерных когомологиях пары  $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{j=0}^{\zeta} L_j, M \setminus M \cap \bigcup_{j=0}^{\zeta} L_j)$ .  $H_1$  является тейтовой. Отображение ограничения задает гомоморфизмы

$$\pi: H(L', M) \otimes H(L'', M) \rightarrow H_1, \quad \rho: H(L, M) \rightarrow M_1.$$

Наделим  $H_1$  оснащением, у которого оснащающий вектор является образом при отображении  $\rho$  оснащающего вектора в  $gr_4^W H(L, M)$ , а ковектор - прообразом оснащающего ковектора в  $gr_0^W H(L, M)$  относительно изоморфизма  $gr_0^W \rho$ . Нетрудно видеть, что морфизм согласован с оснащениями. Это влечет аддитивность по  $L$ .

Аддитивность по  $M$  доказывается аналогично.

Пусть  $L=(L_0, \dots, L_n)$ ,  $M=(M_0, \dots, M_n)$  - наборы гиперплоскостей в  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Обозначим через  $H(L, M)$  смешанную структуру Ходжа в  $n$ -мерных когомологиях пары  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus L, L \setminus L \cap M$ . Факторы ее весовой фильтрации имеют вид  $Z(0), Z(-1)^{k_1}, \dots, Z(-n+1)^{k_{n-1}}, Z(-n)$ .  $H(L, M)$  имеет естественное оснащение: вектор в  $gr_{2n}^W H(L, M)$  и ковектор на  $gr_0^W H(L, M)$ . Класс структуры  $H(L, M)$  в  $\mathcal{H}_n$  обладает свойствами кососимметричности, аддитивности при разрезании по  $L$  или по  $M$ , проективной инвариантности, аналогичными свойствами (1.3.1)-(1.3.3).

Если  $n=1$ , то  $L, M$  - две пары точек в  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . При изоморфизме  $s: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  класс структуры  $H(L, M)$  переходит в  $\exp(a_1(L, M))$ , где  $a_1(L, M)$  - указанный выше логарифм Аомото двух пар точек на проективной прямой.

Аналогично предыдущему дилогарифм Аомото является одним из элементов матрицы периодов смешанной структуры Ходжа пары треугольников на плоскости.

**1.4. Умножение и коумножение оснащенных структур Тейта.** Группы  $\mathcal{H}_n$  взаимосвязаны при разных  $n$ . Точнее, имеются гомоморфизмы умножения и коумножения, определенные следующим образом.

Операция умножения  $\mu: \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$  индуцирована тензорным произведением смешанных структур Ходжа. Умножение коммутативно.

Определим коумножение

$$\nu = \bigotimes_{k+1=n} \nu_{k,1} : \mathcal{H}_n \rightarrow \bigotimes_{k+1=n} \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_1.$$

Пусть  $[H] \in \mathcal{H}_n$ ,  $R \subset gr_{2k}^W H$  - целочисленная решетка. Определим отображение  $\varphi: R \rightarrow \mathcal{H}_k$ .

Каждый вектор  $x \in R$  определяет  $k$ -оснащение на  $H$ , для которого ковектор оснащения прежний, а вектор оснащения равен  $x$ . Положим  $\varphi(x)$  равным классу этой  $k$ -оснащенной структуры.

Аналогично, если  $R^* \subset (gr_{2k}^W H)^*$  - двойственная решетка, каждый функционал  $x \in R^*$  определяет  $(n-k)$ -оснащение на  $H(k) = H \otimes Z(k)$ . Это дает отображение  $\psi: R^* \rightarrow \mathcal{H}_{n-k}^*$ .

$R \otimes R^*$  изоморфно пространству линейных операторов из  $R$  в  $R^*$ . Пусть  $1 \in R \otimes R^*$  - единичный оператор. Положим  $\nu_{k, n-k}(H) = \varphi \otimes \Psi(1)$ . Другими словами, если  $\{e_j\}$ ,  $\{e^j\}$  - двойственные базисы в  $R$  и  $R^*$ , то

$$\nu_{k, n-k}(H) = \sum_j \varphi(e_j) \otimes \Psi(e^j). \quad (1.4.1)$$

Умножение и коумножение согласованы:

$$\nu(a \cdot b) = \nu(a) \cdot \nu(b), \quad (1.4.2)$$

где  $x \cdot y = \mu(x \otimes y)$ .

Формула (1.4.2) нетрудно следует из определений.

Рассмотрим  $\mathcal{H} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ , где  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Z}$ . Согласно предыдущему,  $\mathcal{H}$  - алгебра Хопфа с коммутативным умножением  $\mu$  и коумножением  $\nu$  (см. определение и свойства алгебр Хопфа в [8]).

Коккоммутативную алгебру Хопфа  $\mathcal{H}_Q^*$ , двойственную к  $\mathcal{H}_Q = \mathcal{H} \otimes \mathbb{Q} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \otimes \mathbb{Q}$  назовем алгеброй Ходжа-Тейта.

(1.4.3). **Т е о р е м а.** *Алгебра Ходжа-Тейта  $\mathcal{H}_Q^*$  изоморфна градуированной алгебре некоммутативных многочленов, образующими которой в степени  $n$  служат все линейные функционалы на  $(\mathbb{C}/(2\pi i)^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ ; при этом эти образующие примитивны относительно коумножения.*

Отметим, что группа  $(\mathbb{C}/(2\pi i)^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{C}/(2\pi i)^{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$  есть векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ . Элемент  $x$  называется примитивным, если  $\nu(x) = x \otimes 1 + \otimes x$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы выводится из следующих утверждений.

Рассмотрим комплекс

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}, n} \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i, j > 0}} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}, i} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{Q}, j} \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{\substack{k+l+m=n \\ k, l, m > 0}} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}, k} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{Q}, l} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{Q}, m}$$

где  $d_1$  есть коумножение,  $d_2$  есть разность коумножений по первому и второму сомножителям. Тогда  $\text{Ker } d_1 \simeq \mathbb{C}/(2\pi i)^{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$  и  $\text{Im } d_1 = \text{Ker } d_2$ .

Последнее утверждение следует из обращения в ноль функтора  $\text{Ext}^2$  на категории смешанных структур Ходжа, см. [9].

**1.5. Двойственность Пуанкаре.** Пусть  $[H] \in \mathcal{H}_n$ ,  $H^*$  - двойственная к  $H$  смешанная структура Ходжа. Оснащение в  $H$  индуцирует оснащение в  $H^*$ .  $[H \otimes \mathbb{Z}(-n)] \in \mathcal{H}_n$ . Определим инволюцию  $i: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  формулой  $i: [H] \mapsto [H^* \otimes \mathbb{Z}(-n)]$ .

**1.5.1. Т е о р е м а 1.**  *$i$  является автоморфизмом алгебры  $\mathcal{H}$ , т.е.  $i(x \cdot y) = i(x) \cdot i(y)$ .*

**2.**  *$i$  является антиавтоморфизмом коалгебры  $\mathcal{H}$ , т.е.  $\nu(i(x)) = t(i(\nu(x)))$ , где  $t(a \otimes b) = b \otimes a$  - перестановка сомножителей.*



3.  $i(\{H(L, M)\}) = (-1)^n [H(M, L)]$ , где  $H(M, L) \in \mathcal{H}_n$  класс смешанной структуры Ходжа, связанной с парой наборов гиперплоскостей в  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , см. п. 1.3.

П. 1, 2 теоремы несложно следуют из определений, 3-й пункт - следствие двойственности Пуанкаре.

$i$  индуцирует отображение  $\mathcal{H}_Q^* \rightarrow \mathcal{H}_Q^*$ , которое является автоморфизмом коалгебры и антиавтоморфизмом алгебры.

1.5.2. Т е о р е м а. На примитивных элементах в  $\mathcal{H}_Q^*$   $i$  действует умножением на  $-1$ .

Теорема следует из структурной теоремы (1.4.3) и вычисления действия инволюции на структурах Тейта длины  $n$ , у которых есть только два нетривиальных весовых фактора:  $Z(0)$ ,  $Z(-n)$ .

С л е д с т в и е. Пусть  $x \in \mathcal{H}_{Q,2}^*$ , тогда

$$i(x) = -x + \mu\nu_{11}(x). \tag{1.5.3}$$

Формулу достаточно доказать в  $\mathcal{H}_Q^*$ . Если  $y \in \mathcal{H}_{Q,2}^*$ , то  $\bar{y} = y - \frac{1}{2}\mu\nu_{11}(y)$  примитивен. Согласно (1.5.2),  $i(\bar{y}) = -\bar{y}$ ,  $i(\mu\nu_{11}(y)) = \mu\nu_{11}(y)$ . Отсюда вытекает следствие.

1.6. Смешанные структуры Ходжа и модули над алгеброй Ходжа-Тейта. Алгебра  $\mathcal{H}_Q^*$  имеет следующий смысл: категория смешанных структур Ходжа, определенных над  $\mathbb{Q}$ , с весовыми факторами вида  $\mathbb{Q}(j)^P$  эквивалентна категории конечномерных градуированных модулей над  $\mathcal{H}_Q^*$ , в которых операторы из  $\mathcal{H}_{k,Q}^*$  понижают градуировку на  $k$ , см. [10].

Точнее, рассмотрим смешанную структуру Ходжа  $H$ , определенную над  $\mathbb{Q}$ , у которой весовые факторы имеют вид  $\mathbb{Q}(j)^P$ . Оказывается, что  $H$  определяет градуированный модуль над  $\mathcal{H}_Q^*$ .

А именно положим  $M = \text{ogr}_{2m}^W H_Q$ . Пусть  $f_k \in \mathcal{H}_k^*$ . Определим линейное отображение  $f_k: \text{gr}_{2m}^W H_Q \rightarrow \text{gr}_{2m-2k}^W H_Q$ . Для этого каждому линейному функционалу  $x$  на  $\text{gr}_{2m-2k}^W H_Q$  и вектору  $y$  в  $\text{gr}_{2m}^W H_Q$  отнесем число  $f_k[H_{x,y}]$ , где  $H_{x,y}$  - это структура  $H(m-k) = H \otimes \mathbb{Q}(m-k)$ , в которой  $k$ -оснащение определено вектором  $y(m-k)$  и ковектором  $x(m-k)$ .

Эта конструкция задает эквивалентность указанных выше категорий.

1.7. Мотивные когомологии пары конфигураций прямых на плоскости. В последнее время предпринимаются усилия по построению теории мотивных когомологий алгебраических многообразий - арифметико-алгебраического варианта сингулярных когомологий, см. [10]. В этой статье предлагается определение мотивных когомологий пары  $\mathbb{P}^2 \setminus L, M \setminus (L \cap M)$ , где  $L, M$  - конфигурации прямых на проективной плоскости.

Конструкция мотивных когомологий следует по пути, указанному выше для смешанных структур Ходжа. А именно, как показано выше, задание смешанной структуры Ходжа с весовыми факторами определенного вида эквивалентно заданию градуированного модуля над  $\mathcal{H}_Q^*$ . По аналогии мы определяем мотивные когомологии пары  $\mathbb{P}^2 \setminus L, M \setminus L \cap M$  как некоторый градуированный модуль  $H_M^*(L; M) = H_M^*(L; M)_0 \otimes H_M^*(L, M)_1 \otimes H_M^*(L, M)_2$  над

подходящей алгеброй  $A_{\mathbb{Q}}^*$ , см. п. 2.18.

Наша алгебра  $A_{\mathbb{Q}}^*$  имеет вид  $(A \otimes \mathbb{Q})^*$ , где  $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ ,  $A_0 = \mathbb{Z}$ , — некоторая коммутативная алгебра Хопфа. Группы  $A_n$  определяются в п. 2.1 по образцу определения групп  $\mathcal{H}_n$ , при этом за основу взяты свойства кососимметричности, аддитивности и проективной инвариантности (1.3.1)–(1.3.3). Из наших определений легко следует, что  $A_1$  изоморфна мультипликативной группе поля, над которым рассматривается проективная плоскость. Основным результатом статьи — описание группы  $A_2$ .

В модуле  $H_M^*(L; M)$  операторы из  $(A_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q})^*$  будут по определению понижать градуировку на  $k$ . Поэтому для описания модуля достаточно знать только компоненты  $A_0, A_1, A_2$  алгебры Хопфа  $A$  и операции в алгебре, связывающие эти компоненты. Мы определяем такие операции, а именно: умножения  $A_1 \times A_j \rightarrow A_{1+j}$  и коумножения  $A_{1+j} \rightarrow A_1 \times A_j$ , при  $i+j \leq 2$ , см. п. 2.2–2.10. Общие определения умножения и коумножения в  $A$  будут даны в § 4.

## § 2. Алгебра пар симплексов и мотивные когомологии пары конфигураций на плоскости

**2.1. Группы  $A_n$ .** Рассмотрим  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(k)$  над полем  $k$ . Назовем  $n$ -симплексом набор гиперплоскостей  $L = (L_0, \dots, L_n)$ . Симплекс назовем невырожденным, если гиперплоскости находятся в общем положении. Ребрам симплекса назовем всякое непустое пересечение гиперплоскостей из  $L$ . Пару  $n$ -симплексов  $L, M$  назовем допустимой, если у симплексов нет общих ребер.

Определим группу  $A_n = A_n(k)$  как абелеву группу с образующими  $(L; M)$ , где  $L, M$  — любая допустимая пара симплексов, и следующими соотношениями.

(2.1.1). Если симплекс  $L$  или  $M$  вырожден, то  $(L; M) = 0$ .

(2.1.2). Кососимметричность. Для всякой перестановки  $\sigma$  имеем

$$(\sigma L; M) = (L, \sigma M) = (-1)^{|\sigma|} (L, M),$$

где  $\sigma L = (L_{\sigma(0)}, L_{\sigma(1)}, \dots, L_{\sigma(n)})$ ,  $|\sigma|$  — четность перестановки.

(2.1.3). Аддитивность.

Аддитивность по  $L$ . Для всякого набора  $(L_0, \dots, L_{n+1})$  и  $n$ -симплекса  $M$

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (\hat{L}^j; M) = 0, \quad \text{где } \hat{L}^j = (L_0, \dots, \hat{L}_j, \dots, L_n).$$

Аддитивность по  $M$ . Для всякого набора  $(M_0, \dots, M_{n+1})$  и  $n$ -симплекса  $L$

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (L; \hat{M}^j) = 0.$$

(2.1.4). Проективная инвариантность. Для всякого  $g \in \text{PGL}_{n+1}(k)$

$$(gL; gM) = (L, M).$$

Положим  $A_0 = \mathbb{Z}$ .

(2.1.5). **З а м е ч а н и е.** Пусть  $k = \mathbb{C}$ . Поставим в соответствие допустимой паре  $(L; M)$  смешанную структуру Ходжа  $H(L; M)$ . Согласно свойствам (1.3.1)-(1.3.3) это определяет гомоморфизм

$$H : A_n \longrightarrow \mathcal{H}_n.$$

Группу  $A_n$  можно рассматривать как формальный аналог группы  $\mathcal{H}_n$ , а гомоморфизмы группы  $A_n$  в  $k$  как формальный аналог полилогарифмов Аомото.

Определим канонический изоморфизм  $r: A_1 \longrightarrow k^*$ , где  $k^*$  - мультипликативная группа поля  $k$ . Для этого четверке попарно различных точек  $(L_0, L_1; M_0, M_1)$  на  $\mathbb{P}^1$  отнесем число  $r(L_0, L_1; M_0, M_1)$ , где  $r$  - двойное отношение, см. п.1.1. Нулевому элементу в  $A_1$  отнесем число  $1 \in k$ . Нетрудно видеть, что соотношение кососимметричности переходит в соотношение  $r(L_1, L_0; M_0, M_1) = r(L_0, L_1; M_1, M_0) = r(L_0, L_1; M_0, M_1)^{-1}$ , а соотношения аддитивности переходят в соотношения  $r(L_0, L_1; M_0, M_1) \cdot r(L_1, L_2; M_0, M_1) = r(L_0, L_2; M_0, M_1)$ ,  $r(L_0, L_1; M_0, M_1) \cdot r(L_0, L_1; M_1, M_2) = r(L_0, L_1; M_0, M_2)$ .

(2.1.6). **Инволюция Пуанкаре.** Пусть  $(L; M)$  - допустимая пара  $n$ -симплексов в  $\mathbb{P}^n$ . Положим  $P_n(L; M) = (M; L)$ . Легко видеть, что эта формула корректно определяет инволюцию  $P_n: A_n \longrightarrow A_n$ . Эта инволюция является формальным аналогом двойственности Пуанкаре, см. п.1.5.

Из свойств двойного отношения следует, что  $P_1: A_1 \longrightarrow A_1$  - тождественное отображение. Описание инволюции  $P_2: A_2 \longrightarrow A_2$  см. в п. (3.9).

2.2. **Умножение**  $\mu: A_1 \otimes A_1 \longrightarrow A_2$ . Пусть  $(l_0, l_1; m_0, m_1)$ ,  $(l'_0, l'_1; m'_0, m'_1)$  - две четверки точек на прямой  $\mathbb{P}^1$ , причем  $l_0 \neq l_1$ ,  $l'_0 \neq l'_1$ . Рассмотрим конфигурацию прямых в  $\mathbb{P}^2$ , изображенную на рис.1.3. В этой конфигурации на прямой  $L_1$  четверка прямых  $L_0, L_2, M_0, M_1$  отсекает четверку точек  $(1; m)$ , на прямой  $L_2$  - четверка прямых отсекает четверку точек  $(1'; m')$ . Положим

$$\mu: (1; m) \otimes (1'; m') \longmapsto (L; P) + (L; Q), \tag{2.2.1}$$

где  $L = (L_0, L_1, L_2)$ ,  $P = (M'_0, M_1, M)$ ,  $Q = (M, M'_1, M_0)$ .

Элемент  $(L; P) + (L; Q)$  группы  $A_2$  назовем *прямоугольником* со сторонами  $r(1; m)$  и  $r(1'; m)$ , где  $r$  - двойное отношение.

**Предложение 1.** *Предыдущая конструкция корректно определяет гомоморфизм умножения  $\mu: A_1 \otimes A_1 \longrightarrow A_2$ .* (2.2.2)

2. **Умножение коммутативно.**

Доказательство в п. (4.1).

**З а м е ч а н и е.** Гомоморфизм  $H: \mathcal{H}_n \longrightarrow A_n(\mathbb{C})$ , определенный в п. (2.1.5), согласован с умножением

$$[H(L, P)] + [H(L, Q)] = [H(1; m)] \cdot [H(1'; m')]. \tag{2.2.3}$$

Это следует из формулы Кюннета. Формула (2.2.3) служит мотивировкой конструкции умножения.

Многомерная конструкция, аналогичная рис. 1.3, состоит в следующем. Пусть  $(L'; M') \subset \mathbb{P}^{n'}$ ,  $(L'', M'') \subset \mathbb{P}^{n''}$  - две допустимые пары невырожденных симплексов,  $L = (L_0, \dots, L_{n'+n''})$  - невырожденный симплекс в  $\mathbb{P}^{n'+n''}$ . отождествим  $\mathbb{P}^{n'+n''} \setminus L_0$  с  $(\mathbb{P}^{n'} \setminus L'_0) \times (\mathbb{P}^{n''} \setminus L''_0)$ . Тогда симплексы  $M', M''$  определяют в  $\mathbb{P}^{n'+n''}$  призму  $\Pi$ . Разбиение  $\Pi = \cup \Delta_j$  призмы на симплексы определяет элемент  $\sum (L; \Delta_j)$  в  $A_{n'+n''}$ . Так определяется умножение  $A_n \otimes A_n \rightarrow A_{n'+n''}$ .

**2.3. Комодуль пары конфигураций.** В следующих трех пунктах с парой  $(L; M)$  конфигураций прямых на плоскости будет связано градуированное векторное пространство над  $\mathbb{Q}$   $G(L; M)_{\mathbb{Q}} = G_0(L; M)_{\mathbb{Q}} \oplus G_1(L; M)_{\mathbb{Q}} \oplus G_2(L; M)_{\mathbb{Q}}$  и построены отображения

$$\varphi_{i,j}(L; M) : G_i(L; M)_{\mathbb{Q}}^* \otimes G_j(L; M)_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_{j-i, \mathbb{Q}}, \quad i \leq j.$$

Сначала для двух конфигураций  $L, M$  прямых на проективной плоскости определяется градуированный комплекс  $C^*(L; M) = \{C_i^j, d_i^j\}$ . Комплекс определяется комбинаторикой расположения прямых в наборах  $L, M$ . Комплекс, соответствующий паре  $L, M$ , канонически сопряжен комплексу, соответствующему паре  $M, L$ . Когомологии этого комплекса в степени 0 имеют градуировку 0, 2, 4:

$$H_0(C^*(L; M)) = G_0(L; M) \oplus G_1(L; M) \oplus G_2(L; M),$$

где слагаемое  $G_i$  имеет градуировку  $2i$ .

Группы  $G_0, G_2$  свободны и удовлетворяют соотношения  $G_1(L; M)^* \simeq G_{2-1}(M; L)$ ,  $i=0, 2$ . Нам неизвестно, всегда ли свободна группа  $G_1(M; L)$ . Во всяком случае, после тензорного умножения на  $\mathbb{Q}$   $G_1(L; M)_{\mathbb{Q}}^* \simeq G_1(M; L)_{\mathbb{Q}}$ . Группы  $G_1$  являются формальными аналогами весовых факторов смешанной структуры Ходжа  $H(L; M)$ , определенной в случае  $k=\mathbb{C}$ .

Мы покажем, что всякий вектор  $x$  в  $G_2(L; M)$  отождествляется с подходящей линейной комбинацией  $\sum n_i \Delta_i$  треугольников конфигурации  $L$ , а всякий вектор  $y \in G_0(L; M)^*$  - с подходящей линейной комбинацией  $\sum m_j \Lambda_j$  треугольников конфигурации  $M$ . Таким образом, паре  $x, y$  отвечает элемент  $\sum n_i m_j (\Delta_i, \Lambda_j)$  из  $A_2$ . Эта конструкция определяет отображение  $\varphi_{0,2}$ . Отображения  $\varphi_{0,1}, \varphi_{1,2}$  конструируются с помощью двойного отношения,  $\varphi_{11}$  - канонические спаривания вектора и ковектора.

**2.4. Комплекс  $C^*(L, M)$ .** Пусть  $L = (L_0, \dots, L_p)$ ,  $M = (M_0, \dots, M_q)$  - пара конфигураций прямых в  $\mathbb{P}^2$ . Предположим, что конфигурации  $L, M$  не содержат общих прямых или общих вершин. Такую пару конфигураций назовем допустимой.

Точку в  $\mathbb{P}^2$  назовем  $L$ -вершиной, если в ней пересекаются хотя бы две прямые из  $L$ ,  $M$ -вершиной, если в ней пересекаются хотя бы две прямые из  $M$ , и  $LM$ -вершиной, если в ней пересекаются хотя бы одна прямая из  $L$  и хотя бы одна прямая из  $M$ . Точка может иметь одновременно два типа.

Назовем  $L$ -флагом пару  $(l, L_i)$ , где  $l$  -  $L$ -вершина, лежащая на  $L_i$ . Аналогично определим  $M$ -флаги.

Положим

$$C^*(L;M) = C^*(L;M)_0 \otimes C^*(L;M)_2 \otimes C^*(L;M)_4,$$

где

$$C^*(L;M)_0 : 0 \longrightarrow C_0^{-2} \xrightarrow{d_0^{-2}} C_0^{-1} \xrightarrow{d_0^{-1}} C_0^0 \longrightarrow 0,$$

$$C^*(L;M)_2 : 0 \longrightarrow C_0^{-1} \xrightarrow{d_2^{-1}} C_2^0 \xrightarrow{d_2^0} C_2^1 \longrightarrow 0,$$

$$C^*(L;M)_4 : 0 \longrightarrow C_4^0 \xrightarrow{d_4^0} C_4^1 \xrightarrow{d_4^1} C_4^2 \longrightarrow 0.$$

По определению  $C_i^j = C^j(L;M)_i$  для  $(i, j) \neq (0, 0)$  и  $(4, 0)$  - это свободная абелева группа со следующими образующими:  $C_0^{-2} - \{(\mathbb{P}^2)\}$ ,  $C_0^{-1} - \{(M_1) | i=0, \dots, q\}$ ,  $C_2^{-1} - \{(L_1) | i=0, \dots, p\}$ ,  $C_2^0 - \{(\mathbb{P}^2), (N) | N \text{ пробегает все } LM\text{-вершины}\}$ ,  $C_2^1 - \{(M_1) | i=0, \dots, q\}$ ,  $C_4^1 - \{(L_1) | i=0, \dots, p\}$ ,  $C_4^2 - \{(\mathbb{P}^2)\}$ .

Пусть  $D_L$  - свободная абелева группа с образующими  $\{(l; L_1)\}$ , где  $(l; L_1)$  пробегает все  $L$ -флаги. По определению  $C_L^0 \subset D_L$  - это подгруппа, состоящая из таких линейных комбинаций  $\sum a_{(l; L_1)}(l; L_1)$ , что для каждой  $L$ -вершины  $l$  выполняется

$$\text{равенство } \sum_{L_1 \ni l} a_{(l; L_1)} = 0.$$

Аналогично пусть  $D_M$  - свободная абелева группа с образующими  $\{(m; M_j)\}$ , где  $(m; M_j)$  пробегает все  $M$ -флаги. Для  $M$ -вершины  $m$  пусть  $x_m = \sum_{M_j \ni m} (m; M_j) \in D_M$ . Пусть  $B_M \subset D_M$  - подгруппа, порожденная всеми элементами  $x_m$ . По определению положим  $C_M^0 = D_M / B_M$ .

Определим дифференциалы  $d_0^{-2}((\mathbb{P}^2)) = \sum_{i=0}^q (M_1)_i$ ;  $d_0^{-1}((M_1)) = \sum_{m \in M_1} (m, M_1)$ ;  $d_2^{-1}((L_1)) = (\mathbb{P}^2) + \sum (N)$ , где  $N$  пробегает все  $LM$ -вершины, лежащие на  $L_1$ ;  $d_2^0((N)) = \sum_{N_1 \ni N} (M_1)_{N_1}$ ;

$d_2^1((\mathbb{P}^2)) = -\sum_{i=0}^q (M_1)_i$ ;  $d_4^0((l; L)) = L$ ;  $d_4^1((L_1)) = (\mathbb{P}^2)$ .  $d_4^1$  задает гомоморфизм  $D_4 \rightarrow C_4^1$ ,

его ограничение на  $C_4^0$  задает дифференциал  $C_4^0 \rightarrow C_4^1$ .

Условное изображение комплекса  $C^*(L;M)$  см. на рис. 2.1. Здесь сплошные прямые изображают прямые из  $L$ , а пунктирные - прямые из  $M$ ,  $\square$  - плоскость  $\mathbb{P}^2$ .

Легко видеть, что  $C^*(L;M)$  есть комплекс, т.е.  $d^2=0$ . Отметим, что  $C^*(L;M)_0$  зависит только от конфигурации  $M$ , а  $C^*(L;M)_4$  - только от конфигурации  $L$ .

**Функториальность.** Пусть  $L \subset L'$ . Рассмотрим комплексы  $C^*(L, M)$ ,  $C^*(L', M)$ . Образующие первого комплекса лежат среди образующих второго комплекса. Это определяет вложение  $i: C^*(L;M) \rightarrow C^*(L';M)$ .

(2.4.1). Предложение.  $i$  - гомоморфизм комплексов.

Пусть  $M \subset M'$ . Образующие комплекса  $C^*(L; M)$  лежат среди образующих комплекса  $C^*(L; M')$ . Определим проекцию  $j: C^*(L; M') \rightarrow C^*(L; M)$ , переводя каждую образующую в одноименную, если таковая найдется, и в ноль, если таковой нет.

(2.4.2). Предложение.  $j$ -гомоморфизм комплексов.

Доказательства - непосредственной проверкой.

(2.4.3). Двойственность.

Предложение. Комплекс  $C^*(L; M)$  двойствен комплексу  $C^*(M; L)$ . Точнее,

$$C^*(L; M)_i = C^*(M; L)_{4-i}^*, \quad i=0, 2, 4.$$

Для задания изоморфизма определим скалярное произведение на базисах в  $C^*(L; M)_i$  и  $C^*(M; L)_{4-i}$ . Именно скалярное произведение разноименных образующих равно 0, скалярное произведение одноименных образующих равно 1, за единственным исключением:  $\langle (P^2), (P^2) \rangle = -1$ , где первый аргумент лежит в  $C^0(L; M)_2$ , а второй - в  $C^0(M; L)_2$ .

Например,  $\langle (M_1), (L_j) \rangle = 0$ ;  $\langle (M_1), (M_j) \rangle = \delta_{1j}$ , где левый аргумент лежит в  $C^{-1}(L; M)_0$ , а правый - в  $C^1(M; L)_4$  и т.д. Доказательство согласованности с дифференциалами - прямой проверкой.

Положим  $G_1(L; M) = H^0(C^*(L; M))_{2i}$ , тогда  $H^0 = G_0 \otimes G_1 \otimes G_2$ .

(2.4.4). Предложение. 1. Если  $p \neq 0$ , то  $H^1(C^*(L; M)_4) = 0$  при  $i \neq 0$ . Если  $q \neq 0$ , то  $H^1(C^*(L; M)_0) = 0$  при  $i \neq 0$ .

2.  $G_0(L; M)$  и  $G_2(L; M)$  - свободные группы.

3. Если  $p=q=3$ , то  $G_1(L; M)$  свободна.

Доказательство - в п. (4.2).

(2.4.5). Следствия. 1. При  $i=0, 2$  и любых  $p, q$   $G_1(L; M)^* \approx G_{2-i}(M; L)$ .

2. При  $p=q=3$   $G_1(L; M)^* \approx G_1(M; L)$ .

3. При любых  $p, q$  и  $0 \leq i \leq 2$   $G_1(L; M)_0^* \approx G_{2-i}(M; L)_0$ .

Опишем образующие и соотношения в  $G_2(L; M)$ .

Пусть  $0 \leq i < j \leq p$ . Обозначим через  $(L_{ij})$  цепь  $(L_i \cap L_j, L_i) - (L_i \cap L_j, L_j) \in C_4^0(L; M)$ .

Для  $0 \leq i < j < k \leq p$  положим  $L_{ijk} = (L_{ij}) - (L_{ik}) + (L_{jk})$ .  $L_{ijk}$  - коцикл, т.е. определяет элемент  $(L_{ijk}) \in G_2(L; M)$ .

(2.4.6). Предложение. 1. Элементы  $(L_{ijk})$  подчиняются следующим соотношениям:

(1)  $(L_{ijk}) = 0$ , если треугольник  $(L_i, L_j, L_k)$  вырожден;

(2) для  $0 \leq i < j < k < l \leq p$

$$(L_{ijk}) - (L_{ijl}) + (L_{ikl}) - (L_{jkl}) = 0.$$

2. Элементы  $(L_{ijk})$  и соотношения (1), (2) составляют полную систему образующих и соотношений группы  $G_2(L; M)$ .

Таким образом,  $G_2(L; M)$  - это группа линейных комбинаций треугольников

$(L_1, L_j, L_k) \subset L$  с соотношениями (1), (2). О доказательстве предложения см. в (4.2).

(2.4.7). **Предложение.** Пусть  $(L, M)$  - допустимая пара невырожденных треугольников. Тогда  $\text{rk } G_1(L; M) = 1$  при  $i=0, 2$  и  $\text{rk } (G_1(L; M)) = 4 - k_1 - k_2$ , где  $k_1$  - число вершин треугольника  $L$ , лежащих на прямых из  $M$ ,  $k_2$  - число вершин треугольника  $M$ , лежащих на прямых из  $L$ .

Доказательство - в п. (4.2).

**2.5. Отображение  $\varphi_{0,2}: G_0(L; M)^* \otimes G_2(L; M) \rightarrow A_2$ .** Согласно (2.4.6), всякий элемент  $u \in G_2(L; M)$  есть линейная комбинация  $\sum n_i \Delta_i$  треугольников конфигурации  $L$  с точностью до соотношений (1), (2) предложения (2.4.6). Аналогично всякий элемент  $x \in G_0(L; M)^*$  есть линейная комбинация  $\sum m_j \Lambda_j$  треугольников конфигурации  $M$  с точностью до соотношений, аналогичных соотношениям (1), (2). Положим  $\varphi_{0,2}(x \otimes u)$  равным  $\sum n_i m_j (\Delta_i \wedge \Lambda_j) \in A_2$ . Корректность отображения  $\varphi_{0,2}$  следует из соотношений (1), (2).

**2.6. Отображение  $\varphi_{0,1}: G_0(L; M)^* \otimes G_1(L; M) \rightarrow A_1$  (ср. с п.1.4).**

(2.6.1). **Двойное отношение.** Пусть  $f$  - не равная нулю мероморфная функция на  $\mathbb{P}^1$ ,  $b = \sum n_i b_i$  - дивизор на  $\mathbb{P}^1$ , носитель которого не содержит нулей и полюсов функции  $f$ . Положим  $f(b) = \prod f(b_i)^{n_i} \in k^*$ .

Пусть  $a, b$  - два дивизора с непересекающимися носителями и степени 0 на  $\mathbb{P}^1$ . Положим

$$r(a, b) = f_a(b) \in k^*, \tag{2.6.1.1}$$

где  $f_a$  - любая функция с  $\text{div } f_a = a$ . Если  $a = a_1 - a_0$ ,  $b = b_1 - b_0$ , то  $r(a, b) = r(a_0, a_1; b_0; b_1)$  в смысле (1.1.4).

(2.6.2). **Двойное отношение цикла и коцикла.** Коцикл в  $C_2^0(L; M)$  - это линейная комбинация  $z = \sum a_N(N) - n(\mathbb{P}^2)$ , где  $N$  пробегает  $LM$ -вершины, обладающая свойством: для любой прямой  $M_1 \subset M$  имеем  $\sum_{N \in M_1} a_N = n$ . Число  $n$  назовем *степенью* коцикла. Коцикл  $z$  определяет на каждой прямой  $M_1$  дивизор  $z_1 = \sum_{N \in M_1} a_N(N)$  степени  $n$ .

Кограница  $d_2^{-1}$  прямой  $L_1 \in L$  - это коцепь  $\sum_{N \in L_1} (N) - (\mathbb{P}^2)$ .

Согласно (2.4.6) и (2.4.5),  $G_0(L; M)^*$  - это группа линейных комбинаций треугольников  $(M_i, M_j, M_k) \subset M$ ,  $0 \leq i < j < k \leq q$ , с соотношениями (1), (2) предложения (2.4.6).

Пусть  $\Delta = (M_1, M_j, M_k)$  - невырожденный треугольник. Зафиксируем однородные линейные уравнения его прямых  $f_1 = 0$ ,  $f_j = 0$ ,  $f_k = 0$ . Пусть  $z \in C_2^0(L; M)$  - коцикл. Скажем, что  $z$  удачно расположен по отношению к стороне  $M_1$ , если носитель дивизора  $z_1$  не содержит вершин треугольника  $\Delta$ , и удачно расположен по отношению к треугольнику  $\Delta$ , если носитель коцикла  $z$  не содержит вершин треугольника  $\Delta$ .

Пусть  $z$  - удачный коцикл по отношению к  $\Delta$ . Положим

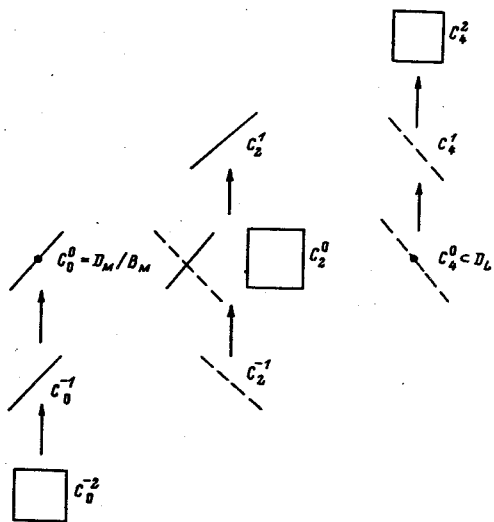


Рис. 2.1.  $C^*(L; M)$ .

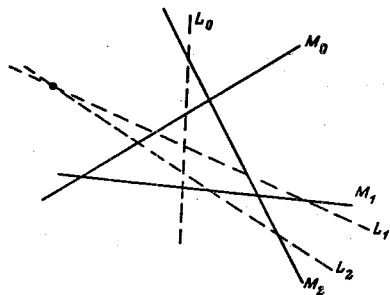


Рис. 2.2.

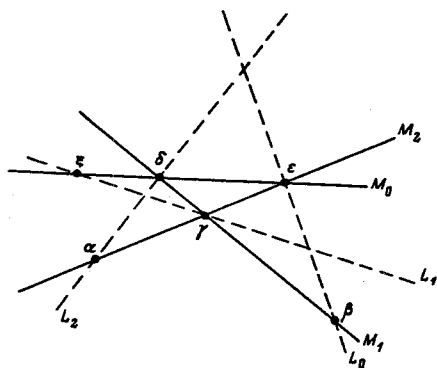


Рис. 2.3.

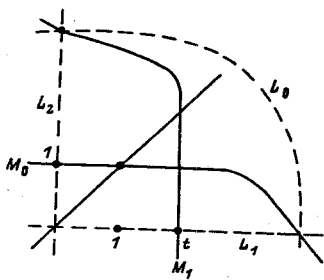


Рис. 3.1. Полувадрат  $p(t)$ .

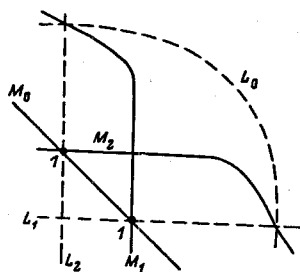


Рис. 3.2.  $\delta(1)$ .



$$\varphi(\Delta, z) = (-1)^{\deg z} \frac{f_j(z_1) \cdot f_k(z_j) \cdot f_1(z_k)}{f_k(z_1) \cdot f_1(z_j) \cdot f_j(z_k)} \tag{2.6.2.1}$$

Это число не зависит от выбора уравнений  $f_1=0, f_j=0, f_k=0$ .

Пусть  $z$  - удачный коцикл степени 0, тогда

$$\varphi(\Delta, z) = r(a_1; z_1) \cdot r(a_j; z_j) \cdot r(a_k; z_k), \tag{2.6.3}$$

где  $a_1$  - дивизор  $(M_j \cap M_1) - (M_k \cap M_1)$  на прямой  $M_1$ ;  $a_j, a_k$  - аналогичные дивизоры на  $M_j, M_k$ ;  $r$  - двойное отношение (2.6.1.1) двух дивизоров степени 0 на прямой.

(2.6.4). Предложение 1. Если коциклы  $z_1, z_2$  удачны, то  $\varphi(\Delta, z_1+z_2) = \varphi(\Delta, z_1) \cdot \varphi(\Delta, z_2)$ .

2. Если удачный коцикл  $z$  является кограницей, то  $\varphi(\Delta, z)=1$ .

Доказательство - в п. (4.3).

(2.6.5). Предложение. Всякий элемент  $[z] \in G_1(L; M)$  имеет удачного представителя.

Доказательство очевидно.

Пусть  $[z] \in G_1(L, M)$ ,  $z$  - удачный представитель элемента  $[z]$ . Положим

$$\varphi(\Delta, [z]) = \varphi(\Delta, z). \tag{2.6.6}$$

Согласно предыдущим предложениям, эта формула корректно определяет гомоморфизм

$$\varphi(\Delta, \cdot) : G_1(L, M) \longrightarrow k^*.$$

Положим  $\varphi(\Delta, z)=1$ , если прямые  $M_1, M_j, M_k$  проходят через одну точку.

(2.6.7). Предложение. Пусть  $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq q$ . Обозначим через  $\Delta_j$  треугольник  $(M_{i_1}, \dots, M_{i_j}, \dots, M_{i_4})$ . Тогда для любого  $[z] \in G_1(L, M)$  имеем

$$\prod_{j=1}^4 \varphi(\Delta_j, z)^{(-1)^d} = 1. \tag{2.6.7.1}$$

Доказательство - в п. (4.4).

Согласно (2.4.6), (2.6.7), корректно определяет гомоморфизм

$$G_0(L; M)^* \otimes G_1(L; M) \longrightarrow k^*.$$

Согласно (2.1), группа  $k^*$  канонически изоморфна  $A_1$ , поэтому  $\varphi$  определяет гомоморфизм

$$\varphi_{0,1}(L; M) : G_0(L; M)^* \otimes G_1(L; M) \longrightarrow A_1. \tag{2.6.8}$$

(2.7). Определим гомоморфизм  $\varphi_{1,2}(L; M) : G_1(L; M) \otimes_{\mathbb{Q}} G_2(L; M)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_{1, \mathbb{Q}}$ . А именно, согласно (2.4.5),

$$G_1(L; M)_{\mathbb{Q}}^* \otimes G_2(L; M)_{\mathbb{Q}} \simeq G_0(M; L)_{\mathbb{Q}}^* \otimes G_1(M; L)_{\mathbb{Q}}.$$

Положим по определению  $\varphi_{1,2}(L; M)$  равным композиции этого изоморфизма и гомоморфизма  $\varphi_{0,1}(M; L)$ .

Пусть  $p=q=3$ . Тогда в силу (2.4.4) и (2.4.5) та же конструкция определяет гомоморфизм

$$\varphi_{1,2}(L; M): G_1(L; M)_{\mathbb{Q}}^* \otimes G_2(L; M)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_1.$$

### (2.8). Функториальность.

**Предложение 1.** Пусть  $i_k: G_k(L; M) \longrightarrow G_k(L'; M)$  - естественные гомоморфизмы, индуцированные вложением конфигурации  $L \subset L'$ , см. п. (2.4). Тогда для любых  $x \in G_k(L'; M)^*$ ,  $y \in G_1(L; M)$  имеем

$$\varphi_{k,1}(i_k^* x \otimes y) = \varphi_{k,1}(x \otimes i_1 y). \quad (2.8.1)$$

2. Пусть  $j_k: G_k(L; M') \longrightarrow G_k(L; M)$  - естественные гомоморфизмы, индуцированные вложением конфигураций  $M \subset M'$ . Тогда для любых  $x \in G_k(L; M)^*$ ,  $y \in G_1(L; M)^*$  имеем

$$\varphi_{k,1}(j_k^* x \otimes y) = \varphi_{k,1}(x \otimes j_1 y).$$

Доказательство - в п. (4.5).

**(2.9). З а м е ч а н и е.** Можно показать, что гомоморфизм двойного отношения  $\varphi_{0,1}$  однозначно определяется свойствами (2.6.3), (2.6.4), (2.6.8), (2.8).

**(2.10). Коумножение**  $\nu_{11}: A_2 \longrightarrow A_1 \otimes A_1$  определяется по аналогии с конструкцией коумножения в  $\mathcal{H}$ , см. п. 1.4.

Пусть  $(L; M)$  - допустимая пара невырожденных треугольников в  $\mathbb{P}^2$ . Рассмотрим свободную градуированную группу  $G_0(L; M) \otimes G_1(L; M) \otimes G_2(L; M)$ . Треугольник  $M$  определяет ковектор  $e \in G_0(L, M)^*$ , треугольник  $L$  определяет вектор  $g \in G_2(L; M)$ , см. п. 2.4. Пусть  $f_1, \dots, f_k$  - базис в  $G_1(L; M)$ ,  $f^1, \dots, f^k$  - двойственный базис в  $G_1(L; M)^*$ . Положим

$$\nu_{11}(L; M) = \sum_{j=1}^k \varphi_{0,1}(e \otimes f_j) \otimes \varphi_{1,2}(f^j \otimes g). \quad (2.10.1)$$

**(2.10.2). П р и м е р.** Рассмотрим пару треугольников  $(L; M)$  в общем положении, см. рис. 2.2. Тогда  $\nu_{11}(L; M)$  равняется

$$\begin{aligned} & (M_1 | L_0, L_1; M_0, M_2) \otimes (L_1 | L_0, L_2; M_0, M_1) - \\ & - (M_1 | L_0, L_2; M_0, M_2) \otimes (L_2 | L_0, L_1; M_0, M_1) - \\ & - (M_2 | L_0, L_1; M_0, M_1) \otimes (L_1 | L_0, L_2; M_0, M_2) + \\ & + (M_2 | L_0, L_2; M_0, M_1) \otimes (L_2 | L_0, L_1; M_0, M_2). \end{aligned}$$

Здесь  $(M_1 | L_0, L_1; M_0, M_2) \in A_1$  обозначает четверку точек  $(M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_0, M_1 \cap M_2)$  на прямой  $M_1$  и т.д. Действительно, базис в  $G_1(L, M)$  порождают коциклы  $M_1 \cap L_1 - M_1 \cap L_0$ ,  $M_1 \cap L_2 - M_1 \cap L_0$ ,  $M_2 \cap L_1 - M_2 \cap L_0$ ,  $M_2 \cap L_2 - M_2 \cap L_0$ . Двойственный базис в  $G_1(L; M)^* = G_1(M; L)$  порождают коциклы  $L_1 \cap M_0 - L_1 \cap M_1$ ,  $L_2 \cap M_1 - L_2 \cap M_0$ ,  $L_1 \cap M_2 - L_1 \cap M_0$ ,  $L_2 \cap M_2 - L_2 \cap M_0$ . Согласно (2.6.3),  $\varphi(M, M_1 \cap L_1 - M_1 \cap L_0) = r(M_1 \cap M_0, M_1 \cap M_2; M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1) = r(M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1; M_1 \cap M_0,$

$M_1 \cap M_2$ ), поэтому  $\varphi_{01}(M \otimes (M_1 \cap L_1 - M_1 \cap L_0)) = (M_1 | L_0, L_1; M_0, M_2)$ . Аналогично  $\varphi(L, L_1 \cap M_1 - L_1 \cap M_0) = r(L_1 \cap L_0, L_1 \cap L_2; L_2 \cap M_0, L_2 \cap M_1)$ , поэтому  $\varphi_{12}((M_1 \cap L_1 - M_1 \cap L_0) \otimes L) = (L_1 | L_0, L_2; M_0, M_1)$  и т. д.

(2.10.3). Предложение. Формула (2.10.1) корректно определяет гомоморфизм  $v_{11}: A_2 \rightarrow A_1 \otimes A_1$ .

Доказательство - в п. (4.7).

(2.11). Предложение. Пусть  $(L, M)$  - допустимая пара треугольников. Тогда

$$v_{11}((M; L)) = tv_{11}((L; M)),$$

где  $t: A_1 \otimes A_1 \rightarrow A_1 \otimes A_1$  - перестановка сомножителей:  $t(x \otimes y) = y \otimes x$ .

Предложение следует из определения гомоморфизма  $v_{11}$  и п. 2.7.

(2.12). Согласование умножения и коумножения.

Предложение. Для всех  $x, y \in A_1$  имеем  $v_{11}(x \cdot y) = x \otimes y + y \otimes x$ . Напомним, что  $x \cdot y = \mu(x \otimes y)$  - это прямоугольник со сторонами  $x$  и  $y$ , см. рис. 1.3.

Доказательство - в п. (4.8).

(2.13). Пример. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 2.3. Ее класс проективной эквивалентности определяется единственным числом  $a \in k^*$  - двойным отношением  $r(L_1 \cap M_0, L_1 \cap M_1, L_1 \cap L_2, L_1 \cap L_0)$  точек на прямой  $L_0$ . Класс этой конфигурации в  $A_2$  обозначим через  $K(a)$ .

Предложение.  $v_{1,1}(K(a)) = a \otimes a + (-1) \otimes a$ .

Доказательство - в п. (4.9).

(2.14). Пример. Рассмотрим как элемент в  $A_2$  дилогарифмическую конфигурацию  $\delta(t) = (L, D(t))$ , изображенную на рис. 1.4.

Предложение.  $v_{1,1}(\delta(t)) = -(1-t) \otimes t$  при  $t \neq 1$ ,  $v_{1,1}(\delta(1)) = 0$ .

Доказательство - в п. (4.10).

(2.15). Рассмотрим в  $A_1 \otimes A_1$  подгруппу  $N$ , порожденную элементами вида  $(1-t) \otimes t$ ,  $t \in k^* \setminus 1$ .

Теорема.  $v_{1,1}(A_2) = N$ .

(2.15.1). Следствие. Ядро гомоморфизма  $v_{1,1}: A_2(k) \rightarrow A_1(k) \otimes A_1(k)$  канонически изоморфно  $K_2(k)$ , где  $K_1(k)$  - группы Квиллена поля  $k$  [11].

Положим  $A(n)^n = \underbrace{A_1 \otimes \dots \otimes A_1}_n$ ,  $A(n)^{n-1} = \otimes_{p_1} \dots \otimes_{p_{n-1}}$ , где суммирование производится по всем наборам  $(p_1, \dots, p_{n-1}): p_1 + \dots + p_{n-1} = n$ ,  $p_i \geq 1$ . Рассмотрим гомоморфизм  $d: A(n)^{n-1} \rightarrow A(n)^n$ , где  $d = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} d_j$ ,  $d_j$  отличен от нуля только на слагаемом  $\underbrace{A_1 \otimes \dots \otimes A_1}_{j-1} \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_1$  и переводит его элемент  $a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$  в

$a_1 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes v_{11}(a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_{n-1}$ .

(2.15.2). Следствие. Ядро гомоморфизма  $d: A(n)^{n-1} \rightarrow A(n)^n$  канонически изоморфно  $K_n^M(k)$ , где  $K_n^M(k)$  - К-группа Милнора поля  $k$ , см. [12].

Доказательство теоремы - в (5.11).

(2.16). Разложение Пуанкаре-Биркгофа-Витта для группы  $A_2$ . Пусть  $\Pi \subset A_2$  - подгруппа, порожденная прямоугольниками, т. е.  $\Pi = \mu(A_1 \otimes A_1)$ , где  $\mu$  - умножение. Пусть  $S^2 A_1 \subset A_1 \otimes A_1$  - подгруппа, порожденная элементами вида  $a \otimes b + b \otimes a$ . В силу (2.12)  $\nu_{11}(\Pi) = S^2 A_1$ .

Основная теорема 1. 1. Ядро эпиморфизма

$$\nu_{11}|_{\Pi} : \Pi \longrightarrow S^2 A_1$$

аннулируется умножением на 2.

2. Ядро и коядро гомоморфизма

$$\xi : A_2 \longrightarrow \pi \otimes A_2 / \Pi,$$

где  $x \longmapsto \mu \nu_{1,1}(x) \otimes [x]$ , аннулируются умножением на 2.

Доказательство. Легко видеть, что гомоморфизм  $\mu \nu_{1,1} : A_2 \longrightarrow A_2$ , ограниченный на  $\Pi$ , есть умножение на 2. Это влечет первое утверждение.

Определим гомоморфизм  $\gamma : \pi \otimes A_2 / \Pi \longrightarrow A_2$  формулой  $x \otimes [y] \longmapsto x + 2y - \mu \nu_{1,1}(y)$ , где  $y$  - представитель элемента  $[y]$ . Легко видеть, что  $\gamma$  корректно определен и  $\xi\gamma$ ,  $\gamma\xi$  являются умножением на 2. Это влечет второе утверждение.

(2.17). Алгебра Хопфа  $A$ . Приведем набросок конструкции коумножения

$$\nu_{k,1} : A_{k+1} \longrightarrow A_k \otimes A_1, \tag{2.17.1}$$

обобщающий конструкцию для  $\nu_{1,1}$ . Пусть  $n = k+1$ . Каждой допустимой паре конфигураций гиперплоскостей  $(L; M)$  в  $P^n = P^n(k)$  можно поставить в соответствие комплекс  $C^*(L; M) = \bigoplus_{i=0}^n C^*(L; M)_{2i}$ . Комплекс обладает свойствами, аналогичными свойствам, сформулированным в (2.4) для  $n=2$ . Положим  $G_1(L; M) = H^0(C^*(L; M)_{2i})$ . Имеем  $G_1(L; M)_{\mathbb{Q}} \cong G_{n-1}(M; L)_{\mathbb{Q}}^*$ . Аналогично предыдущему можно определить гомоморфизмы

$$\varphi_{k,1} : G_k(L; M)_{\mathbb{Q}}^* \otimes G_1(L; M)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_{1-k, \mathbb{Q}}. \tag{2.17.2}$$

Группы  $G_0(L; M)$  и  $G_n(L; M)$  свободны. Группа  $G_n(L; M)$  зависит только от конфигурации  $L$  и есть группа  $n$ -симплексов конфигурации  $L$  с точностью до соотношений аддитивности, ср. п. (2.4.6)  $(G_n(L; M))$  - это "модель Стейнберга" конфигурации  $L$ .  $G_0(L; M) \cong G_n(M; L)^*$ . Поэтому, если  $(L; M)$  - допустимая пара невырожденных  $n$ -симплексов, то в  $G_n(L; M)$  имеется выделенный ковектор, а на  $G_0(L; M)$  - выделенный ковектор. Далее, действуя как в 2.10, получаем гомоморфизмы коумножения (2.17.1).

Если  $n$ -симплексы  $(L; M)$  находятся в общем положении, то  $\nu_{k,1}((L; M))$  определяется формулой, приведенной в [10], с. 708, в которой в каждом члене нужно поменять местами тензорные сомножители, ср. пример (2.10.2).<sup>1</sup>

Вместе с гомоморфизмами умножения, набросок конструкции которых приведен в конце п. 2.2, введенное коумножение определяет на  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  структуру коммутативной

алгебры Хопфа, в частности, умножение и коумножение согласованы:  $\nu(a \cdot b) = \nu(a) \cdot \nu(b)$ . Предложение (2.12) представляет собой утверждение о совместности умножения и коумножения в градуировке (1,1). Точные конструкции и утверждения в многомерном случае будут приведены в последующей публикации.

Рассмотрим двойственную алгебру  $A_{\mathbb{Q}}^*$ . Она является коммутативной алгеброй Хопфа, поэтому, согласно [16],  $A_{\mathbb{Q}}^*$  является универсальной обертывающей алгеброй

<sup>1</sup>В [10]  $\nu_{k,1}$  обозначено через  $\mu_{n,n-k}$ . В [8] этом месте есть опечатка: в строках 16,17 необходимо заменить  $j_k$  на  $j_{n-k}$ , а  $j_{n-k}$  на  $j_k$ .  
 некоторой градуированной алгебры Ли  $L = L(k) = \bigoplus_{n \geq 0} L_n$ , где  $L_n = (A_n / \sum_{\substack{k+1=n \\ k, 1 > 0}} A_k \cdot A_1)_{\mathbb{Q}}$ .

В частности,  $L_0 = \mathbb{Q}$ ,  $L_1 = A_{1,\mathbb{Q}}^*$ ,  $L_2 = (A_2/\Pi)_{\mathbb{Q}}$ . Последняя группа будет вычислена в § 3.

(2.18). Мотивные когомологии пары конфигураций. Пусть  $(L, M)$  допустимая пара конфигураций прямых в  $\mathbb{P}^2$ , см. п. 2.4. Рассмотрим пару  $\mathbb{P}^2 \setminus L, M \setminus M \cap L$ .

По определению мотивными когомологиями этой пары с коэффициентами в  $\mathbb{Q}(0)$  называется следующий градуированный  $A_{\mathbb{Q}}^*$ -модуль:  $H_M^*(L; M) = \bigoplus_{a=0}^4 H_M^a(L; M)$ . Как векторное пространство  $H_M^*(L; M) = H^*(C^*(L; M)_{\mathbb{Q}})$ . Градуировка на  $H_M^*$  задается градуировкой по весам  $j$  каждого из  $H_M^a$ :  $H_M^a(L; M) = \bigoplus_{j=0}^2 H_M^a(L; M)_j$ , где  $H_M^a(L; M)_j = H^a(C^*(L; M)_{2j, \mathbb{Q}})$ . Легко видеть, что при  $a \neq 0$   $H_M^a(L; M)$  имеет не более одной нетривиальной градуированной компоненты. По определению имеем

$$H_M^0(L; M) = G_0(L; M)_{\mathbb{Q}} \oplus G_1(L; M) \oplus G_2(L; M)_{\mathbb{Q}}$$

Определим действие

$$H_M^a(L; M)_j \otimes A_{j-1, \mathbb{Q}}^* \longrightarrow H_M^a(L; M)_1$$

При  $a \neq 0$  это действие нулевое при  $i \neq j$  и сводится к умножению на числа при  $i = j$ . При  $a = 0$  эти гомоморфизмы отличны от нулевого только при  $0 \leq i \leq j \leq 2$  и индуцированы гомоморфизмами  $\varphi_{1j}(L; M)$ , определенными в (2.5)-(2.7).

(2.19). Двойственность Пуанкаре в мотивных когомологиях. Пусть  $M = M_0 \otimes M_1 \otimes M_2$  - градуированный  $A_{\mathbb{Q}}^*$ -модуль. Определим двойственный по Пуанкаре  $A_{\mathbb{Q}}^*$ -модуль  $\overset{\vee}{M} = \overset{\vee}{M}_0 \otimes \overset{\vee}{M}_1 \otimes \overset{\vee}{M}_2$  следующим образом. Как векторное пространство положим  $\overset{\vee}{M}_1 = (M_{2-1})^*$ . Действие алгебры  $A_{\mathbb{Q}}^*$  на  $\overset{\vee}{M}$

$$\overset{\vee}{M}_j \otimes A_{j-1, \mathbb{Q}}^* \longrightarrow \overset{\vee}{M}_1$$

индуцируем композицией

$$M_{2-1} \otimes A_{j-1, \mathbb{Q}}^* \longrightarrow M_{2-1} \otimes A_{j-1, \mathbb{Q}}^* \longrightarrow M_{2-j}$$

где первая стрелка переводит  $t \otimes a$  в  $t \otimes P(a)$ ,  $P$  - инволюция Пуанкаре, а вторая стрелка определяется структурой  $A_{\mathbb{Q}}^*$ -модуля на  $M$ .

**Предложение.**  $A_0^*$ -модуль  $H_M^a(M; L)$  двойствен по Пуанкаре модулю  $H_M^{-a}(L; M)$ .

Предложение легко следует из определений.

### § 3. Группа Блоха и вычисление $A_2/\pi$

(3.1.). **Группа Блоха.** Определим группу Блоха  $B_2=B_2(k)$  как абелеву группу, образующими которой служат символы  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  пробегает всевозможные четверки точек в  $\mathbb{P}^1(k)$ , а соотношениями служат следующие соотношения:

(3.1.1).  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ , если среди точек есть совпадающие.

(3.1.2). **Косая симметрия.** Для всякой перестановки  $\sigma \in S_4$

$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = (-1)^{|\sigma|} (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

(3.1.3). **Аддитивность.** Для любой пятерки  $\{x_1, \dots, x_5\}$

$$\sum_{i=1}^5 (-1)^i (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_5) = 0.$$

(3.1.4). **Проективная инвариантность.** Для каждого  $g \in \text{PGL}_2(k)$

$$(gx_1, gx_2, gx_3, gx_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

(3.2). **Вариант определения.** Определим группу  $B'_2(k)$  как абелеву группу, образующие которой - символы  $[t]$ ,  $tek$ , а соотношения таковы:

$$[0] = [1] = 0; \quad (3.2.1)$$

$$[t] + [t^{-1}] = 0, \quad [t] + [(1-t)] = 0 \text{ для всех } t \neq 0; \quad (3.2.2)$$

$$[t] - [s] + [s/t] - [(1-t^{-1})/(1-s^{-1})] + [(1-t)/(1-s)] = 0 \text{ для всех } t, s \neq 1. \quad (3.2.3)$$

Ср. [5], 1.27.

Определим гомоморфизм  $r: B_2 \rightarrow B'_2$ , относя четверке  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  двойное отношение  $r(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Нетрудно убедиться, что  $r$  - изоморфизм. Используя его, будем отождествлять  $B_2$  с  $B'_2$ .

(3.3). **З а м е ч а н и е.** Положим  $B_1(k) = A_1(k) = k^*$ . Заметим, что группа  $B_1(k)$  изоморфна группе с образующими  $[t]$ ,  $tek^*$ , и соотношениями  $[t] - [s] + [s/t] = 0$  для всех  $t, s \in k^*$ .

(3.4). **Традиционная группа Блоха.** Определим группу  $B_{1,2}(k)$ , которую будем называть *традиционной группой Блоха*.  $B_{1,2}(k)$  - это абелева группа с образующими  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  пробегает все четверки попарно различных точек в  $\mathbb{P}^1(k)$ , и соотношениями (3.1.4) и (3.1.3); при этом в соотношении (3.1.3)  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  - любые попарно различные точки. Группа  $B_{1,2}$  изучалась С.Блохом [13].

Группу  $B_{1,2}(k)$  можно определить как абелеву группу, порожденную символами  $(t)$ ,  $tek^* \setminus \{1\}$ , и соотношениями

$$(t) - (s) + (t/s) - \left( \frac{1-t^{-1}}{1-s^{-1}} \right) + \left( \frac{1-t}{1-s} \right) = 0 \quad (3.4.1)$$

для любых  $t, s \in k^*$ ,  $t \neq s$ . Функция двойного отношения отождествляет эту группу с предыдущей.

Имеется очевидный эпиморфизм  $f : B_2 \rightarrow B_2$ . В [14, 15] показано, что в группе  $B_2$  выполнены следующие соотношения:

$$6((x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_4, x_3, x_2)) = 0, \quad (3.4.2)$$

$$2((x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_2, x_4, x_3)) = 0. \quad (3.4.3)$$

(3.4.4). Следствие. Ядро естественного эпиморфизма  $f: B_2(k) \rightarrow B_2(k)$  аннулируется умножением на 6.

(3.4.5). Для поля  $F_3$  из трех элементов  $B_2(F_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $B_1(F_3) = \mathbb{Z}$ .

(3.4.6). Для поля  $F_5$  из пяти элементов  $B_2(F_5) = 0$ ,  $B_1(F_5) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Группа  $B_2(F_5)$  порождается символами (2), (3), (4) и соотношениями (4)=0, 3(2)=0, 2(3)=(2). В частности, элемент (3)+(1/3)=(3)+(2) имеет порядок 2, элемент (3)+(3/(3-1))=(3)+(4)=(3) имеет порядок 6, см. соотношения (3.4.2), (3.4.3).

Из [14] лемма 5.10 следует, что  $B_2(k) \rightarrow B_2(k)$ , если каждое из уравнений  $x^2-x+1=0$ ,  $x^2-t=0$ ,  $t \in k$  имеет решение в поле  $k$ .

(3.5). Комплекс Блоха. Рассмотрим комплекс

$$B(2) : 0 \rightarrow B_2 \xrightarrow{S} B_1 \wedge B_1 \rightarrow 0. \quad (3.5.1)$$

Здесь  $B_1 \wedge B_1 = B_1 \otimes B_1 / S^2 B_1$ , где  $S^2 B_1$  - подгруппа, порожденная элементами вида  $a \otimes b + b \otimes a$ . По определению  $S(t) = (1-t) \Delta t$ , где  $a \Delta b$  обозначает образ элемента  $a \otimes b$  при проекции  $B_1 \otimes B_1 \rightarrow B_1 \wedge B_1$ . Прямое вычисление показывает корректность отображения  $S$ . Комплекс (3.2.1) назовем традиционным комплексом Блоха. Имеется следующая замечательная теорема.

(3.5.2). Теорема. (Мацумото, [12]). *Имеется канонический изоморфизм  $\text{Coker } S \cong K_2(k)$ .*

2. (Суслин, [16]). *Имеется канонический эпиморфизм  $K_3(k)^{\text{ind}} \rightarrow \text{Ker } S$ , в ядре которого все элементы имеют конечный порядок.*

Здесь  $K_1(k)$  - это К-группы Квиллена поля  $k$  [11],  $k_3(k)^{\text{ind}} = K_3(k)/K_1(k)^3$  - неразложимая часть группы  $K_3$ . Умножение  $K_1(k) \otimes K_1(k) \rightarrow K_{1+j}(k)$  определено в [17].

Рассмотрим комплекс

$$B(2) : 0 \rightarrow B_2 \xrightarrow{\tilde{S}} B_1 \tilde{\wedge} B_1 \rightarrow 0. \quad (3.5.3)$$

Здесь  $B_1 \tilde{\wedge} B_1 = B_1 \otimes B_1 / \tilde{S}^2 B_1$ , где  $\tilde{S}^2 B_1 = \{x \in B_1 \otimes B_1 \mid 2x \in S^2 B_1\}$ ,  $\tilde{S}(t) = (1-t) \tilde{\Delta} t$ .

Имеет место очевидный эпиморфизм  $g : B_1 \wedge B_1 \rightarrow B_1 \tilde{\wedge} B_1$ , ядро которого аннулируется умножением на 2. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B_2 & \xrightarrow{S} & B_1 \wedge B_1 \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ B_2 & \xrightarrow{\tilde{S}} & B_1 \tilde{\wedge} B_1 \end{array}$$

коммутативна.  $g$  и  $f$  индуцируют отображения  $g_c: \text{Coker } S \rightarrow \text{Coker } \tilde{S}$  и  $f_k: \text{Ker } S \rightarrow \text{Ker } \tilde{S}$ .

(3.5.4). Предложение. 1.  $g_c$ -эпиморфизм, ядро которого аннулируется умножением на 2.

2. Коядро гомоморфизма  $f_k$  аннулируется умножением на 2.

3. Ядро гомоморфизма  $f_k$  аннулируется умножением на 6.

П.1 и 2 легко следуют из определений, п.3 есть следствие п.(3.4.4).

(3.5.5). Следствия. 1. Имеется канонический эпиморфизм  $K_2(k) \rightarrow \text{Coker } \tilde{S}$ , ядро которого аннулируется умножением на 2.

2. Имеется канонический гомоморфизм  $K_3^{\text{ind}}(k) \rightarrow \text{Ker } \tilde{S}$ , коядро которого аннулируется умножением на 2. В его ядре все элементы имеют конечный порядок.

В следующих двух пунктах будет определен гомоморфизм  $A_2 \rightarrow B_2$ .

3.6. Флаги и треугольники. Флагом в  $\mathbb{P}^2$  назовем всякую пару  $f=(m, M)$ , состоящую из точки  $m$  и прямой  $M$ , проходящей через точку. Обозначим через  $F$  свободную абелеву группу, образующими которой служат все флаги в  $\mathbb{P}^2$ .

Каждой тройке  $M=(M_0, M_1, M_2)$  попарно различных прямых поставим в соответствие следующую линейную комбинацию ее флагов:

$$\psi(M) = (M_{01}, M_0) - (M_{02}, M_0) + (M_{12}, M_1) - (M_{10}, M_1) + (M_{20}, M_2) - (M_{21}, M_2),$$

где  $M_{ij} = M_i \cap M_j$ . Отметим, что  $\psi(M)=0$ , если  $M_0, M_1, M_2$  проходят через одну точку.

Скажем, что флаг  $(m, M)$  допустим по отношению к треугольнику  $L=(L_0, L_1, L_2)$ , если  $M$  не является стороной треугольника.

Определим гомоморфизм  $\varphi_L: F \rightarrow B_2$ , положив  $\varphi_L(f)$  равным классу эквивалентности четверки точек  $(M \cap L_0, m \cap L_1, M \cap L_2, m)$  на прямой  $M$ , если флаг  $f=(m, M)$  допустим по отношению к  $L$ , и - нулю в противном случае.

Пусть  $(L; M)$  - допустимая пара треугольников. Положим  $\eta(L; M) = \varphi_L(\psi(M))$ , если в треугольнике  $M$  нет совпадающих сторон,  $\eta(L; M)=0$  - в противном случае.

Предложение. Предыдущая конструкция корректно определяет гомоморфизм  $\eta: A_2 \rightarrow B_2$ .

Гомоморфизм  $\eta$  назовем флаговым или шестичленным.

Доказательство - в следующем пункте.

3.7. Девятичленный гомоморфизм. Приведем другую конструкцию флагового гомоморфизма. Пусть  $(L, M)$  - допустимая пара треугольников, причем стороны треугольника  $M$  попарно различны. Для  $0 \leq i, j \leq 2$  рассмотрим упорядоченные по возрастанию пары  $\{i_1, i_2\} = \{0, 1, 2\} \setminus \{i\}$ ,  $\{j_1, j_2\} = \{0, 1, 2\} \setminus \{j\}$ . Положим  $\eta_{ij}(L, M)$  равным классу четверки  $(L_{i_1} \cap M_j, L_{i_2} \cap M_j | M_{j_1} \cap M_j, M_{j_2} \cap M_j)$  в группе  $B_2$ . Положим

$$\eta'(L; M) = \sum_{i, j=0}^2 (-1)^{i+j+1} \eta_{ij}(L; M). \quad (3.7.1)$$

Предложение. 1. Предыдущая конструкция корректно определяет гомоморфизм  $\eta': A_2 \rightarrow B_2$ .



Гомоморфизм  $\eta'$  совпадает с флаговым гомоморфизмом  $\eta$ .

**З а м е ч а н и е.** Рассмотрим двойные отношения четверок точек в (3.4.1). Тогда эти числа участвуют в первых девяти слагаемых формулы на с.709 в [10].<sup>2</sup> Геометрическая интерпретация этих чисел как двойных отношений указанных выше четверок точек была дана Д. Загиром в 1987 г.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** предположений 3.6 и 3.7. Пусть  $(L; M)$  - допустимая пара треугольников. Выражение  $\eta(L; M) - \eta'(L; M)$  состоит из 15 членов. Каждые 5 из них, отвечающие четверкам точек на фиксированной прямой  $M_1$ , представляют собой пятичленное соотношение в  $B_2$ . Поэтому  $\eta = \eta'$ . Докажем корректность флагового гомоморфизма. Очевидно, что гомоморфизм  $\eta$  аддитивен и кососимметричен по  $M$ . С другой стороны, нетрудно показать, что  $\eta'$  аддитивен и кососимметричен по  $L$ .

**3.8. Подгруппа полуквадратов**  $\tilde{\Pi} \subset A_2$ . Назовем *полуквадратом* со стороной  $t$  допустимую пару треугольников, изображенную на рис.3.1, обозначение -  $P(t)$ . Обозначим через  $\tilde{\Pi} \subset A_2$  подгруппу, порожденную полуквадратами.

(3.8.1). **П р е д л о ж е н и е.** Подгруппа полуквадратов  $\tilde{\Pi}$  содержит подгруппу прямоугольников. Все элементы группы  $\tilde{\Pi}/\Pi$  аннулируются умножением на 2.

Доказательство - в п. (5.1).

**(3.9). Дилогарифмическое отображение.** Поставим в соответствие числу  $tek^*$  дилогарифмическую конфигурацию  $\delta(t) = (L; D(t))$ , изображенную на рис.1.4 и рассматриваемую как элемент в  $A_2$ . Пусть  $x(x_1, \dots, x_4)$  - четверка попарно различных точек на  $\mathbb{P}^1$ . Положим  $\delta(x) = \delta(r(x))$ . Положим  $\delta(x) = 0 \in A_2$ , если среди точек  $x_1, x_2, x_3, x_4$  есть совпадающие.

(3.9.1). **П р е д л о ж е н и е.** 1.  $12\delta(1) = 0$  в группе  $A_2$ .

Элемент  $6\delta(1)$  в группе  $A_2$  равен квадрату со стороной  $(-1)$ .

П.1 предложения следует из п.2, поскольку квадрат со стороной  $(-1)$  есть элемент порядка 2 в группе  $A_2$ . Доказательство предложения - в п. (5.2).

Рассмотрим подгруппу  $\Sigma \subset A_2$ , порожденную подгруппой полуквадратов  $\tilde{\Pi}$  и элементом  $\delta(1)$ .

(3.9.2). **С л е д с т в и е.** В фактор-группе  $\Sigma/\Pi$  все элементы аннулируются умножением на 6.

**(3.10). П р е д л о ж е н и е.** 1.  $\eta(\Sigma) = 0$ , т.е.  $\eta$  корректно определяет гомоморфизм

$$\eta : A_2/\Sigma \longrightarrow B_2.$$

2. Дилогарифмическое отображение  $\delta$  корректно определяет гомоморфизм  $\delta : B_2 \longrightarrow A_2/\Sigma$ .

Первое утверждение легко следует из определений, второе будет доказано в

<sup>2</sup>В [10] в этом месте опечатка: слагаемое  $a_1 b_1^{-1} \ominus (1 - a_1 b_1^{-1})$  должно входить со знаком +.

п. 5.8.

(3.11). Основная теорема 2. Флаговый гомоморфизм  $\eta: A_2/\Sigma \rightarrow B_2$  и дилогарифмический  $\delta: B_2 \rightarrow A_2/\Sigma$  являются взаимно обратными изоморфизмами.

Теорема доказана в (5.10).

(3.12). Регуляризованный флаговый гомоморфизм. Определим гомоморфизм  $\chi: A_2 \rightarrow B_2$  группы  $A_2$  в традиционную группу Блоха, для которого  $\Pi \subset \text{Ker } \chi$ . Отображение  $\chi$  сначала определим на допустимых парах  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  невырожденных треугольников, у которых ни одна из вершин треугольника  $M$  не лежит на прямой  $L_0$ . На группу  $A_2$  отображение продолжим, пользуясь отношениями эквивалентности проективной инвариантности (2.1.4), аддитивности по  $M$  (2.1.3) и кососимметричности по  $L$  (2.1.2).

(3.12.1). Лемма 1. В группе  $B_2(k)$  для любых  $x, y \in k^* \setminus 1$  выполняются равенства  $(x)+(1-x)=(y)+(1-y)$ ,  $6(x)+6(1-x)=0$ .

2. Для любого  $x \in k^* \setminus 1$  получим  $[x]=(x)+(x^{-1})$ . Тогда  $2[x]=0$ ,  $[x]+[y]=[xy]$  для любых  $x, y \in k^* \setminus 1$ .

Элемент  $(x)+(1-x)$  обозначим через  $c$ .

Допустимую пару  $(L; M)$  невырожденных треугольников назовем *аффинной*, если на  $L_0$  нет вершин треугольника  $M$ .

Пусть  $(L; M)$  - аффинная пара, в которой вершины треугольника  $L$  не лежат на сторонах треугольника  $M$ , и вершины треугольника  $M$  не лежат на сторонах треугольника  $L$ . Положим

$$\begin{aligned} \chi((L; M)) = & (r(M_0 \cap L_2, M_0 \cap L_0, M_0 \cap L_1, M_0 \cap M_2)) - \\ & - (r(M_0 \cap L_2, M_0 \cap L_0, M_0 \cap L_1, M_0 \cap M_1)) - (r(M_2 \cap L_2, \\ & M_2 \cap L_0, M_2 \cap L_1, M_2 \cap M_0)) + (r(M_2 \cap L_2, M_2 \cap L_0, \\ & M_2 \cap L_1, M_2 \cap M_1)) - (r(M_1 \cap L_2, M_1 \cap L_0, M_1 \cap M_2)) + (r(M_1 \cap L_2, \\ & M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_0)), \end{aligned} \quad (3.12.2)$$

где  $r$  - двойное отношение четверки точек.

Если аффинная пара  $(L; M)$  не удовлетворяет сделанным предположениям, то формулу (3.12.2) изменим следующим образом.

Если одна из вершин  $M_1 \cap M_j$  треугольника  $M$  лежит на  $L_1$ , то два слагаемых в (3.12.2), в которые входит  $M_1 \cap M_j$  положим равными нулю.

Если прямая  $M_1$  треугольника  $M$  проходит через  $L_1 \cap L_0$  или  $L_2 \cap L_0$ , то положим равными нулю два слагаемых в (3.12.2), в которые входят четверки точек на прямой  $M_1$ . Например, если это  $M_0$ , то положим равными нулю первые два слагаемых. Если прямая  $M_1$  не проходит через  $L_1 \cap L_0$  и вершина  $M_1 \cap M_j$  лежит на  $L_2$ , то положим

$$(r(M_1 \cap L_2, M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_j)) = c.$$

Если прямая  $M_1$  проходит через  $L_1 \cap L_2$ , то положим

$$\begin{aligned} & (r(M_1 \cap L_2, M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_j)) - \\ & - r(M_1 \cap L_2, M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_k) = \\ & = [r(M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_j, M_1 \cap M_k)]. \end{aligned}$$

(3.12.3). **Пример.** Пусть  $\delta(t)$  - дилогарифмическая конфигурация, см. рис.1.4. Тогда  $\chi(\delta(t))=(1-t)$  при  $t \in k^* \setminus \{0,1\}$ ,  $\chi(\delta(1))=C$ .

(3.12.4). **Пример.** Пусть  $P(t)$  - полуквадрат, см. рис.3.1. Тогда  $\chi(p(t))=[t]=(t)+(t^{-1})$ .

Пусть  $f : B_1(k) \rightarrow B_2(k)$  - естественный эпиморфизм. Имеет место очевидная лемма.

(3.12.5). **Лемма.** Если  $(L;M)$  - аффинная пара треугольников, то  $f\chi((L;M))=-\eta((L;M))$ , где  $\eta$  - флаговый гомоморфизм.

(3.12.6). **Предложение.** *Отображение  $\chi$  однозначно продолжается до гомоморфизма  $A_2 \rightarrow B_1$ , причем  $\Pi \subset \text{Ker } \chi$ .*

Доказательство - в (5.14)-(5.17).

(3.13). **Предложение.** *Отображение  $\Delta : (t) \mapsto \delta(1-t)$ ,  $t \in K^* \setminus 1$ , корректно определяет гомоморфизм  $\Delta : B_1 \rightarrow A_2/\Pi$ .*

Доказательство - в (5.9).

(3.14). **Основная теорема 3.** *Регуляризованный флаговый гомоморфизм  $\chi : A_2/\Pi \rightarrow B_1$  и гомоморфизм  $\Delta : B_1 \rightarrow A_2/\Pi$  являются взаимно обратными изоморфизмами.*

Доказательство - в (5.18).

(3.15). **Двойственность Пуанкаре.**

(3.15.1). **Теорема.** *Пусть  $P_2: A_2 \rightarrow A_2$  - инволюция Пуанкаре из (2.16). Тогда для всякого  $x \in A_2$*

$$P_2(x) = -x + \mu\nu_{11}(x).$$

(3.15.2). **Следствия.** 1. *Если  $x \in \Pi$ , то  $P(x)=x$ .*

2. *Если  $x \in L(B_2)$ , то  $P(x) = -x$ .*

3.  $\eta(L;M)+\eta(M,L) = 0$ , где  $\eta$  - флаговый гомоморфизм.

Другими словами, шесть четверок точек, построенных на сторонах треугольника  $M$  с помощью треугольника  $L$  в (3.6), и аналогичные шесть четверок точек, построенные на сторонах треугольника  $L$  с помощью треугольника  $M$ , в сумме дадут ноль в группе Блоха  $B_2$ .

Теорема доказана в (5.12).

(3.16). **Инволюция сопряжения.** На группе  $A_2$  имеется инволюция сопряжения. А именно пусть  $\mathbb{P}^{2*}$  - двойственная проективная плоскость, точки которой - прямые в  $\mathbb{P}^2$ , а прямые - точки в  $\mathbb{P}^2$ .

Пусть  $L = (L_0, L_1, L_2)$  - невырожденный треугольник в  $\mathbb{P}^2$ . Поставим ему в соответствие треугольник  $L^*=(L_0^*, L_1^*, L_2^*)$  в  $\mathbb{P}^{2*}$  со сторонами, соответствующими вершинам  $(L_1 \cap L_2, L_0 \cap L_2, L_0 \cap L_1)$  треугольника  $L$ .

Нетрудно убедиться, что отображение  $Q : (L;M) \mapsto (L^*, M^*)$  корректно определяет инволюцию  $Q_2: A_2 \rightarrow A_2$ . (Аналогичная конструкция определяет инволюцию  $Q_n: A_n \rightarrow A_n$ ).

**Теорема.**  $Q_2 = P_2$ .

Заметим, что конфигурация  $P_2Q_2(L;M)=(M^*,L^*)$ , вообще говоря, не является проективно эквивалентной  $(L,M)$ , однако определяет тот же элемент группы  $A_2$ . Интересно, имеются ли другие естественные автоморфизмы  $A_2$ ?

Теорема доказана в (5.13).

(3.17). **Функция Роджерса.** Определим отображение  $L : B\mathbb{1}_2 \rightarrow A_2$  формулой

$$L(t) = 2\delta(1-t) + \mu(t\theta(1-t)), \quad (3.17.1)$$

где  $t \in k^* \setminus 1$ ,  $\mu : A_1 \otimes A_1 \rightarrow A_2$  - умножение.

**Предложение.** 1.  $L$  корректно определяет гомоморфизм  $B\mathbb{1}_2 \rightarrow A_2$ .

2. Гомоморфизм

$$(I, L) : \Pi \otimes B\mathbb{1}_2 \rightarrow A_2, \quad (3.17.2)$$

где  $I$  - вложение,  $(I, L): x \otimes y \mapsto x + L(y)$ , имеет ядро и коядро, аннулируемые умножением на 2.

Доказательство - в (5.19).

Гомоморфизм  $L$  является формальным аналогом функции Роджерса (1.2.2), умноженной на -2.

Аналогично формула  $\tilde{L}(\theta) = 12\delta(t) + 6\mu((1-t)\theta t)$  задает гомоморфизм  $\tilde{L}: B_2 \rightarrow A_2$ , который является формальным аналогом функции Роджерса, умноженной на 12 и увеличенной на  $2\pi^2$ .

(3.18). Рассмотрим диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C(2) : & 0 & \longrightarrow & \pi & \xrightarrow{v_{11}} & S^2 A_1 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow I & & \downarrow & & \downarrow & \\ A(2) : & 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{v_{11}} & A_1 \otimes A_1 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \chi \downarrow & & \downarrow \xi & \\ B(2) : & 0 & \longrightarrow & B\mathbb{1}_2 & \xrightarrow{S} & B_1 \wedge B_1 & \longrightarrow 0, \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (3.18.1)$$

где по определению  $B_1 = A_1$ ,  $I$  - вложение,  $\chi : A_1 \rightarrow B\mathbb{1}_2$  - регуляризованный флаговый гомоморфизм,  $S$  - гомоморфизм, определенный в (3.5),  $\xi$  - естественная проекция. Будем считать, что комплексы сосредоточены в степенях 1, 2.

По определению правый столбец диаграммы точен. Согласно (3.14), левый столбец точен. Определим гомоморфизм  $B_1 \wedge B_1 \rightarrow A_1 \otimes A_1$  формулой  $a \wedge b \rightarrow a \otimes b - b \otimes a$ . Вместе с гомоморфизмом  $L: B_2 \rightarrow A_2$  это определяет морфизм комплексов  $L(2): B(2) \rightarrow A(2)$ . Отсюда получаем морфизм комплексов

$$(C(2) \otimes B(2)) \rightarrow A_2.$$

(3.18.2). **Теорема.** 1. Диаграмма (3.18.1) коммутативна.

1. Диаграмма (3.18.1) коммутативна.

2. Ядро и коядро морфизма  $(I, L)$  в каждом члене аннулируются умножением на 2.

(3.18.3). **Следствие.** Имеет место канонический изоморфизм

$$H^1(A(2))_{\mathbb{Q}} \cong K_3(k)_{\mathbb{Q}}^{1\text{nd}}.$$

Отметим, что, согласно (2.15), имеет место канонический изоморфизм  $H^2(A(2)) \cong K_2(k)$ .

Теорема доказана в (5.20).

(3.19). Когомологии алгебры  $A_{\mathbb{Q}}^*(k)$  и алгебраическая К-теория поля  $k$ . Рассмотрим алгебры Хопфа  $A_{\mathbb{Q}}$  и  $A_{\mathbb{Q}}^*$ , введение в (2.15). Напомним, что  $A_{\mathbb{Q}}^*$  есть универсальная обертывающая алгебра  $U(L)$  подходящей градуированной  $\mathbb{Q}$ -алгебры Ли  $L=L(k)$ .

(3.19.1). Когомологии  $A_{\mathbb{Q}}^*(k)$ . Для каждого  $n \geq 1$  определим комплекс

$$A^*(n) : 0 \rightarrow A(n)^1 \rightarrow \dots \rightarrow A(n)^n \rightarrow 0,$$

сосредоточенный в степенях от 1 до  $n$ . Положим

$$A(n)^i = \otimes_{p_1} A_{p_1} \otimes \dots \otimes A_{p_i},$$

суммирование производится по всем наборам  $(p_1, \dots, p_i)$  таким, что  $p_1 + \dots + p_i = n$  и  $p_j \geq 1$  для всех  $j$ . Положим дифференциал  $d^i : A(n)^i \rightarrow A(n)^{i+1}$  равным альтернированной сумме  $\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} d_j^i$ , где  $d_j^i$  переводит

$$a_1 \otimes \dots \otimes a_i \in A_{p_1} \otimes \dots \otimes A_{p_i}$$

в

$$\sum_{\substack{p'_j + p''_j = p_j \\ p'_j, p''_j \geq 1}} a_1 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes v_{p'_j p''_j}(a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_i.$$

Равенство  $d^2=0$  есть прямое следствие коассоциативности коумножения  $v$ . Положим  $A^*(n)_{\mathbb{Q}} = A^*(n) \otimes \mathbb{Q}$ .

Пусть  $\mathbb{Q}(j)$  - градуированный  $A_{\mathbb{Q}}^*$ -модуль с  $\mathbb{Q}(i)_j = \mathbb{Q}$ , и  $\mathbb{Q}(j) = 0$  при  $i \neq j$ . Имеют место канонические изоморфизмы

$$H^1(A_{\mathbb{Q}}(n)) = \text{Ext}_{A_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)),$$

см. [18].

Комплексы  $A(n)_{\mathbb{Q}}$  содержат квазиизоморфные им подкомплексы  $B(n)_{\mathbb{Q}}$  такие, что  $\otimes_{\mathbb{N}} B(n)_{\mathbb{Q}}$  есть стандартный комплекс коцепей алгебры Ли  $L : C^*(L) = \wedge L^*$ .

При  $n=1$  комплексы  $A(1)_{\mathbb{Q}} = B(1)_{\mathbb{Q}}$  сводятся к одному члену  $A_{1, \mathbb{Q}} = B_{1, \mathbb{Q}}$ . При  $n=2$  мы получаем комплексы  $A(2)_{\mathbb{Q}}, B(2)_{\mathbb{Q}}$ , рассмотренные в предыдущем пункте.

(3.19.2). Согласно (2.15.2),

$$H^n(A(n)) \cong K_n^H(k),$$

где  $K_n^H(k)$  - К-группа Милнора поля  $k$ .

Теперь рассмотрим К-группы Квиллена  $K_1(k)$  [11].

(3.19.3). Г и п о т е з а. Для всех  $j$  имеют место естественные изоморфизмы

$$K_j(k) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{n = [\frac{j}{2}] + 1}^j H^{2n-j}(A(n)_{\mathbb{Q}}).$$

Этот изоморфизм является гипотетическим „изоморфизмом Атьи-Хирцебруха“ для мотивных когомологий, ср. [10]. Индуцированная этим разложением фильтрация на  $K_j(k) \otimes \mathbb{Q}$  гипотетически совпадает с  $\gamma$ -фильтрацией.

Для  $j=1$  (3.19.3) очевидна, а для  $j=2$  следует из (3.19.2) и равенства  $K_2(k) = K_2^M(k)$ . В этих случаях изоморфизм верен без тензорного умножения на  $\mathbb{Q}$ .

Для  $j=3$  имеем, согласно Суслину [16],

$$K_3(k) \otimes \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{2} \right] \cong (K_3^M(k) \otimes K_3^{\text{nd}}(k)) \otimes \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{2} \right]$$

и изоморфизм (3.19.3) следует из (3.19.2) и (3.18.3).

Отметим, что существуют другие комплексы, гипотетически вычисляющие присоединенные факторы  $\gamma$ -фильтрации на  $K_j(k) \otimes \mathbb{Q}$ . Эти комплексы введены С. Ландсбергом и С. Блохом в интересных работах [19, 20].

#### § 4. Свойства умножения и коумножения

Этот параграф посвящен операциям умножения и коумножения в группах  $A_1$  - пар двоеточий на проективной прямой - и  $A_2$  - пар треугольников на проективной плоскости. В параграфе, в частности, доказаны утверждения, сформулированные в § 2.

(4.1). Д о к а з а т е л ь с т в о (2.2.2). Корректность очевидна. Коммутативность умножения следует из леммы.

(4.1.1). Л е м м а. В проективных координатах  $x_0, x_1, x_2$  пусть  $L(L_0, L_1, L_2)$ ,  $M=(M_0, M_1, M_2)$ ,  $M'=(M'_0, M'_1, M'_2)$  - наборы прямых, заданных соответственно нулями функций  $x_0, x_1, x_2$ ,

$$\begin{array}{ll} a_0^0 x_0 + a_0^1 x_1 + a_0^2 x_2, & a_1^0 x_0 + a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2, \\ a_2^0 x_0 + a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2, & a_0^0 x_0 + a_0^2 x_1 + a_0^1 x_2, \\ a_2^0 x_0 + a_2^2 x_1 + a_2^1 x_2, & a_1^0 x_0 + a_1^2 x_1 + a_1^1 x_2. \end{array}$$

Тогда в группе  $A_2(L; M) = (L; M')$ , см. рис. 4.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поменяем местами  $L_1$  и  $L_2$ , тогда в силу кососимметричности (2.1.2)  $(L; M) = -(L; M'_0, M'_2, M'_1) = (L; M')$ .

(4.2.). Д о к а з а т е л ь с т в о (2.4.4). Первый пункт легко проверяется непосредственно. Докажем свободу группы  $G_2(L; M)$ . Перед предложением (2.4.6) определены классы  $(L_{1jk}) \in G_2(L; M)$ . Выделим среди них все классы  $(L_{1jk})$ ,  $1 < j < k$ , со свойствами: точка  $l = L_j \cap L_k$  не лежит на  $L_1$ , среди прямых из набора  $L$ , проходящих через  $l$ , прямая  $L_1$  имеет наименьший номер. Легко видеть, что выделенные классы образуют свободный базис в  $G_2(L; M)$ . Это, в частности, доказывает предложение (2.4.6).

Докажем свободу группы  $G_0(L; M)$ . Выделим все флаги  $\{(m, M_j)\}$  со свойствами:

точка  $t$  не лежит на прямой  $M_1$ , среди прямых из набора  $M$ , проходящих через  $t$ , найдется прямая, номер которой меньше номера  $j$ . Легко видеть, что набор выделенных флагов порождает свободный базис в  $G_0(L;M)$ .

Докажем, что, если  $p=q=3$ , то  $G_1(L;M)$  свободна. Коцикл в  $G_2^0(L;M)$  - это линейная комбинация  $z = \sum_{N \in M_1} a_N(N) - n(P^2)$ , где  $N$  пробегает  $LM$ -вершины, и обладающая свойством: для любой прямой  $M_i \subset M$  имеем  $\sum_{N \in M_1} a_N = n$ , см. (2.6.2). Всякий коцикл можно изменить на кограницу так, чтобы  $a_N = 0$ , если  $(N) \in M_1$ .

В этом случае коцикл назовем приведенным. Степень приведенного коцикла, очевидно, равна 0.

1-й случай: на прямой  $M_1$  точки  $M_1 \cap L_0$ ,  $M_1 \cap L_1$ ,  $M \cap L_2$  попарно различны. В этом случае у каждого класса из  $G_2(L;M)$  есть единственный приведенный представитель и  $G_2(L;M)$  изоморфна группе приведенных коциклов. Группа приведенных коциклов есть подгруппа свободной группы и потому свободна. Ранг этой группы равен числу  $LM$ -вершин, не лежащих на  $M_1$ . Легко видеть, что это число равно числу  $4 - k_1 - k_2$ , определенному в (2.4.7). Например, на рис. 4.2. базис в группе приведенных циклов (и, следовательно, в  $G_2(L, M)$ ) образуют циклы  $(\alpha) - (\beta) + (\gamma)$ ,  $(\delta) - (\gamma)$ .

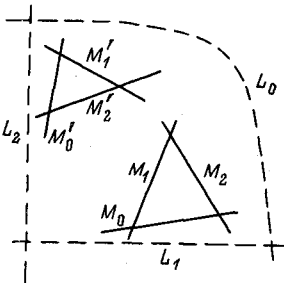


Рис. 4.1.

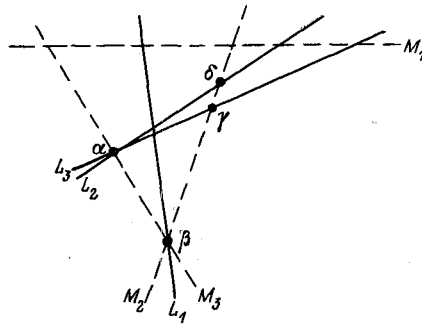


Рис. 4.2.

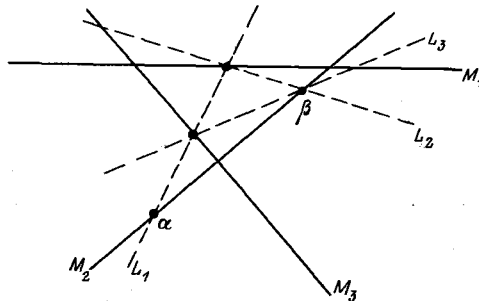


Рис. 4.3.

2-й случай - на каждой прямой из  $M$  есть  $L$ -вершина, см. рис. 4.3. В этом случае свободный базис в  $G_2(L;M)$  порождает коцикл  $(\alpha) - (\beta)$ . Отметим, что в этом случае число  $4 - k_1 - k_2$ , определенное в (2.4.7), равно 1. Предложение (2.4.4) доказано.

Предложение (2.4.7) справедливо, поскольку  $g_k G_i(L; M) = 1$  при  $i=0, 2$  в силу доказанного выше предложения (2.4.6),  $g_k G_i(L; M) = 4 - k_1 - k_2$  в силу разобранных выше случаев 1 и 2.

(4.3). Доказательство предложения (2.6.4). П.1 предложения (2.6.4) очевиден, докажем п.2.

Пусть  $z = \sum a_m \delta(L_m) - (\sum a_m)(\mathbb{P}^2)$  - удачная кограница. Из удачности следует, что  $a_m = 0$ , если прямая  $L_m$  проходит через вершины треугольника  $\Delta$ . Поэтому каждое слагаемое  $a_m(\delta(L_m) - (\mathbb{P}^2))$  удачно. П.2 достаточно доказать для  $z = \delta(L_m) - (\mathbb{P}^2)$ .

На прямой  $L_m$  выберем аффинную координату  $x$ . Пусть  $x_1, x_j, x_k$  - координаты точек  $M_1 \cap L_m, M_j \cap L_m, M_k \cap L_m$  - пересечений прямой  $L_m$  со сторонами треугольника  $\Delta$ . Тогда, согласно (2.6.2.1),  $\varphi(\Delta, z) = -(x_1 - x_j)(x_j - x_k) \cdot (x_k - x_1) / (x_1 - x_k)(x_j - x_1)(x_k - x_j) = 1$ .

(4.4). Доказательство предложения (2.6.7).

1-й случай - прямые  $M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, M_{i_4}$  не имеют трехкратных пересечений, см. рис. 4.4. Пусть  $z = \sum a_N(N) - n(\mathbb{P}^2)$  - представитель элемента  $[z]$ . Рассмотрим

носитель коцикла  $z - LM$ -вершины точки  $N$ , входящие в  $z$  с ненулевыми коэффициентами. Если точка носителя не является  $M$ -вершиной (см. на рис. 4.4 точку  $\alpha$ ), то непосредственная проверка показывает, что вклад такой точки в левую часть формулы (2.6.7.1) равен 1. Пусть точка носителя является  $M$ -вершиной. В этом случае возможны два варианта (см. точки  $\beta$  и  $\gamma$  на рис. 4.4). В первом варианте прямая  $L_s$  из набора  $L$ , проходящая через  $\beta$ , пересекает прямые  $M_{i_1}, M_{i_4}$  в разных точках. Вычитая из коцикла  $z$

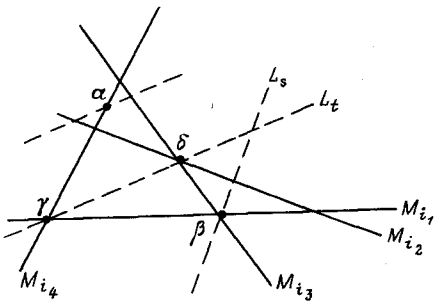


Рис. 4.4.

кограницу  $a_\beta \delta(L_s)$ , получим коцикл, в носитель которого  $M$ -вершина  $\beta$  не входит. Вклад в левую часть формулы (2.6.7.1) точек, возникших из  $\beta$ , в силу предыдущего равен нулю. Во втором варианте прямая  $L_t$  из набора  $L$ , проходящая через  $\gamma$ , пересекает прямые  $M_{i_2}, M_{i_3}$  в одной точке  $\delta$ . Вычислим вклад от точки  $\gamma$  в левую часть формулы (2.6.7.1). В  $\varphi(\Delta_1, z)$  вклад равен  $(f_{i_2}(\beta)/f_{i_3}(\beta))^{a_\beta}$ , где  $f_{i_j} = 0$  - уравнение прямой  $M_{i_j}$ . В  $\varphi(\Delta_2, z)$  вклад равен  $(f_{i_4}(\delta)/\varphi_{i_1}(\delta))^{-a_\beta}$  (для вычисления вклада от  $\beta$  в треугольнике  $\Delta_2$  нужно коцикл  $z$  уменьшить на кограницу  $a_\beta \delta(L_t)$ , тогда в носитель нового коцикла войдет точка  $\delta$  с коэффициентом  $-a_\beta$ ). В  $\varphi(\Delta_3, z)$  вклад равен  $(f_{i_4}(\delta)/f_{i_1}(\delta))^{-a_\beta}$ . В  $\varphi(\Delta_4, z)$  вклад равен  $(f_{i_2}(\beta)/f_{i_3}(\beta))^{a_\beta}$ . Итак, вклад точки  $\beta$  в левую часть формулы (2.6.7.1) равен 1.

2-й случай - прямые  $M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, M_{i_4}$  имеют трехкратное пересечение, см. рис. 4.5. В этом случае, изменяя коцикл  $z$  на кограницу, можно добиться того, что в носитель коцикла  $z$  не будут входить



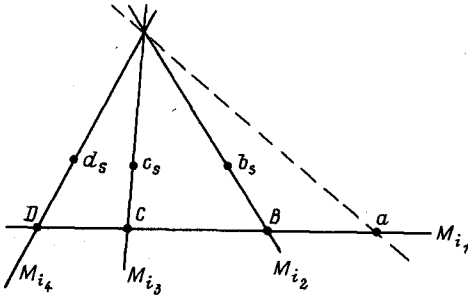


Рис. 4.5.

вершины треугольников  $\Delta_j$ , и, более того, на прямой  $M_{i_1}$ , не проходящей через тройное пересечение  $M_{i_2} \cap M_{i_3} \cap M_{i_4}$ , носитель состоит из одной точки. Обозначим ее через  $a$ . Пусть  $n$  - степерь этого коцикла. Обозначим через  $b_s, c_s, d_s, s = 1, \dots, n$  точки носителя цикла  $z$ , лежащие на прямых  $M_{i_2}, M_{i_3}, M_{i_4}$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^4 \varphi(\Delta_j, z)^{(-1)^j} &= (-1)^n (f_{i_3}(a)/f_{i_4}(a))^n \times \\ &\times \left( \prod_{s=1}^n (f_{i_4}(c_s)/f_{i_1}(c_s))(f_{i_1}(d_s)/f_{i_3}(d_s)) \right) \times \\ &\times (-1)^n (f_{i_2}(a)/f_{i_4}(a))^{-n} \left( \prod_{s=1}^n (f_{i_4}(b_s)/f_{i_1}(b_s))(f_{i_1}(d_s)/f_{i_2}(d_s)) \right)^{-1} \times \\ &\times (-1)^n (f_{i_2}(a)/f_{i_3}(a))^n \left( \prod_{s=1}^n (f_{i_3}(b_s)/f_{i_1}(b_s))(f_{i_1}(c_s)/f_{i_2}(c_s)) \right) = \\ &= (-1)^n \left[ (f_{i_3}(B)/f_{i_4}(B))(f_{i_4}(C)/f_{i_2}(C))(f_{i_2}(D)/f_{i_3}(D)) \right]^n = 1. \end{aligned}$$

(4.5). Доказательство предложения (2.8). Докажем п.1 предложения, п.2 доказывается аналогично.

**Функториальность  $\varphi_{0,2}$ .** Согласно (2.4.6), (2.4.5),  $x \in G_0(L'; M)^*$  - это линейная комбинация  $\sum a_\alpha \Delta_\alpha$  треугольников в конфигурации  $M$ ,  $i_0 x \in G_0(L; M)^*$  - это та же линейная комбинация  $\sum a_\alpha \Delta_\alpha$ .  $y \in G_2(L; M)$  - это линейная комбинация  $\sum b_\beta \Gamma_\beta$  треугольников в конфигурации  $L$ ,  $i_2 y \in G_2(L'; M)$  - это та же линейная комбинация  $\sum b_\beta \Gamma_\beta$  треугольников, но рассматриваемых как треугольники в конфигурации  $L'$ . Правая и левая части формулы (2.8.1) в этом случае равны  $\sum a_\alpha b_\beta (\Delta_\alpha; \Gamma_\beta)$ .

**Функториальность  $\varphi_{0,1}$ .** Как и ранее,  $x = \sum a_\alpha \Delta_\alpha = i_0^* x$ ,  $y \in G_1(L; M)$  представляется коциклом вида  $\sum b_N(N) - n(P^2)$ , где  $N$  пробегает  $LM$ -вершины пары конфигураций  $L, M$ , причем сумма коэффициентов  $LM$ -вершин на каждой прямой из  $M$  равна  $n$ .  $i_1 y \in G_1(L'; M)$  представляется тем же коциклом  $\sum b_N(N) - n(P^2)$ . И вновь правая и левая части формулы (2.8.1) равны.

**Функториальность  $\varphi_{1,2}$ .** Согласно (2.4.6), (2.4.5), (2.7), имеем следующие утверждения.  $x \in G_1(L'; M)^* = G_1(M; L')$  представляется коциклом  $\sum b_N(N) - n(P^2)$ , где  $N$  пробегает  $ML'$ -вершины пары конфигураций  $M, L'$ , причем сумма коэффициентов  $ML'$ -вершин на каждой прямой из  $L'$  равна  $n$ .  $i_1^* x \in G_1(L; M)^* = G_1(M; L)$  представляется коциклом, который получается из  $\sum b_N(N) - n(P^2)$  выбрасыванием всех  $ML'$ -вершин, которые не являются  $ML$ -вершинами пары конфигураций  $M, L$ .  $y \in G_2(L; M)$  - это линейная

комбинация  $\sum a_\alpha \Delta_\alpha$  треугольников из  $L$ ,  $i_2 y \in G_2(L'; M)$  - это та же линейная комбинация  $\sum a_\alpha \Delta_\alpha$ , где треугольники  $\Delta_\alpha$  рассматриваются как треугольники в конфигурации  $L'$ .  $\varphi_{12}(i_1 x \otimes y) = \varphi_{12}(x \otimes i_2 y)$ , поскольку при вычислении правой части не учитываются  $ML'$ -вершины, не лежащие на сторонах треугольников  $\{\Delta_\alpha\}$ , см. (2.6.2.1).

(4.6). Рассмотрим абелеву группу  $\tilde{\lambda}_2(k)$ , порожденную символами  $(L; M)$ , где  $(L; M)$  пробегает все пары допустимых треугольников на плоскости  $P^2(k)$ , и соотношениями.

(4.6.1). Если треугольник  $L$  или  $M$  вырожден, то  $(L; M) = 0$ .

(4.6.2). Кососимметричность. Для всякой перестановки  $\sigma$  имеем

$$(\sigma L; M) = (L; \sigma M) = (-1)^{|\sigma|} (L; M).$$

(4.6.3). Проективная инвариантность. Для всякого  $g \in \text{PGL}_B(k)$

$$(gL; gM) = (L; M).$$

(4.6.4). Специальная аддитивность. Пусть  $L_0, L_1, L_2, L_3$  - произвольный набор прямых в  $P^2(k)$ , в котором  $L_1, L_2, L_3$  проходят через одну точку. Тогда для любого треугольника  $M$

$$(L_0, L_2, L_3; M) - (L_0, L_1, L_3; M) + (L_0, L_1, L_2; M) = 0.$$

Пусть  $M_0, M_1, M_2, M_3$  - произвольный набор прямых в  $P^2(k)$ , в котором  $M_1, M_2, M_3$  проходят через одну точку. Тогда для любого треугольника  $L$

$$(L; M_0, M_2, M_3) - (L; M_0, M_1, M_3) + (L; M_0, M_1, M_2) = 0.$$

Имеется естественный гомоморфизм  $\tilde{\lambda}_2(k) \rightarrow A_2(k)$ , относящий символу  $(L; M)$  символ  $(L; M)$ .

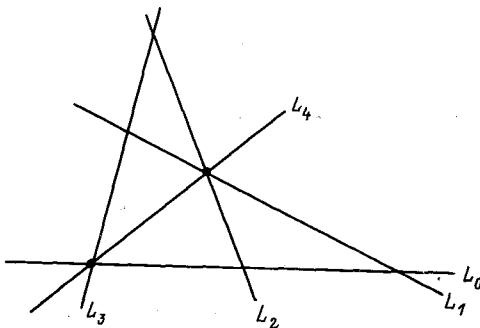


Рис. 4.6.

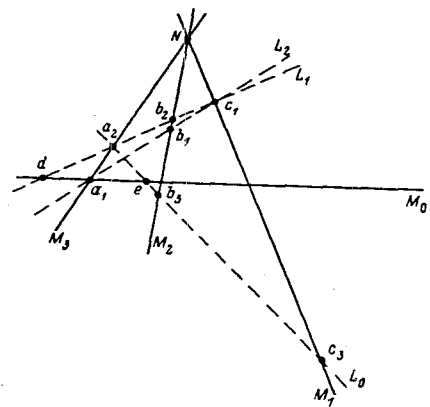


Рис. 4.7.

**Предложение.** Естественный гомоморфизм является изоморфизмом.

Для доказательства достаточно доказать, что из специальной аддитивности (4.6.4) следует аддитивность (2.1.3) в группе  $A_2$ . Для четверки прямых  $L_0, L_1, L_2,$

$L_3$ , находящихся в общем положении, из (4.6.4) выведем

$$\sum_{i=0}^3 (-1)^i (L_0, \dots, \hat{L}_i, \dots, L_3; M) = 0. \quad (4.6.5)$$

Проведем вспомогательную прямую  $L_4$ , см. рис. 4.6. Тогда в  $\mathbb{A}_2$  имеем  $(L_0, L_2, L_3; M) = (L_0, L_2, L_4; M) + (L_2, L_3, L_4; M)$ ,  $(L_2, L_3, L_4; M) = (L_1, L_3, L_4; M) + (L_1, L_2, L_3; M)$ ,  $(L_0, L_1, L_3; M) = (L_1, L_3, L_4; M) + (L_0, L_1, L_4; M)$ ,  $(L_0, L_1, L_4; M) = (L_0, L_2, L_4; M) + (L_0, L_1, L_2; M)$ . Из этих равенств следует (4.6.5). Аналогично доказывается аддитивность по  $M$ .

(4.7). Доказательство предложения (2.10.3). Нужно проверить сохранение соотношений (2.1.2)-(2.1.4). Кососимметричность и проективная инвариантность очевидны. Докажем аддитивность по  $M$ , аддитивность по  $L$  доказывается аналогично. В силу предложения (4.6) достаточно доказать сохранение при отображении (2.10.1) специальной аддитивности (4.6.4).

Рассмотрим два набора прямых  $L=(L_0, L_1, L_2)$ ,  $M=(M_0, M_1, M_2, M_3)$  со свойствами:

(4.7.1).  $M_1, M_2, M_3$  пересекаются в одной точке, которую обозначим через  $N$ .

(4.7.2). Треугольники  $L, M^p = M \setminus M_p, p=1, 2, 3$  невырождены.

(4.7.3). Пары  $(L; M^p), p=1, 2, 3$  допустимы.

Имеется 33 комбинаторно различных типа взаимного расположения наборов  $L, M$  с точностью до перенумераций наборов  $L, M$ . Для каждого типа прямым вычислением доказывается

$$v_{11}((L; M^1)) - v_{11}((L; M^2)) + v_{11}((L; M^3)) = 0. \quad (4.7.4)$$

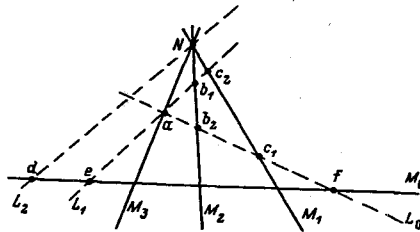


Рис. 4.8.

1-й случай: на прямой  $M_0$  нет вершин треугольника  $L$ , через точку  $N$  не проходит прямая из  $L$ .

(4.7.5). Пример. Рассмотрим пару  $L, M$ , изображенную на рис.4.7. В  $G_1(L; M^1)$  базис порождают коциклы  $b_2-b_1, b_3-b_1$ , двойственный базис в  $G_1(L; M^1)^*$  порождают  $b_2-d, b_3-e$ , в  $G_1(L; M^2) - c_3-c_1$ , в  $G_1(L; M^2)^* - c_3-e$ , в  $G_1(L; M^3) - b_2-b_1, b_3-b_1, c_3-c_1$ , в  $G_1(L; M^3)^* - b_2-d, b_3-e, c_3-e$ . Левая часть (4.7.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & \varphi(M^1, b_2-b_1) \otimes \varphi(L, b_2-d) + \varphi(M^1, b_3-b_1) \otimes \varphi(L, b_3-e) - \varphi(M^2, c_3-c_1) \otimes \\ & \otimes \varphi(L, c_3-e) + \varphi(M^3, b_2-b_1) \otimes \varphi(L, b_2-d) + \varphi(M^3, b_3-b_1) \otimes \varphi(L, b_3-e) + \\ & + \varphi(M^3, c_3-c_1) \otimes \varphi(L, c_3-e), \end{aligned}$$

где  $\varphi$  определено формулой (2.6.2.1). Легко видеть, что каждая пара слагаемых с равными вторыми сомножителями равна нулю, см. предложение (2.6.7). Аналогично сокращаются пары в других примерах первого случая.

2-й с л у ч а й: на прямой  $M_0$  нет вершин треугольника  $L$ , через точку  $N$  проходит прямая из  $L$ .

(4.7.6). П р и м е р. Рассмотрим пару  $L, M$  на рис. 4.8. Базис в  $G_1(L; M^1)$  порождают  $N-a-b_1, b_2-b_1$ , двойственный базис в  $G_1(L; M^1)^*$  порождают  $N-d, b_2-f$ , в  $G_1(L; M^2) - N-a-c_1, c_2-c_1$ , в  $G_1(L; M^2)^* - N-d, c_2-e$ , в  $G_1(L; M^3) - N-d, c_2-e$ , в  $G_1(L; M^3)^* - N-d, b_2-f, c-e$ .

(4.7.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & \varphi(M^1, N-a-b_1) \otimes \varphi(L, n-d) + \varphi(M^1, b_2-b_1) \otimes \varphi(L, b_2-f) - \\ & - [\varphi(M^2, N-a-c_1) \otimes \varphi(L, N-d) + \varphi(M^2, c_2-c_1) \otimes \varphi(L, c_2-e)] + \\ & + \varphi(M^3, N-b_1-c_1) \otimes \varphi(L, N-d) + \varphi(M^3, b_2-b_1) \otimes \\ & \otimes \varphi(L, b_2-f) + \varphi(M^3, c_2-c_1) \otimes \varphi(L, c_2-e) = 0. \end{aligned}$$

1, 3-е, 5-е слагаемые дают ноль в силу предложения (2.6.7), примененного к циклу  $N-a-b_1-c_1$ . Остальные слагаемые попарно сокращаются.

3-й с л у ч а й. Оставшиеся типы пар  $L, M$  изображены на рис. (4.9.1)-(4.9.11).

(4.7.7). П р и м е р. Пусть  $L, M$  изображены на рис. 4.10. Базис в  $G_1(L; M^1)$  порождает  $b_1-b_2$ , двойственный базис в  $G_1(L; M^1)^*$  порождает  $b_1-a$ . Соответственно в

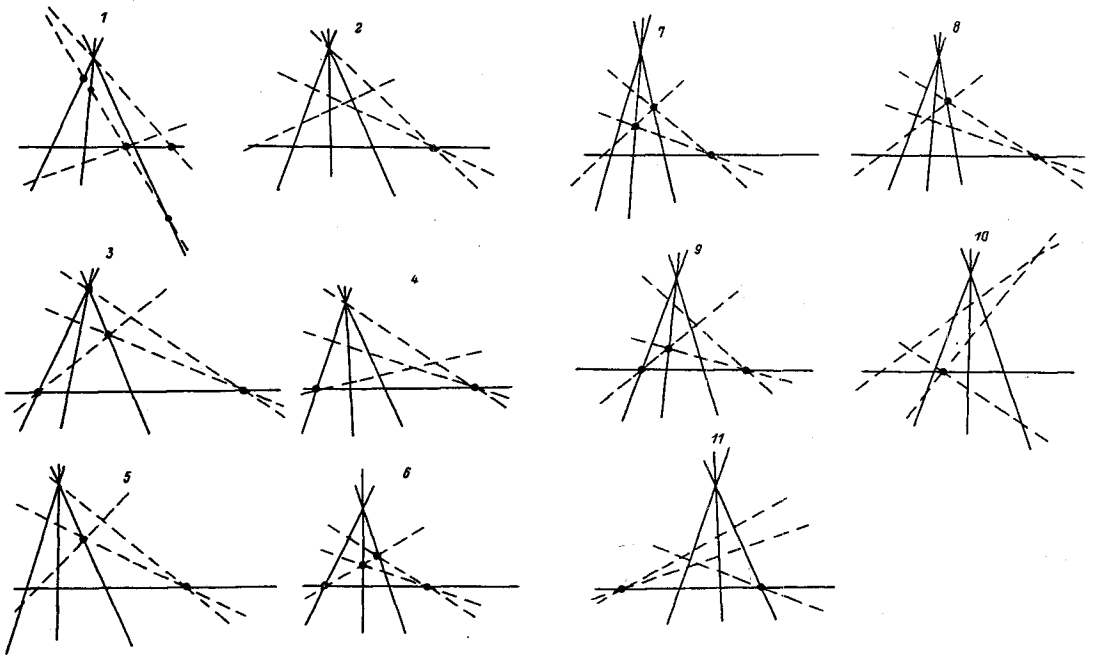


Рис. 4.9.

$G_1(L;M^2) - c_1-c_2$ , в  $G_1(L;M^2)^* - c_1-a$ , в  $G_1(L;M^3) - b_1-b_2$ ,  $c_1-c_2$ , в  $G_1(L;M^3)^* - b_1-a$ ,  $c_1-a$ . В этом случае (4.7.4) состоит из двух пар, сокращающихся слагаемых.

(4.7.8). П р и м е р. Пусть  $L, M$  изображены на рис. 4.11. Базис в  $G_1(L;M^1)$  порождают  $a_1-a_2, d-e$ , двойственный базис в  $G_1(L;M^1)^*$  порождают  $a_1-b_1, b_3-e$ , в  $G_1(L;M^2) - a_1-a_2$ , в  $G_1(L;M^2)^* - a_1+c_2+e-(P^2)$ , в  $G_1(L;M^3) - c_1-c_2, d-e$ , в  $G_1(L;M^3)^* - b_2-c_2, b_3-e$ . Здесь  $(P^2) -$  символ проективной плоскости,  $a_1+c_2+e-(P^2) -$  коцикл степени 1, остальные коциклы имеют степень 0. (4.7.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & \varphi(M^1, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, a_1-b_1) + \varphi(M^1, d-e) \otimes \varphi(L, b_3-e) - \\ & \varphi(M^2, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, a_1+c_2+e-(P^2)) + \varphi(M^3, c_1-c_2) \otimes \\ & \otimes \varphi(L, b_2-c_2) + \varphi(M^3, d-e) \otimes \varphi(L, b_3-e). \end{aligned}$$

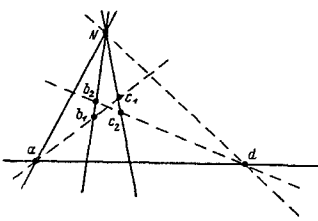


Рис. 4.10.

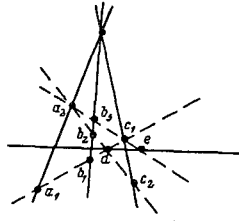


Рис. 4.11.

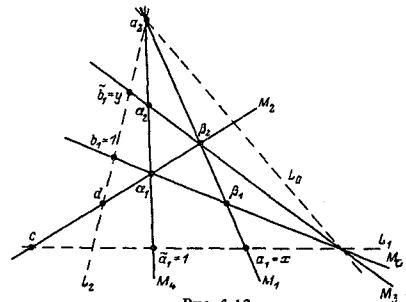


Рис. 4.12.

Далее,  $\varphi(M^1, d-e) \cdot \varphi(M^3, d-e) = \varphi(M^3, d-e)$ . Кроме того,  $\varphi(M^2, d-e) = \varphi(M^2, a_2-a_1)$ , поскольку  $d-e-a_2+a_1$  есть кограница для  $G^*(L;M^2)$ . Поэтому (4.7.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & \varphi(M^1, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, a_1-b_1) + \varphi(M^2, a_2-a_1) \otimes \varphi(L, b_3-e) - \\ & \varphi(M^2, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, a_1+c_2+e-(P^2)) + \varphi(M^3, c_1-c_2) \otimes \varphi(L, b_2-c_2) = \\ & = \varphi(M^2, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, a_1-b_1-b_3+e-a_1-c_2-e+(P^2)) + \varphi(M^3, c_1-c_2) \otimes \\ & \otimes \varphi(L, b_2-c_2) = \varphi(M^2, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, b_2-c_2) + \varphi(M^3, c_1-c_2) \otimes \\ & \otimes \varphi(L, b_2-c_2) = \varphi(M^2, a_1-a_2 + c_1-c_2) \otimes \varphi(L, b_2-c_2) = 0, \end{aligned}$$

так как  $a_1 + c_1 - a_2 - c_2 -$  кограница в  $G^*(L;M^2)$ .

Для остальных комбинаторных типов, изображенных на рис. 4.9, проверка формулы (4.7.4) аналогична.

(4.8). Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я (2.12). Рассмотрим прямоугольник  $x-y$ , изображенный на рис. 4.12. Положим  $M = (M_0, M_1, M_2)$ ,  $\tilde{M} = (M_2, M_3, M_4)$ . Тогда  $xy = (L; M) + (L; \tilde{M})$ . Вычислим  $\nu_{11}((L; M)) + \nu_{11}((L; \tilde{M}))$ . Базис в  $G_1(L; M)$  порождают коциклы  $a_1-a_2, b_1-b_2$ , двойственный базис в  $G_1(L; M)^*$  порождают  $a_1-c, b_1-d$ , в  $G_1(L; \tilde{M}) - \tilde{a}_1-a_2, \tilde{b}_1-b_2$ , в  $G_1(L; \tilde{M})^* - \tilde{a}_1-c, \tilde{b}_1-d$ .

$$\begin{aligned} \nu_{11}(xy) &= \varphi(M, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, a_1-c) + \varphi(M, b_1-b_2) \otimes \\ & \otimes (L, b_1-d) + \varphi(\tilde{M}, a_1-a_2) \otimes \varphi(L, \tilde{a}_1-c) + \varphi(\tilde{M}, \tilde{b}_1-b_2) \otimes \\ & \otimes \varphi(L, \tilde{b}_1-d) = y \otimes \varphi(L, a_1-c) + x \otimes \varphi(L, b_1-d) + \\ & + y^{-1} \otimes \varphi(L, \tilde{a}_1-c) + x^{-1} \otimes \varphi(L, \tilde{b}_1-d) = \\ & = y \otimes \varphi(L, a_1-\tilde{a}_1) + x \otimes \varphi(L, b_1-\tilde{b}_1) = y \otimes x + x \otimes y. \end{aligned}$$

(4.9). Доказательство предложения (2.13). Проективным преобразованием  $K(a)$  приводится к виду, в котором прямые  $L_0, L_1, L_2, M_0, M_1, M_2$  являются нулями функций  $z, y, x, ax + y - z, x + y - z, ax + y - az$ . Точки  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta$  приобретают координаты  $(0:a:1), (1:-1:0), (1:0:1), (1:-a:0), (a^{-1}:0:1)$ . Базис в  $G_1(L;M)$  порождает  $\alpha+\beta+\zeta-(P^2)$ , двойственный базис в  $G_1(L;M)^*$  порождает  $\beta-\varepsilon$ .

$$\nu_{11}((L;M)) = \varphi(M, \alpha + \beta + \zeta - (P^2)) \otimes \varphi(L; \beta - \varepsilon),$$

$$\varphi(M, \alpha + \beta + \zeta - (P^2)) = - \frac{(a-1)(a-1)(a^{-1}-1)}{(a-1)(a-1)(1-a)} = -a,$$

$$\varphi(L, \beta - \varepsilon) = \frac{(-1) 1}{1 (-a)} = a^{-1}.$$

С учетом равенства  $(-1) \otimes a = -(-1) \otimes a$  получаем предложение.

(4.10). Доказательство предложения (2.14). Базис в  $G_1(L, \mathcal{D}(t))$  порождает  $L_2 \cap M_2 - L_0 \cap M_2$ , двойственный базис в  $G_1(L, \mathcal{D}(t))^*$  порождает  $L_2 \cap M_2 - L_2 \cap M_0$ .  $\nu_{11}(\delta(t)) = \varphi(\mathcal{D}(t), L_2 \cap M_2 - L_0 \cap M_2) \otimes \varphi(L, L_2 \cap M_2 - L_2 \cap M_0) = (1-t) \otimes t^{-1}$ .  $\nu_{11}(\delta(1)) = 0$ , поскольку  $G_1(L, \mathcal{D}(1)) = 0$ .

### § 5. Дилогарифмическое разложение

В этом параграфе собраны доказательства утверждений, сформулированных в § 3.

(5.1). Доказательство предложения (3.8.1). Пусть  $p(t)$  - полуквадрат со стороной  $t$ , изображенный на рис.3.1. Тогда прямоугольник со сторонами  $a, b$  равен  $p(ab) - p(a) - p(b)$ , см. рис.5.1. Легко видеть, что элемент  $2p_{(t)} \in \in A_2$  равен квадрату со стороной  $t$ , см. лемму (4.1.1).

(5.2). Доказательство предложения (3.9.1). На рис. 5.2

$$\delta(1) = (L; M_2, M_1, M_3) = (L; M_1, M_0, M_5) = (L; M_5, M_4, M_3).$$

Поэтому  $3\delta(1) = (L; M_0, M_4, M_2)$ . Пара треугольников  $(L; M_0, M_4, M_2)$  проективным преобразованием переводится в пару  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_4, M_2)$ , изображенную на рис.5.3. Пара  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_4, M_2)$ , на рис.5.3 - это образ относительно инволюции Пуанкаре полуквадрата со стороной - 1, см.(2.1.6).  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_4, M_2) = (L_2, L_3, L_4; M_0, M_4, M_2)$ , см. лемму (4.1.1). Таким образом,  $6\delta(-1) = P((-1) \cdot (-1))$ , где  $(-1) \cdot (-1)$  квадрат со стороной - 1,  $P$  - инволюция Пуанкаре. Квадрат со стороной - 1 является элементом порядка 2. Это доказывает п.1 предложения (3.9.1). П.2 предложения будет следовать из доказанной ниже теоремы (3.13.1), согласно которой  $P((-1) \cdot (-1)) = (-1) \cdot (-1)$ .

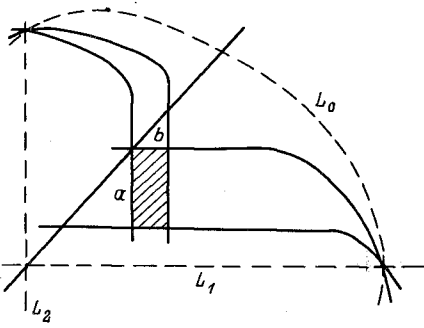


Рис. 5.1.

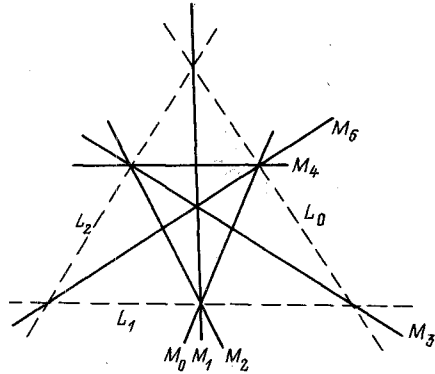


Рис. 5.2.

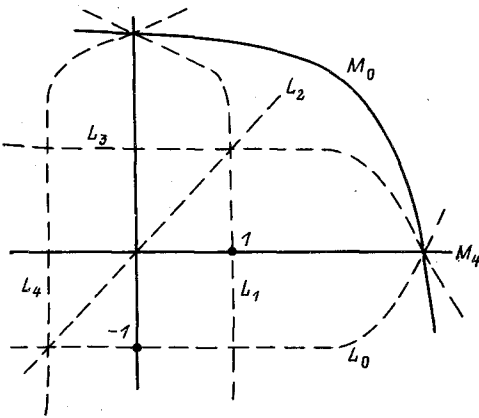


Рис. 5.3.

(5.3). Элементарной парой треугольников назовем такую допустимую пару невырожденных треугольников  $(L; M)$ , в которой треугольник  $M$  не имеет вершин на прямых  $L_0, L_2$ , вершина  $L_1 \cap L_2$  не лежит на стороне треугольника  $M$ , см. пример на рис. 5.4.

Л е м м а. Всякий элемент  $x \in A_2$  может быть представлен в виде суммы элементарных пар.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть  $x = (L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  - допустимая пара треугольников, см. рис. 5.5. Тогда в  $A_2$  имеем  $(L; M) = (L; M^1) + \dots + (L; M^6)$ , где  $M^1, \dots, M^6$  - это треугольники  $(M_3, M_0, M_4)$ ,  $(M_4, M_0, M_5)$ ,  $(M_5, M_0, M_3)$  и т.д. За счет выбора точки  $0$  можно добиться того, что у каждого из треугольников  $M^j$  не более одной вершины лежит на  $L$ , и не более одной вершины треугольника  $L$  лежит на  $M^j$ . Каждая пара  $(L, M^j)$  превращается в элементарную подходящей перенумерацией прямых треугольника  $L$ . С учетом (2.1.2) это доказывает лемму.

(5.4). Дилогарифмическое разложение. Пусть  $(L; M)$  - элементарная пара невырожденных треугольников,  $\eta(L; M)$  - линейная комбинация шести четверок точек на прямой, построенная в (3.6),  $\delta\eta(L; M)$  - линейная комбинация дилогарифмических конфигураций, построенная по этим четверкам (см. (3.9), где каждой четверке точек  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  поставлена в соответствие дилогарифмическая конфигурация  $\delta(x)$ ).

(5.4.1). П р е д л о ж е н и е. Разность  $(L; M) - \delta\eta(L; M)$ , рассматриваемая как элемент в  $A_2$ , есть сумма двух или меньше прямоугольников.

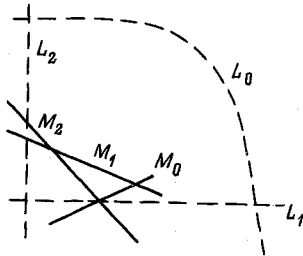


Рис. 5.4.

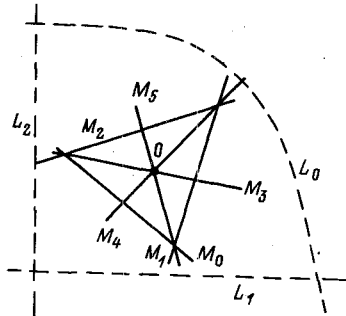


Рис. 5.5.

Доказательство в случае треугольников общего положения изображено на рис. 5.6. А именно  $(M_0, M_1, M_2) = (M_0, Q_3, P_1) - (M_1, Q_3, P_2) - (M_0, Q_2, P_1) + (M_2, Q_2, P_3) - (M_2, Q_1, P_3) + (M_1, Q_1, P_2) - \Pi_2 + \Pi_1$ , где через  $(X_1, X_2, X_3)$  обозначен

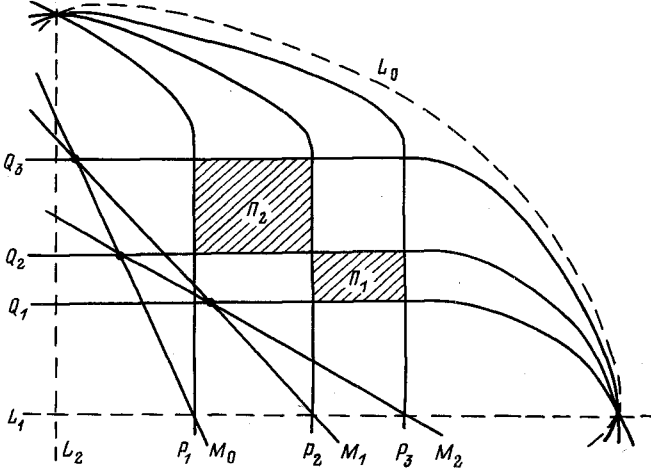


Рис. 5.6. Дилогарифмическое разложение.

треугольник, ограниченный прямыми  $X_1, X_2, X_3$ , прямоугольники  $\pi_j$  изображены на рис. 5.6. Эта формула индуцирует равенство в  $A_2$ , если каждый треугольник и прямоугольник формулы рассматривать в паре с координатным треугольником  $L = (L_0, L_1, L_2)$ . Разность двух заштрихованных прямоугольников  $(L; \Pi_1) - (L; \Pi_2)$  в группе  $A_2$  равна разности

$(L; M) - \delta\eta(L; M)$ .  $(L, \Pi_1)$  - это прямоугольник со сторонами  $r(L_1 \cap L_0, L_1 \cap L_2, L_1 \cap M_1, L_1 \cap M_2)$ ,  $r(M_2 \cap L_0, M_2 \cap L_1, M_2 \cap M_1, M_2 \cap M_0)$ .  $(L, \Pi_2)$  - это прямоугольник со сторонами  $r(L_1 \cap L_0, L_1 \cap L_2, L_1 \cap M_0, L_1 \cap M_1)$ ,  $r(M_0 \cap L_0, M_0 \cap L_1, M_0 \cap M_2, M_0 \cap M_1)$ , см. рис. 1.3.

Случаи необщего положения разбираются аналогично.

(5.4.2). П р и м е р. Пара  $(L; M_0, M_1, M_2)$  на рис. 5.7 разлагается в разность двух дилогарифмических:  $(L; M_0, M_1, M_2) = (L; M_0, M_3, M_2) + (L; M_1, M_3, M_2)$ .

(5.4.3). П р и м е р. Пара  $(L; M_0, M_1, M_2)$  на рис. 5.8 разлагается в разность двух дилогарифмических и прямоугольника:  $(L; M_0, M_1, M_2) = -(L; M_0, M_4, M_3) + (L; M_0, M_4, M_2) + \pi$ .

(5.4.3). З а м е ч а н и е. Если треугольник  $M$  имеет вершину на прямой  $L_2$ , и одна из его сторон, проходящих через эту вершину, проходит через  $L_0 \cap L_1$ , то в



разности  $(L; M) - \delta\eta(L; M)$  помимо прямоугольника возникает  $\delta(1)$ . Например, если  $(L; M) = \delta(1)$ , то  $\delta\eta(L; M) = 0$ .

Если треугольник  $M$  имеет прямую, проходящую через  $L_1 \cap L_2$ , то в разности  $(L; M) - \delta\eta(L; M)$  возникает полуквадрат. Например, если  $(L; M_0, M_1, M_2)$  изображена на

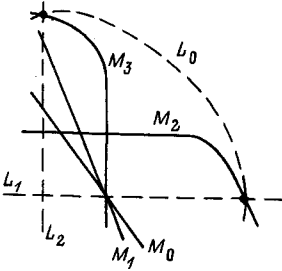


Рис. 5.7.

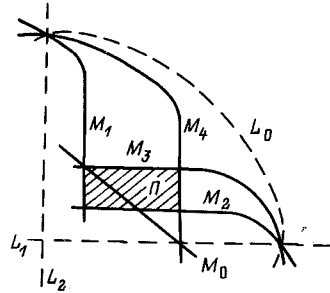


Рис. 5.8.

рис. 5.9, то  $(L; M_0, M_1, M_2) = (L; M_0, M_1, M_3) + (L; M_3, M_1, M_2)$ .

Разложение пары  $(L; M)$  в сумму простейших конфигураций - дилогарифмических и прямоугольников, - указанное в предложении (5.4.1) и на рис.5.6-5.9, назовем дилогарифмическим разложением. Идея такого разложения возникла в связи с [21].

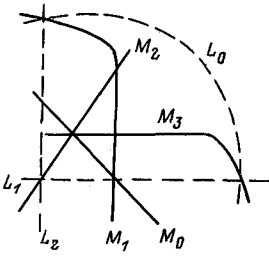


Рис. 5.9.

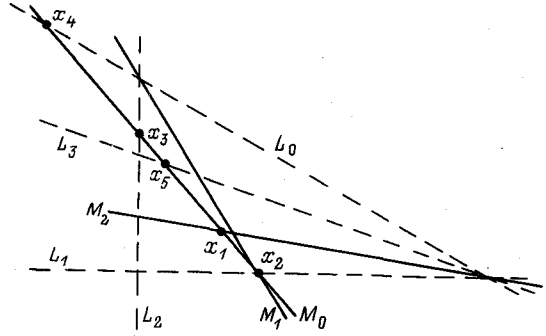


Рис. 5.10.

(5.5). Дилогарифмическое соотношение в  $A_2$ . Рассмотрим дилогарифмическую конфигурацию  $\delta(t) = (L_0, L_1, L_2; M)$ , изображенную на рис.5.10. Разрежем координатный треугольник  $L$  прямой  $L_3$  на две части:  $\delta(t) = (L_3, L_1, L_2; M) + (L_3, L_2, L_0; M)$ . Рассмотрим дилогарифмическое разложение каждого из слагаемых в правой части. Нетрудно видеть, что для подходящих  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in k$   $(L_3, L_1, L_2; M) = \delta(t_1) - \delta(t_2)$ ,  $(L_3, L_2, L_0; M) = -\delta(t_3) - \delta(t_4) + \pi + p(t_5)$ , где  $\pi$  - подходящий прямоугольник,  $p(t_5)$  - подходящий полуквадрат. Таким образом, получим соотношение в  $A_2$   $\delta(t) - \delta(t_1) + \delta(t_2) - \delta(t_3) + \delta(t_4) = -\pi + p(t_5)$ . Такое соотношение зависит от двух параметров - класса проективной эквивалентности и пятерки точек  $(x_1, \dots, x_5)$  на прямой  $M_0$ , см.рис.5.10. Мы назовем его дилогарифмическим соотношением в  $A_2$  пятерки точек на прямой.

Пользуясь дилогарифмическим соотношением, мы, во-первых, докажем п.2 предложения (3.10) и, во-вторых, построим гомоморфизм традиционной группы Блоха  $B1_2$  в  $A_2/\pi$  - фактор-группу группы пар треугольников по подгруппе прямоугольников.

(5.6). Вычисление дилогарифмического соотношения. Пусть  $\delta(t)$  - дилогарифмическая конфигурация, изображенная на рис.1.4. Двойное отношение четверки точек  $(M_2 \cap M_0, M_0 \cap L_1, M_0 \cap L_2, M_0 \cap L_0)$  равно  $(1-t)^{-1}$ . Дилогарифмическую конфигурацию, для которой двойное отношение четверки точек  $(M_2 \cap M_0, M_0 \cap L_1, M_0 \cap L_2, M_0 \cap L_0)$  равно  $x$ , обозначим через  $\varepsilon[x]$ . Таким образом,  $\varepsilon[x] = \delta(x-1/x)$ ,  $\delta(t) = \varepsilon[(1-t)^{-1}]$ . Если  $(x_1, \dots, x_4)$  - четверка попарно различных точек в  $P^1$ , положим  $\varepsilon[x_1, \dots, x_4] = \varepsilon[r(x_1, \dots, x_4)]$ .

В этих обозначениях для конфигурации, изображенной на рис.5.10,  $(L_0, L_1, L_2; M) = \varepsilon[x_1, x_2, x_3, x_4]$ .

Дилогарифмическое разложение пары  $(L_3, L_1, L_2; M)$  изображено на рис.5.11.

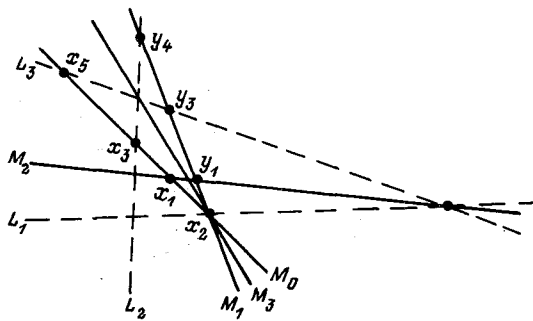


Рис. 5.11.

$$(L_3, L_1, L_2; M) = (L_3, L_1, L_2; M_0, M_3, M_2) + (L_3, L_1, L_2; M_3, M_1, M_2) = \varepsilon[x_1, x_2, x_3, x_5] - \varepsilon[y_1, x_2, y_2, y_3] = \varepsilon[x_1, x_2, x_3, x_5] - \varepsilon[x_1, x_2, x_3, x_5], \text{ см. рис. 5.11, 5.10.}$$

Дилогарифмическое разложение пары

$(L_3, L_2, L_0; M)$  изображено на рис.5.12

$$(L_3, L_2, L_0; M) = (L_3, L_2, L_0; M_0, M_4, M_5) + (L_3, L_2, L_0; M_5, M_3, M_0) - (L_3, L_2, L_0; \pi) + (L_3, L_2, L_0; M_1, M_2, M_4) = -\varepsilon[x_2, x_3, x_4, x_5] + \varepsilon[x_1, x_3, x_4, x_5] - \pi - p(t), \text{ где } p(t) - \text{полуквадрат с параметром } t = r(M_1 \cap L_3,$$

$L_0 \cap L_2, x_2, M_1 \cap M_2) = r(x_5, x_4, x_2, x_1) = r(x_1, x_2, x_4, x_5)$ ,  $r$  - двойное отношение;  $\pi = (L_3, L_2, L_0; \pi) \in \Pi$  - прямоугольник, изображенный на рис.5.12. Вертикальная сторона прямоугольника определяется параметром  $r(x_5, x_3, x_1, x_2) = r(x_1, x_2, x_5, x_4)$ , горизонтальная - параметром  $r(x_5, x_4, x_3, x_1) = r(x_1, x_3, x_4, x_5)$ . Поэтому  $\pi = r(x_1, x_3, x_4, x_5) \cdot r(x_1, x_2, x_5, x_4)$ , где  $a \cdot b = \mu(a \oslash b)$ .

Таким образом, дилогарифмическое соотношение пятерки точек  $(x_1, \dots, x_5)$  имеет вид

$$\sum_{j=1}^5 (-1)^j \varepsilon[x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_5] = p(t) - a \cdot b, \tag{5.6.1}$$

где  $p(t)$  - полуквадрат с параметром  $t = r(x_1, x_2, x_4, x_5)$ ,  $a = r(x_1, x_3, x_4, x_5)$ ,  $b = r(x_1, x_2, x_4, x_5)$ .

Для пятерки точек  $(s, t, 1, \infty, 0)$  дилогарифмическое соотношение приобретает вид

$$\varepsilon[t] - \varepsilon[s] + \varepsilon[s/t] - \varepsilon\left[\frac{1-t^{-1}}{1-s^{-1}}\right] + \varepsilon\left[\frac{1-t}{1-s}\right] = -p(s/t) + s \cdot (s/t), \tag{5.6.2}$$

где  $s, t \in k^* \setminus 1, s \neq t$ .

(5.7). Соотношения косой симметрии между дилогарифмическими треугольниками.

Предложение.  $\delta(t)+p((1-t)^{-1})+\delta(t/t-1)=0$ ,  $\delta(1)=\delta(t)+\delta(1-t)+(1-t)\cdot t$  для любого  $t \in k^* \setminus \{1\}$ .

Здесь  $(1-t)\cdot t$  - прямоугольник со сторонами  $1-t$ ,  $t$ .

(5.7.1). Следствие.  $(\delta(1-t^{-1})+\delta(t)) \in \Sigma$ , где подгруппа  $\Sigma$  определена в (3.9).

Доказательство. Пусть  $\delta(t)=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$ . Тогда  $\delta(t) = -(L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_2)$ . Дилогарифмическое разложение последней конфигурации изображено на рис. 5.13.

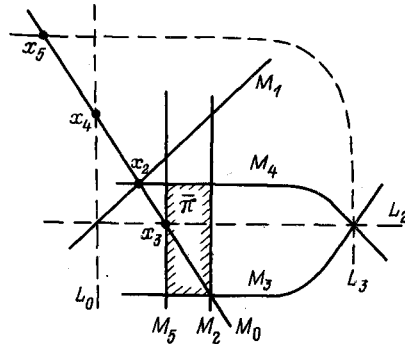


Рис. 5.12.

$$(L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_2) = (L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_3) + (L_2, L_1, L_0; M_3, M_1, M_2) = \delta(t/(t-1)) + p(s),$$

где  $s=r(M_2 \cap L_2, L_0 \cap L_1, M_2 \cap M_0, M_2 \cap M_1) = (1-t)^{-1}$ . Это доказывает первое равенство.

Для доказательства второго равенства рассмотрим рис. 5.14.

$$\delta(1) = (L; M_0, M_1, M_3) + (L; M_0, M_4, M_2) + (1-t)\cdot t = \delta(t) + \delta(1-t) + (1-t)\cdot t.$$

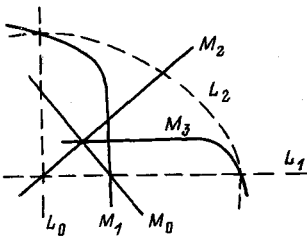


Рис. 5.13.

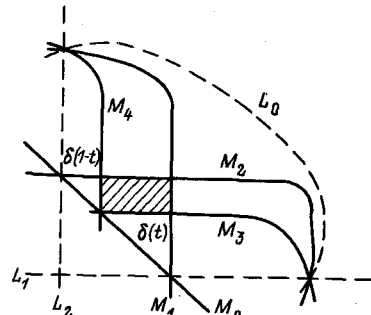


Рис. 5.14.

(5.8). Доказательство п.2 предложения (3.10). Соотношение (3.3.1) переходит в ноль по определению подгруппы  $\Sigma$ . Соотношения (3.2.2) переходят в ноль в силу предложения (5.7). Левая часть соотношения (3.2.3)

переходит в  $\delta(t) - \delta(s) + \delta(\frac{s}{t}) - \delta(\frac{(1-t^{-1})}{(1-s^{-1})}) + \delta(\frac{1-t}{1-s})$ . В силу (5.7.1) этот элемент равен

$$-\varepsilon[t] + \varepsilon[s] - \varepsilon[\frac{s}{t}] + \varepsilon[\frac{1-t^{-1}}{1-s^{-1}}] - \varepsilon[\frac{1-t}{1-s}], \text{ который в свою очередь равен нулю.}$$

(5.9). Доказательство предложения (3.13). Подставляя в первое равенство предложения (5.7)  $(1-t)$  вместо  $t$ , получим  $\delta(1-t) + \delta((t-1)/t) +$

$+p(t^{-1})=0$ . Поэтому  $\delta(1-t)=-\varepsilon[t]-p(t^{-1})$ . При отображении левая часть соотношения (3.2.3) переходит в

$$-\varepsilon[t] + \varepsilon[s] - \varepsilon\left[\frac{s}{t}\right] + \varepsilon\left[\frac{1-t^{-1}}{1-s^{-1}}\right] - \varepsilon\left[\frac{1-t}{1-s}\right] - p(t^{-1}) + p(s^{-1}) - p\left(\frac{t}{s}\right) + p\left(\frac{1-s^{-1}}{1-t^{-1}}\right) - p\left(\frac{1-s}{1-t}\right). \quad (5.9.1)$$

В  $A_2/\pi$  имеются соотношения  $p(a)+p(b)=p(a \cdot b)$ ,  $p(a^{-1})=-p(a)$ ,  $2p(a)=0$ . Поэтому альтернированная сумма полуквадратов в (5.9.1) равна  $p(t/s)=p(s/t)$ . Теперь предложение следует из дилогарифмического соотношения (5.8.2).

(5.10). Доказательство основной теоремы 2. Композиция  $\eta\delta$  переводит символ  $(t)$ ,  $tek^*\setminus 1$ , в  $-(t^{-1})$ . В силу соотношения (3.2.2)  $\eta\delta$  - тождественный гомоморфизм,  $\delta\eta$  - тождественный гомоморфизм в силу (5.3), (5.4).

(5.11). Доказательство теоремы (2.15). Согласно (5.3), (5.4), группа  $A_2$  порождается дилогарифмическими конфигурациями  $\delta(t)$ ,  $tek^*\setminus 1$ , и прямоугольниками. Согласно (3.8.1), подгруппа прямоугольников порождается полуквадратами  $p(t)$ ,  $tek^*\setminus 1$ , см.(5.1). Согласно (5.7), каждый полуквадрат выражается в виде разности дилогарифмических конфигураций. Таким образом, дилогарифмические конфигурации порождают  $A_2$ . Согласно (2.14),  $v_{11}(\delta(t))=-(1-t)\otimes t$ . Теорема доказана.

(5.12). Доказательство теоремы (3.15.1). В силу (5.3), (5.4) теорему достаточно проверить для дилогарифмической конфигурации  $\delta(t)$  и для прямоугольника. Пусть  $\delta(t)=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$ , в которой прямые  $L_0, L_1, L_2, M_0, M_1, M_2$  заданы нулями следующих однородных функций  $z, y, x, x+y-z, x-z, y-tz$ . Тогда легко видеть, что для конфигурации  $P\delta(t)=(M_0, M_1, M_2; L_0, L_1, L_2)$  прямые  $M_0, M_1, M_2, L_0, L_1, L_2$  в подходящих проективных координатах могут быть заданы нулями функций  $z, y, x, x+y-z, y-z, -x+(1-t)y+zt$ . Дилогарифмическое разложение элемента  $(M_0, M_1, M_2; L_0, L_1, L_2)$  изображено на рис. 5.15.  $P\delta(t) = (M; L_0, L_1, L_3) - (M; L_2, L_1, L_3) = -\delta(1)+\delta(1-t)$ . В силу (5.7), (2.14)  $P\delta(t)=-\delta(t)-(1-t) \cdot t=-\delta(t)+\mu v_{11}(\delta(t))$ .

Пусть прямоугольник  $\pi=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2) + (L_0, L_1, L_2; M_2, M_3, M_4)$  изображен на рис. 5.16. Предположим, что  $st \neq 1$ . Докажем, что  $P\pi=\pi$ . Предположение  $st \neq 1$  несущественно, поскольку всякий прямоугольник вертикальной прямой можно разрезать на два прямоугольника, для каждого из которых  $st \neq 1$ . Доказательство равенства  $P\pi=\pi$  проведем прямым вычислением действия инволюции Пуанкаре на каждую из двух пар треугольников, в сумме составляющих  $\pi$ .

Нетрудно видеть, что прямые конфигурации  $(M_0, M_1, M_2; L_0, L_1, L_2)$  могут быть заданы нулями следующих функций  $z, y, x, z+y-x, tz+y-x, z+sy-x$ . Поэтому  $P(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2) = (M_0, M_1, M_2; L_0, L_1, L_2) = (M_2, M_0, M_1; L_0, L_1, L_2)$ . Последняя конфигурация изображена на рис. 5.17. Ее дилогарифмическое разложение имеет вид

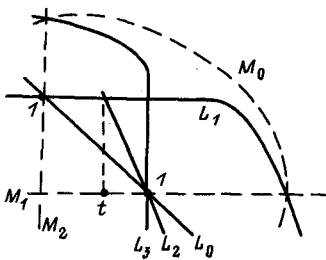


Рис. 5.15.

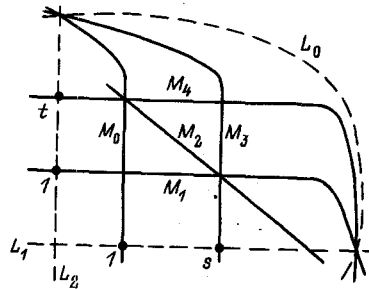


Рис. 5.16.

$$(M_2, M_0, M_1; L_0, L_1, L_2) = (M_2, M_0, M_1; L_2, L_3, L_5) - (M_2, M_0, M_1; L_0, L_3, L_6) - (M_2, M_0, M_1; L_2, L_4, L_5) + (M_2, M_0, M_1; L_1, L_4, L_6) + \psi,$$

где  $\psi$  - прямоугольник, изображенный на 5.17. Точка  $\alpha = L_1 \cap L_2$  имеет координаты  $((1-t)/(1-st), (1-s)/(1-st))$ . Поэтому  $(M_2, M_0, M_1; L_2, L_4, L_5) = -\delta(t(1-s)/(1-st))$ ,  $(M_2, M_0, M_1; L_1, L_4, L_6) = -\delta(t(1-s)/(1-st))$ . Кроме того,  $(M_2, M_0, M_1; L_2, L_3, L_5) = (M_2, M_0, M_1; L_0, L_3, L_6) = \delta(1)$ ,  $\psi = (s) \cdot \left(\frac{1-st}{1-s}\right)$ . Окончательно получаем

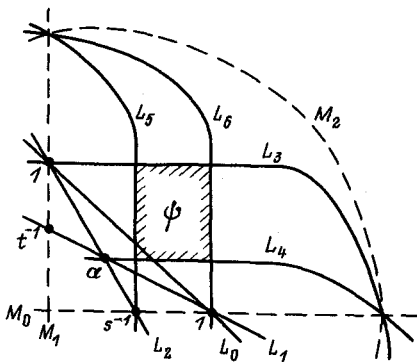


Рис. 5.17.

$$P(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2) = \delta((1-s)/(1-st)) - \delta(t(1-s)/(1-st)) + (s) \cdot \left(\frac{1-st}{1-s}\right). \tag{5.12.1}$$

Прямоугольный треугольник  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  обозначим через  $\Delta(s, t)$ . Легко видеть, что на рис. 5.16  $(L_0, L_1, L_2; M_2, M_3, M_4) = \Delta(s^{-1}, t^{-1})$ . Поэтому

$$P(L_0, L_1, L_2; M_2, M_3, M_4) = \delta((1-s^{-1})/(1-s^{-1}t^{-1})) - \delta(t^{-1}(1-s^{-1})/(1-s^{-1}t^{-1})) + (s^{-1}) \cdot \left(\frac{1-s^{-1}t^{-1}}{1-s^{-1}}\right). \tag{5.12.2}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P\pi &= (s) \cdot \left(\frac{1-st}{1-s}\right) + (s^{-1}) \cdot \left(\frac{1-s^{-1}t^{-1}}{1-s^{-1}}\right) = \\ &= (s) \cdot (1-st) - (s) \cdot (1-s) - (s) \cdot (1-st) + (s) \cdot (t) + \\ &\quad + (s) \cdot (1-s) = (s) \cdot (t) = \pi. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

(5.13). Доказательство теоремы (3.16). Докажем, что  $R=Q_2P_2$  - тождественный гомоморфизм группы  $A_2$ . Согласно (5.3), (5.4), достаточно проверить, что  $Rx=x$  для каждого прямоугольного треугольника вида  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$ , изображенного на рис. 5.16.

Имеет место следующее общее замечание. Если прямые конфигурации  $x=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  заданы нулями функций  $z, y, x, a_0^0z+a_0^1y+a_0^2x, a_1^0z+a_1^1y+a_1^2x, a_2^0z+a_2^1y+a_2^2x$ , то прямые конфигурации  $Rx=(L_0^*, L_1^*, L_2^*; M_0^*, M_1^*, M_2^*)$  могут быть заданы нулями функций  $z, y, x, a_0^0z+a_0^1y+a_0^2x, a_1^0z+a_1^1y+a_1^2x, a_2^0z+a_2^1y+a_2^2x$ .

Прямые прямоугольного треугольника  $x=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  на рис. 5.16 могут быть заданы нулями функций  $z, y, x, x-z, y-z, (t-1)x+(s-1)y+(1-st)z=0$ . Поэтому прямые конфигурации  $Rx=(L_0^*, L_1^*, L_2^*; M_0^*, M_1^*, M_2^*)$  могут быть заданы нулями функций  $z, y, x, -z-y+(1-st)x, y+(s-1)x, z+(t-1)x$ . После замены переменных  $y=(1-s)\tilde{y}, z=(1-t)\tilde{z}$  получим новый набор функций  $\tilde{z}, \tilde{y}, x, (t-1)\tilde{z}+(s-1)\tilde{y}+(1-st)x, \tilde{y}-x, \tilde{z}-x$ , нули которых задают те же прямые. Теперь прямые элемента  $Rx=(L_2^*, L_1^*, L_0^*; M_2^*, M_1^*, M_0^*)$  могут быть заданы нулями функций  $x, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z}-x, \tilde{y}-x, (t-1)\tilde{z}+(s-1)\tilde{y}+(1-st)x$ , т.е.  $Rx=x$ . Теорема доказана.

(5.14). **Определение отображения  $\chi: A_2 \rightarrow B1_2$ .**

(5.14.1). **Л е м м а.** Если  $g \in PGL_3, (L, M)$  - аффинная пара, то  $\chi((gL; gM)) = \chi((L; M))$ .

Доказательство очевидно.

(5.14.2). **Л е м м а.** Пусть  $L=(L_0, L_1, L_2), M=(M_0, M_1, M_2, M_3), M^j=(M_0, \dots, M_j, \dots, M_3), j=0, 1, 2, 3$ . Предположим, что  $(L; M^j), j=0, 1, 2, 3$ , - аффинные пары. Тогда  $\sum_{j=0}^3 (-1)^j (L; M^j) = 0$ .

Доказательство очевидно.

(5.14.3). **Л е м м а.** Пусть  $\pi=(L; M_0, M_1, M_2) + (L; M_2, M_3, M_4)$  - прямоугольник, изображенный на рис. (4.12). Тогда  $\chi(\pi)=0$ .

Доказательство очевидно.

(5.14.4). **Л е м м а.** Пусть  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  - аффинная пара. Тогда для всякой перестановки  $\sigma$  имеем  $\chi((L; \sigma M)) = (-1)^{|\sigma|} \chi((L; M))$ .

Доказательство очевидно.

(5.14.5). **Л е м м а.** Пусть  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  - аффинная пара, тогда

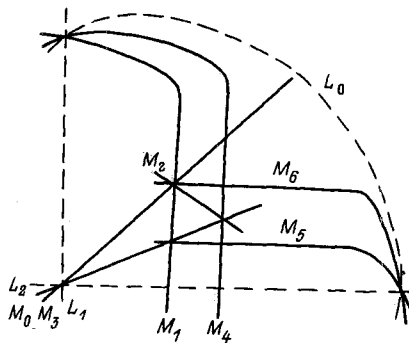


Рис. 5.18.

$$\chi((L_0, L_2, L_1; M_0, M_1, M_2)) = -\chi((L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)).$$

Доказательство проводится прямой очевидной проверкой с учетом равенства  $2[x]=0, (x)+(1-x)=C$ .

(5.14.6). Л е м м а. Пусть  $\pi=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)+(L_0, L_1, L_2; M_2, M_3, M_4)$  - прямоугольник, изображенный на рис.4.12. Тогда сумму  $(L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_2) + (L_2, L_1, L_0; M_2, M_3, M_4)$ , пользуясь только отношениями эквивалентности проективной инвариантности (2.1.4) и аддитивности по  $M$  (2.1.3), можно превратить в прямоугольник.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конфигурация  $\pi = (L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_2)+(L_2, L_1, L_0; M_2, M_3, M_4)$  изображена на рис.5.18. Очевидно, что в силу отношения проективной инвариантности

$$(L_2, L_1, L_0; M_6, M_4, M_3) = (L_2, L_1, L_0; M_5, M_4, M_0).$$

Теперь в силу отношения эквивалентности аддитивности по  $M$   $\tilde{\pi}+(L_2, L_1, L_0; M_6, M_4, M_3) - (L_2, L_1, L_0; M_5, M_4, M_0)$  равняется прямоугольнику со сторонами  $M_5, M_1, M_6, M_4$ .

(5.14.7). Л е м м а. Пусть  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  - аффинная пара и на  $L_2$  нет вершин треугольника  $M$ . Тогда

$$\chi((L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_2)) = -\chi((L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма справедлива для дилогарифмической конфигурации, см. доказательство первой формулы предложения (5.7). Лемма с очевидностью справедлива для полуквадрата  $p(t)$ , изображенного на рис.3.1. Согласно леммам (5.14.6), (5.14.2), если  $\pi=(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2) + (L_0, L_1, L_2; M_2, M_3, M_4)$  - прямоугольник, изображенный на рис.4.12, то  $\chi(\pi) = \chi((L_2, L_1, L_0; M_0, M_1, M_2)) + \chi((L_2, L_1, L_0; M_2, M_3, M_4))=0$ .

Пусть теперь  $x = (L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  - аффинная пара, причем на  $L_2$  нет вершин треугольника  $M$  и вершина  $L_1 \cap L_2$  треугольника  $L$  не лежит на сторонах треугольника  $M$ . Рассмотрим дилогарифмическое разложение пары  $x : x = \sum m_j$ , где каждое  $m_j$  - это либо дилогарифмическая конфигурация, либо прямоугольник. Пусть  $\sigma$  - инволюция перехода от треугольника  $(L_0, L_1, L_2)$  к треугольнику  $(L_2, L_1, L_0)$ . Согласно доказанному выше,  $\chi(\sigma m_j) = -\chi(m_j)$ . Поэтому в силу аддитивности по  $M$   $\chi(\sigma x) = -\chi(x)$ .

Пусть  $x = (L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  - аффинная пара, причем на  $L_2$  нет вершин треугольника  $M$  и вершина  $L_1 \cap L_2$  треугольника  $L$  лежит на стороне треугольника  $M$ , см.рис.5.19. Тогда  $x = x_1 + x_2 + x_3$ , где  $x_1 = (L_0, L_1, L_2; M_0, M_3, M_4)$ ,  $x_2 = (L_0, L_1, L_2; M_3, M_2, M_4)$ ,  $x_3 = (L_0, L_1, L_2; M_1, M_2, M_3)$ , причем  $x_1$  - полуквадрат, а  $x_2, x_3$  суть аффинные пары треугольников, у которых вершина  $L_1 \cap L_2$  первого треугольника пары не лежит на сторонах второго треугольника пары, см. рис.5.19. Согласно доказанному выше,  $\chi(\sigma x_j) = -\chi(x_j), j = 1, 2, 3$ . Поэтому  $\chi(\sigma x) = -\chi(x)$ . Лемма доказана.

Определим  $\chi(L; M)$  для допустимой пары  $x = (L; M)$ , у которой треугольник  $M$  имеет вершину на  $L_0$ . Пусть, например, - это вершина  $M_0 \cap M_1$ , см.рис.5.20. Разрежем

треугольник  $M$  на шесть частей, как указано на рис. 5.20:  $x = x_1 + \dots + x_6$ , где  $x_1 = (L; M_1, M_4, M_5)$ ,  $x_2 = (L; M_4, M_2, M_3)$ ,  $x_3 = (L; M_5, M_0, M_5)$ ,  $x_4 = (L; M_5, M_0, M_4)$ ,  $x_5 =$

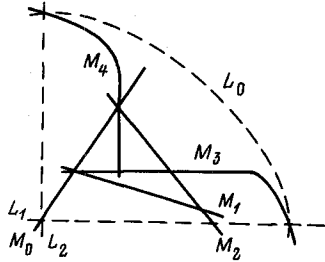


Рис. 5.19.

$= (L; M_3, M_4, M_0)$ ,  $x_6 = (L; M_1, M_5, M_3)$ . Такое представление элемента назовем *барицентрическим разбиением* элемента  $x$  по  $M$  с центром в точке  $\alpha$ . Барицентрическое разбиение назовем *удобным*, если ни одна из точек  $M_1 \cap M_5$ ,  $M_0 \cap M_4$  не лежит на сторонах треугольника  $L$ . Положим

$$\chi_\alpha(x) = \chi(x_1) + \chi(x_2) + \chi(x_3) + \chi(x_4) - \chi((L_0, L_1, L_2; M_3, M_4, M_0)) - \chi((L_1, L_0, L_2; M_1, M_5, M_3)). \quad (5.14.8)$$

(5.14.9). *Л е м м а.* Это определение корректно задает отображение  $\chi$  множества допустимых пар треугольников в группу  $B1_2$ , которое обладает свойствами кососимметричности по  $L$ ,  $M$  (2.1.2), проективной инвариантности (2.1.4), аддитивности по  $M$  (2.1.3).

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $x = (L, M)$  - допустимая пара треугольников, причем на  $L_0$  есть вершина треугольника  $M$ . Пусть  $x = x_1 + \dots + x_6$ ,  $x = y_1 + \dots + y_6$  - два удобных барицентрических разбиения по  $M$  с центрами в точках  $\alpha, \beta$ . Тогда  $\chi_\alpha(x) = \chi_\beta(x)$ . Действительно, треугольник  $M$  можно разрезать на столь мелкие треугольники  $M^1, \dots, M^N$ ,  $M = M^1 + \dots + M^N$ , что для любого  $l \leq 6$  существует такое подмножество  $J \subset \{1, \dots, N\}$ , что  $x_l = \sum_{j \in J} (L; M^j)$ , и для любого  $m \leq 6$  существует такое  $K \subset \{1, \dots, N\}$ , что  $y_m = \sum_{k \in K} (L; M^k)$ . Теперь, пользуясь аддитивностью по  $M$ , см. (5.14.2), выразим  $\chi_\alpha(x)$ ,  $\chi_\beta(x)$  через  $\{\chi(L; M^j)\}$ . Пользуясь (5.14.5), (5.14.7), получим равенство  $\chi_\alpha(x) = \chi_\beta(x)$ . Таким образом, корректно определено отображение  $\chi$  множества допустимых пар треугольников в группу  $B1_2$ . Свойства кососимметричности, проективной инвариантности и аддитивности по  $M$  легко следует из (5.14.1), (5.14.2), (5.14.5), (5.14.7).



В следующих трех пунктах мы докажем, что отображение  $\chi : A_2 \rightarrow B1_2$  обладает свойством аддитивности по  $L$  (2.1.3).

**(5.15). Аддитивность по  $L$ .**

**Предложение.** *Отображение  $\chi : A_2 \rightarrow B1_2$  обладает свойством аддитивности по  $L$  (2.1.3), если свойство аддитивности по  $L$  выполняется для конфигураций  $(L_0, L_1, L_2, L_3), (M_0, M_1, M_2)$ , изображенных на рис. 5.21-5.27.*

**Доказательство.** В силу (4.6) достаточно проверить, что для  $\chi$  выполняется свойство специальной аддитивности по  $L$  (4.6.4).  $\chi$  аддитивно по  $M$ , поэтому достаточно проверять специальную аддитивность по  $L$  только для треугольников  $M$ , изображенных на рис. 5.21-5.27. Поскольку  $\chi$  кососимметрично по  $L$  и по  $M$  можно выбрать такую нумерацию прямых из наборов  $L, M$ , которая указана на рис. 5.21-5.27.

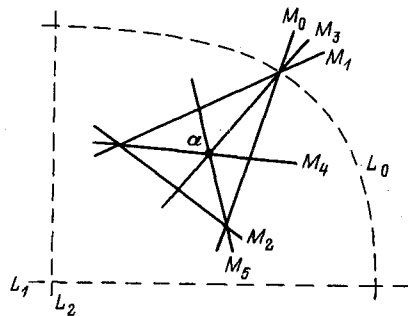


Рис. 5.20.

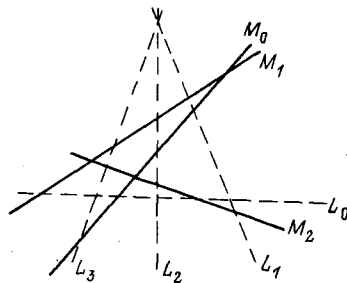


Рис. 5.21.

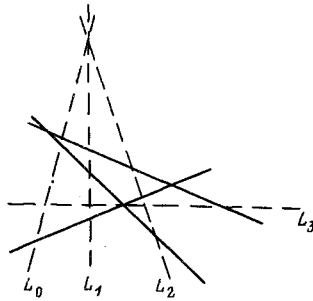


Рис. 5. 22.

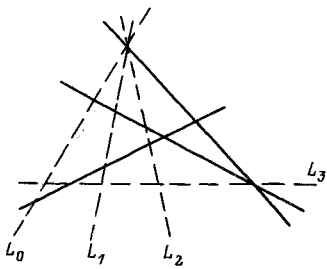


Рис. 5. 23.

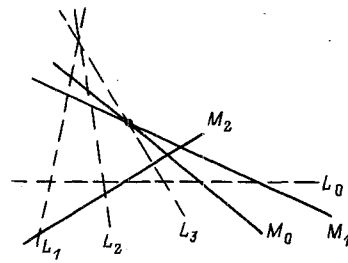


Рис. 5. 24.

(5.16). Пусть  $(L_0, L_1, L_2; M_0, M_1, M_2)$  допустимая пара треугольников, треугольник  $L$  вырожден (т.е. прямые  $L_0, L_1, L_2$  проходят через одну точку), на прямой  $L_0$  нет вершин треугольника  $M$ . Для такой пары  $(L, M)$  определим  $\chi((L; M))$  формулой (3.12.2) с учетом регуляризаций, указанных в (3.12).

Лемма.  $\chi((L, M))=0$ .

Доказательство прямой проверкой: в (3.12.2) слагаемые разбиваются на пары противоположных элементов.

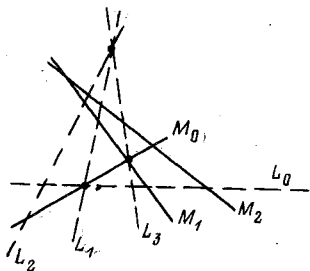


Рис. 5. 25.

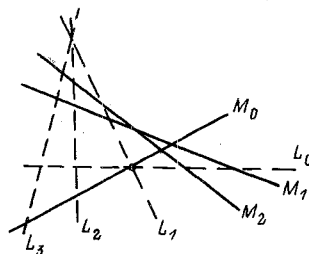
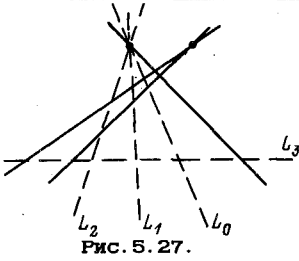


Рис. 5. 26.



(5.17). Проверка аддитивности по  $L$  для конфигураций, изображенных на рис.5.21-5.27. Пусть  $L^j = (L_0, \dots, \hat{L}_j, \dots, L_3)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Пусть  $(L_0, L_1, L_2, L_3)$ ,  $(M_0, M_1, M_2)$  - конфигурации прямых, изображенные на одном из рис.5.21-5.28. Нужно проверить, что

$$\chi((L^0; M)) - \chi((L^1; M)) + \chi((L^2; M)) - \chi((L^3; M)) = 0, \quad (5.17.1)$$

при этом ровно один из треугольников  $L^0, L^1, L^2, L^3$  вырожден, и соответствующее слагаемое в (5.16.1) равно нулю, см.(5.7). Каждая из пар  $(L^j; M)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , - аффинная, поэтому каждое слагаемое в (5.17.1) определяется регуляризованной формулой (3.12.2).

Заменим каждое слагаемое в (5.17.1) по формуле (3.12.2). Получим 24 регуляризованных слагаемых, объединим их в три восьмерки слагаемых, отвечающих прямым  $M_0, M_1, M_2$ . Восьмерку слагаемых, отвечающих прямой  $M_1$ , обозначим через

$$I(M_1) = (M_0 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap L_2, M_1 \cap L_3 \mid M_1 \cap M_j, M_1 \cap M_k),$$

где  $(i, j, k)$  отличаются от  $(0, 1, 2)$  циклической перестановкой. Указанная в скобках шестерка точек на  $M_1$ , рассматриваемая с точностью до проективного преобразования прямой  $M_1$ , определяет  $I(M_1)$ . Вычислим  $I(M_1)$  и докажем, что  $I(M_1) + I(M_2) + I(M_3) = 0$ . Это закончит доказательство предложения (3.12.6).

Для конфигураций, изображенных на рис.5.21-5.27, и любой прямой  $M_1$  для  $I(M_1) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_4, \alpha_5)$  возможны лишь следующие конфигурации  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  точек на проективной прямой: 1) попарно различны все точки, 2) попарно различны все, кроме  $\alpha_3 = \alpha_4$ , 3) все - кроме  $\alpha_3 = \alpha_5$ , 4) все - кроме  $\alpha_0 = \alpha_1$ , 5) все - кроме  $\alpha_0 = \alpha_1, \alpha_3 = \alpha_4$ , 6) все - кроме  $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ .

(5.17.2). Л е м м а. В случаях 1, 2, 3  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_4, \alpha_5) = [r(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)]$ , где  $[t] = (t) + (t^{-1}) \in \text{Bl}_2$ ,  $t \in k^* \setminus 1$ . В случаях 4-6  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_4, \alpha_5) = 0$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о прямой проверкой. В случае 1 имеем

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_4, \alpha_5) &= ((r(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_5)) - (r(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4))) - \\ &- ((r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_5)) - (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4))) + ((r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_5)) - (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_4))) - \\ &- ((r(\alpha_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_5)) - (r(\alpha_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_4))). \end{aligned}$$

С учетом пятичленного соотношения в  $\text{Bl}_2$  это равняется

$$\begin{aligned} &((r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)) (r(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)) + (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_4, \alpha_5))) - \\ &- ((r(\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)) (r(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)) + (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_4, \alpha_5))) + \\ &+ ((r(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)) - (r(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5))) + (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_4, \alpha_5)) - \\ &- ((r(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)) - (r(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)) + (r(\alpha_2, \alpha_0, \alpha_4, \alpha_5))) = \end{aligned}$$

$$[r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)] - [r(\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)].$$

Это равно  $[r(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)]$  в силу (3.12.1). В случае 2 имеем

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \alpha_4, \alpha_5) &= ((r(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_5)) - c) - \\ &- ((r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_5)) - c) + ((r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_5)) - c) - \\ &- ((r(\alpha_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_5)) - (r(\alpha_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3))) = \\ &= (- (r(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5))) - (- (r(\alpha_2, \alpha_0, \alpha_3, \alpha_5))) + \\ &+ (- (r(\alpha_1, \alpha_0, \alpha_3, \alpha_5))) = - [r(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5)] = [r(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5)]. \end{aligned}$$

В случае 3 проверка аналогична. В случае 4 имеем

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3 | \alpha_4, \alpha_5) &= ((r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_5)) - (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4))) - \\ &- ((r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4)) - (r(\alpha_3, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4))) - 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

В случаях 5, 6 проверка аналогична. Лемма доказана.

(5.17.3). Л е м м а. Для конфигураций, изображенных на рис. 5.21-5.27 справедливо равенство (5.17.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конфигураций, изображенных на рис. 5.21, 5.22, 5.24, имеем

$$\begin{aligned} I(M_0) + I(M_1) + I(M_2) &= \\ &= [r(M_0 \cap L_0, M_0 \cap L_1, M_0 \cap M_1, M_0 \cap M_2)] + \\ &+ [r(M_1 \cap L_0, M_1 \cap L_1, M_1 \cap M_2, M_1 \cap M_0)] + \\ &+ [r(M_2 \cap L_0, M_2 \cap L_1, M_2 \cap M_0, M_2 \cap M_1)]. \end{aligned} \quad (5.17.4)$$

Очевидно, что произведение трех двойных отношений, стоящих в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому выражение (5.17.4) равно нулю в силу леммы (3.12.1). Аналогично проверяется, что  $I(M_0) + I(M_1) + I(M_2)$  равно нулю для конфигураций, изображенных на рис. 5.23, 5.25-5.27. Предложение (3.12.6) доказано.

(5.18). Д о к а з а т е л ь с т в о о с н о в н о й т е о р е м ы 3. Пусть  $t \in k^* \setminus 1$ , тогда  $\chi \Delta(t) = \chi(\delta(1-t)) = (t)$ . Поэтому  $\chi \Delta : B1_2 \rightarrow B1_2$  - тождественный гомоморфизм.  $\Delta \chi \delta(t) = \Delta(1-t) = \delta(t)$ . Как уже упоминалось,  $A_2$  порождается дилогарифмическими конфигурациями. Поэтому  $\Delta \chi : A_2/\pi \rightarrow A_2/\pi$  - тождественный гомоморфизм.

(5.19). Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я (3.17). Докажем, что  $L: B1_2 \rightarrow A_2$  корректно определен. Пусть гомоморфизм  $\alpha : A_2/\pi \rightarrow A_2$  задан формулой  $[y] \mapsto 2y - \mu_\pi(y)$ . В силу (2.2.2), (2.12)  $\alpha$  корректно определен. В силу (2.14)  $L$  есть композиция гомоморфизмов  $\Delta : B1_2 \rightarrow A_2/\pi$  и  $\alpha$ .

Докажем п.2 предложения (3.17). Определим гомоморфизм  $\xi: A_2 \rightarrow \pi \circ B1_2$  формулой  $\xi: x \mapsto \mu_{11}(x) + \chi(x)$ , где  $\chi$  - регуляризованный флаговый гомоморфизм. Проверим, что  $(I, L)\xi$  есть умножение на 2. Как уже упоминалось,  $A_2$  порождается дилогарифмическими конфигурациями.

$$(I, L)\xi\delta(t) = (I, L)[(-1-t) \circ (1-t)] = -(1-t) \cdot t + 2\delta(t) + (1-t) \cdot t = 2\delta(t).$$

Аналогично проверяется, что  $\xi(I, L)$  есть умножение на 2. Это влечет предложение (3.17).

(5.20). Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы (3.18.2). Коммутативность в члене  $\pi$  следует из определения. Коммутативность в члене  $A_2$  достаточно проверить для дилогарифмической конфигурации  $\delta(t), t \in k^* \setminus 1$ . Для  $\delta(t)$  проверка очевидна.

Вторая часть теоремы легко следует из предложения (3.17). А именно определим гомоморфизм  $\xi: A_1 \otimes A_1 \rightarrow S^2 A_1 \otimes A_1 \cap A_1$  формулой  $a \otimes b \mapsto (a \otimes b + b \otimes a) + a \wedge b$ . Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{\nu_{11}} & A_1 \otimes A_1 \\ \xi \downarrow & & \downarrow \\ \pi \otimes \text{Bl}_2 & \xrightarrow{\nu_{11} \otimes S} & S^2 A_1 \otimes A_1 \wedge A_1 \end{array}$$

коммутативна (здесь  $\xi$  - гомоморфизм из (5.19),  $S$  - гомоморфизм из (3.5), коммутативность проверяется на дилогарифмических конфигурациях). Второе утверждение теоремы в члене  $A_2$  следует из (3.17). Второе утверждение теоремы в члене  $A_1 \otimes A_1$  проверяется аналогичной прямой проверкой.

(5.21). П р и л о ж е н и е. Г е о м е т р и ч е с к о е д о к а з а т е л ь с т в о п я т и ч л е н н о г о с о о т н о ш е н и я д л я д и л о г а р и ф м а.

Согласно (1.1.2)-(1.1.4), каждое тождество в группе  $A_2(\mathbb{C})$  (или  $A_2(\mathbb{R})$ ) влечет за собой равенство соответствующих интегралов Аомото. Например, равенство

$$\delta(t) + \delta(1-t) + (1-t) \cdot (t) = \delta(1)$$

(5.7), доказанное на рис.5.14, очевидно влечет (1.2.4). Второе равенство предложения (5.7), доказанное на рис.5.13, влечет (1.2.5). Равенство (5.6.2), доказанное на рис.5.10-5.12, вместе с (1.2.5) влечет пятичленное соотношение (1.2.3).

### С п и с о к л и т е р а т у р ы

[1] Cartier P. Décomposition des pslyèdres, le point sur le 3<sup>eme</sup> problème de Hilbert // Seminaire Bourbali. 1984/85. N 646.

[2] М а н и н Ю.И. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Мат. сб. 1968. Т.119. С.475-507.

[3] Belinson A., Goncharov A., Schechtman V., Varchenko A. Aomoto dilogarithms, mixed Hodge structures and motivic cohomology of pairs of triangles on the plane // MIT, preprint. 1988.

[4] Aomoto K. Addition theorem of Abel type for hyper-logarithms // Nagoya Math. J. 1982. Vol.88. P.55-71.

[5] Lewin L. Polylogarithms and associated functions. North Holland, 1981.

[6] Rogers L.J. On function sum theorem. connected with series  $\sum_1^{\infty} (x^n/n^2)$

- // Proc. London Math. Soc. 1907. Vol.4. P.169-189.
- [7] Deligne P. Theorie de Hodge II // Publ. Math. IHES. 1970. Vol.40. P.5-58.
- [8] Quillen D. Rational homotopy theory // Ann. Math. 1969. Vol. 90. P.205-295.
- [9] Beilinson A. Notes on absolute Hodge cohomology // Contemp. Math. 1986. Vol.55, part I. P.35-68.
- [10] Beilinson A., McPherson R., Schechtman V. Notes on motivic cohomology // Duke Math. J. 1987. Vol. 54, N 2. P.679-710.
- [11] Quillen D. Higher K-theory I // Lect. Notes in Math. 1973. Vol. 341. P.85-147.
- [12] Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. М.: Мир, 1974.
- [13] Bloch S. Higher regulators, algebraic k-Theory, and zeta functions of elliptic curves // U.C.Irvine, Lecture Notes. 1977.
- [14] Dupont J., Sah C.-H. Scissors congruences II // J. Pure and Appl. Algebra. 1982. Vol. 25. P.159-195.
- [15] Суслин А.А.  $K_3$  от поля и группа Блоха. ЛОМИ, препринт. 1988.
- [16] Suslin A. Algebraic K-theory of fields // Proc. ICM Berkeley. 1986. P.222-244.
- [17] Loday J.-L. K-théorie algébrique et représentations des groupes // Ann. Sci. ENS. 1976. Vol.9. P.309-377.
- [18] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.
- [19] Landsburg S. Relative cycles and algebraic K-theory // Preprint. 1985.
- [20] Bloch S. Algebraic cycles and higher K-theory // Adv. Math. 1986. Vol. 61, N 3. P.267-304.
- [21] Варченко А.Н. Комбинаторика и топология расположения аффинных гиперплоскостей в вещественном пространстве // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т.21, вып.1. С.11-22.

Поступило 17 апреля 1989 г.