СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Debao.* Degree of approximation by superpositions of sigmoidal function //J. Approxim. Theory and Appl. 1993. **9**, N 3. 17–28.
2. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М., 1949.

Поступила в редакцию
30.10.96

УДК 517.5, 519.7

ПРИБЛИЖЕННОЕ ТАБУЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКЕ L^p

Г. Г. Аманжаев

В работах [1–3] были определены различные классы функций, являющиеся дискретными аналогами классов функций конечной гладкости, и исследовалась величина $\log \mathrm{Approx}$, характеризующая минимально необходимую длину таблиц, позволяющих восстанавливать функции из этих классов с погрешностью не более 1. В настоящей статье аналогичные результаты (анонсированные в указанных работах) доказаны для случая приближений в других метриках, а именно в метрике пространства функций вида $f : \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} |f(i)|^p\right)^{1/p}$$

(нормирующий множитель $1/N$ выбран для того, чтобы нормой константы была сама эта константа). Обозначим равномерную норму $\|f\| = \max\limits_x |f(x)| = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$ через $\|f\|_\infty$. Тогда для любой функции f и любых p, q, где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, имеем соотношение

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_p \leqslant \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty = \|f\|,$$

причем для $f = \mathrm{const}$ все эти неравенства обращаются в равенства.

Будем говорить, что множество дискретных функций A вида $f : \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ называется 1-*приближающим* в метрике $\|\cdot\|_p$ для класса K таких функций, если для каждой функции $f \in K$ в A найдется такая функция g, что $\|f - g\|_p \leqslant 1$.

Обозначим минимальную мощность 1-приближающего в метрике $\|\cdot\|_p$ множества для класса K через $\mathrm{Approx}_p K$.

Связь между такими нормами для разных p приводит при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ к неравенству

$$\mathrm{Approx}_1 K \leqslant \mathrm{Approx}_p K \leqslant \mathrm{Approx}_q K \leqslant \mathrm{Approx}_\infty K\,. \tag{1}$$

Из этого неравенства видно, что верхняя оценка для $\mathrm{Approx}_\infty K$ является верхней оценкой для всех $\mathrm{Approx}_p K$, а чтобы получить нижнюю, достаточно исследовать только случай метрики $\|\cdot\|_1$ (конечно, если эти нижняя и верхняя оценки окажутся одного порядка).

Наша задача — нахождение порядка роста (при $N \to \infty$) логарифма этих величин для дискретных аналогов классов функций конечной гладкости.

Проведем соответствующий анализ на примере дискретных аналогов классов $H_{n,\omega}$ при $n \geqslant 1$, которые заданы следующим образом. Пусть $H_{n,\omega}$ — это множество функций вида $f : [0,1) \to [0,1)$, имеющих n производных, причем для n-й производной модуль непрерывности мажорируется функцией ω. *Внешним дискретным аналогом* класса $H_{n,\omega}$ при N уровнях квантования назовем класс дискретных функций

$$\widehat{H}^N_{n,\omega} = \{g : \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \{0, 1, \ldots, N-1\} \mid (\exists f \in H_{n,\omega})(\forall x)\ g(x) = \lfloor Nf(x/N + 1/(2N))\rfloor\}\,.$$

Для функций из $\widehat{H}_{n,\omega}$ имеет место оценка конечных разностей:

$$|\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})| < \frac{\omega((x_{n+1}-x_0)/N)}{(x_{n+1}-x_0)n!\, N^{n-1}} + \varphi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}), \tag{2}$$

где через $\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})$ обозначена разделенная конечная разность [4] $(n+1)$-го порядка с узлами $x_0, \dots, x_{n+1}$ от функции g, а величина $\varphi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1})$ есть $\max\limits_{|h|\leqslant 1/2} \Delta_{n+1}(h; x_0, \dots, x_{n+1})$, где максимум берется по всем функциям h, не превышающим $1/2$ по абсолютной величине.

Внутренним дискретным аналогом $H^N_{n,\omega}$ класса $H_{n,\omega}$ при N уровнях квантования назовем класс дискретных функций вида $g: \{0,1,\dots,N-1\} \to \{0,1,\dots,N-1\}$, удовлетворяющих неравенству (2) при любом наборе различных $x_0, \dots, x_{n+1} \in \{0,1,\dots,N-1\}$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть ω — выпуклая вверх функция типа модуля непрерывности, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Тогда при $N \to \infty$ имеет место соотношение*[1]

$$\log \mathrm{Approx}_p \widehat{H}^N_{n,\omega} \asymp \log \mathrm{Approx}_p H^N_{n,\omega} \asymp 1/W(1/N),$$

где W — функция, обратная к $t^n\omega(t)$.

В [1–3] эта оценка была доказана нри $p = +\infty$. Поэтому ввиду неравенств (1) и очевидного соотношения $\mathrm{Approx}_p \widehat{H}^N_{n,\omega} \leqslant \mathrm{Approx}_p H^N_{n,\omega}$ нам осталось установить оценку

$$\log \mathrm{Approx}_p \widehat{H}^N_{n,\omega} \succeq 1/W(1/N).$$

Нам потребуется одно комбинаторное утверждение.

Лемма. *При $\alpha \in (0, 1/4)$, $n \to \infty$, $m \sim \alpha n$ множество двоичных наборов длины n содержит подмножество мощности не меньше*

$$2^{n(1+2\alpha\log(2\alpha)+(1-2\alpha)\log(1-2\alpha)+o(1))}$$

(логарифм этой величины имеет порядок n), элементы которого попарно отличаются не менее чем в m разрядах.

Доказательство. Рассмотрим в множестве всех двоичных наборов длины n с метрикой Хемминга шар радиуса r с центром a, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \{0,1\}$. Пусть $V(r)$ — объем такого шара (число всех его точек). Тогда (см., например, [5, с. 312]) мощность рассматриваемого множества не меньше чем $x = 2^n/V(2m-1)$. Оценим эту величину снизу, учитывая, что $V(r) = C^0_n + C^1_n + \ldots + C^r_n$.

Итак,

$$x = 2^n/(C^0_n + C^1_n + \ldots + C^{2m-1}_n).$$

Среди этих $2m$ слагаемых при достаточно больших n наибольшим будет последнее. Поэтому $x \geqslant 2^n/(2mC^{2m}_n)$, т. е. $\log x \geqslant n - \log(2m) - \log C^{2m}_n$. По формуле Стирлинга ($k! \sim \sqrt{2\pi k}(k/e)^k$) имеем

$$\log C^{2m}_n = \log\frac{n!}{(2m!)(n-2m)!} = \log\frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+o(1))}{\sqrt{4\pi m}(2m/e)^{2m}\sqrt{2\pi(n-2m)}((n-2m)/e)^{n-2m}} =$$
$$= \log\sqrt{\frac{n}{4\pi m(n-2m)}} + 2m\log\frac{n}{2m} + (n-2m)\log\frac{n}{n-2m} + o(1) =$$
$$= n\left(2\alpha\log\frac{1}{2\alpha} + (1-2\alpha)\log\frac{1}{1-2\alpha} + o(1)\right),$$

поэтому $\log x \geqslant n(1 + 2\alpha\log(2\alpha) + (1-2\alpha)\log(1-2\alpha) + o(1))$. Покажем, что последняя величина имеет порядок n, т.е.

$$1 + 2\alpha\log 2\alpha + (1-2\alpha)\log(1-2\alpha) > 0. \tag{3}$$

Обозначим $\beta = 4\alpha - 1$ (при этом $-1 < \beta < 0$). Тогда неравенство (3) примет вид

$$1 + \frac{1+\beta}{2}\log\frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2}\log\frac{1-\beta}{2} > 0$$

[1]Символы $\asymp$ и $\succeq$ означают соответственно равенство и (нестрогое) неравенство по порядку.

или после преобразований

$$(1+\beta)\ln(1+\beta)+(1-\beta)\ln(1-\beta)>0\,.$$

Как легко проверить дифференцированием, левая часть этого неравенства минимальна при $\beta=0$, а при $\beta\neq 0$ она положительна. Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим множество функций, имеющих вид

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\lfloor 1/(2^{n+1}\varepsilon)\rfloor-1} a_l\delta_{n,\varepsilon}(x-2^{n+1}l\varepsilon)\,, \tag{4}$$

где $a_l\in\{0,1\}$, а функции $\delta_{n,\epsilon}$ определены следующим образом:

$$\delta_{0,\varepsilon}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \omega(x)/2, & 0\leqslant x\leqslant\varepsilon;\\ \omega(2\varepsilon-x)/2, & \varepsilon\leqslant x\leqslant 2\varepsilon;\\ 0, & x\geqslant 2\varepsilon,\end{cases}$$

$$\delta_{1,\varepsilon}(x)=\int_0^x(\delta_{0,\varepsilon}(t)-\delta_{0,\varepsilon}(t-2\varepsilon))\,dt\,,$$

$$\delta_{2,\varepsilon}(x)=\int_0^x(\delta_{1,\varepsilon}(t)-\delta_{1,\varepsilon}(t-4\varepsilon))\,dt\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta_{n,\varepsilon}(x)=\int_0^x(\delta_{n-1,\varepsilon}(t)-\delta_{n-1,\varepsilon}(t-2^n\varepsilon))\,dt\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

т.е. $\delta_{n,\varepsilon}$ имеет вид неотрицательной “шапочки” с носителем $[0,2^{n+1}\varepsilon]$, n раз дифференцируема, причем модуль непрерывности n-й производной мажорируется функцией $\omega/2$, а также при $\varepsilon\to 0$ выполнены соотношения

$$\max_x\delta_{n,\varepsilon}(x)\asymp\varepsilon^n\omega(\varepsilon)\qquad\text{и}\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{n,\varepsilon}(x)\,dx\asymp\varepsilon^{n+1}\omega(\varepsilon)\,.$$

Пусть f_1 и f_2 — две функции вида (4), заданные соответственно наборами коэффициентов $a'=(a_0',a_1',\dots)$ и $a''=(a_0'',a_1'',\dots)$. Оценим снизу величину $\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_1$ (где $\widehat{f}:\{0,1,\dots,N-1\}\to\{0,1,\dots,N-1\}$ по определению есть $\lfloor Nf(x/N+1/(2N))\rfloor$) через $\sum\limits_i|a_i'-a_i''|$. В силу того что у носителей разных функций δ (при разных l) нет общих внутренних точек, имеем

$$\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_1=\sum_l|a_l'-a_l''|\cdot\|\widehat{\delta_{n,\varepsilon}}(\cdot-2^{n+1}l\varepsilon)\|_1\geqslant\min_t\|\widehat{\delta_{n,\varepsilon}}(\cdot-t)\|_1\sum_l|a_l'-a_l''|\,.$$

Далее, $\widehat{\delta_{n,\varepsilon}}$ есть функция вида $\lfloor N\delta_{n,\varepsilon}(x/N+\mathrm{const}\,)\rfloor$, т.е.

$$\min_t\|\widehat{\delta_{n,\varepsilon}}(\cdot-t)\|_1=\min_u\|\lfloor N\delta_{n,\varepsilon}(\cdot/N-u)\rfloor\|_1\geqslant\min_u\sum_{x\in\mathbb{Z}}\delta_{n,\varepsilon}(x/N-u)-2^{n+1}N\varepsilon\,.$$

Функции δ неотрицательны и имеют один максимум, поэтому

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}}\delta_{n,\varepsilon}(x/N-u)\geqslant\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{n,\varepsilon}(x/N-u)dx-\max_t\delta_{n,\varepsilon}(t)=$$
$$=N\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{n,\varepsilon}(t)dt-\max_t\delta_{n,\varepsilon}(t)\succeq\varepsilon^n\omega(\varepsilon)(c_1N\varepsilon-c_2)\,,$$

где $c_1,c_2>0$. При $\varepsilon\gg 1/N$ имеем

$$\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_1\succeq N\varepsilon^{n+1}\omega(\varepsilon)\sum_l|a_l'-a_l''|-2^{n+1}N\varepsilon\,.$$

Если теперь $\sum\limits_{l} |a'_l - a''_l| \geqslant c\sum\limits_{l} 1 \sim \frac{c}{2^{n+1}\varepsilon}$, где $c = \text{const} > 0$, то $\|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_1 \succeq N(cc_3\varepsilon^n\omega(\varepsilon) - \varepsilon c_4)$, где $c_3, c_4 > 0$.

В качестве ε возьмем $W(c_5/N)$, где $c_5 = \text{const}$, тогда получим

$$\|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_1 \succeq cc_3c_5 - c_4NW(c_5/N);$$

по построению $NW(N) \to \infty$ при $N \to \infty$, поэтому выбором константы c_5 можно добиться того, что при достаточно больших N будет выполнено неравенство $\|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_1 \geqslant 3$.

Тем самым для построения 3-различимого (в метрике $\|\cdot\|_1$) множества функций надо уметь подбирать соответствующие наборы коэффициентов $(a_0, a_1, \ldots)$ длины $d = [1/(2^{n+1}\varepsilon)]$, различающиеся не менее чем в cd разрядах, для какой-то положительной константы c; при этом число таких наборов будет равно мощности соответствующего 3-различимого множества. Это можно сделать по доказанной лемме: для любого достаточно малого c соответствующая мощность будет не меньше $2^{c_6 d}$, где $c_6 = c_6(c)$ — положительная константа.

Итак, построено 3-различимое (в метрике $\|\cdot\|_1$) множество мощности $2^{\text{const}/\varepsilon}$; в силу выбора ε имеем

$$\log \text{Approx}_1 \widehat{H}^N_{n,\omega} \succeq 1/\varepsilon \asymp 1/W(1/N).$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю О.Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 96–01–01068.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аманжаев Г.Г.* О дискретных аналогах классов непрерывных функций различной гладкости //Докл. РАН. 1995. **342**, № 2. 54–58.
2. *Аманжаев Г.Г.* О дискретных аналогах классов функций, задаваемых модулем непрерывности n-й производной //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1996. № 2. 3–8.
3. *Аманжаев Г.Г.* О дискретных аналогах функций дробной гладкости //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1996. № 4. 3–7.
4. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М., 1967.
5. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1 /Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. М., 1974.

Поступила в редакцию
06.02.97

УДК 517.938.5

О ТОПОЛОГИИ ИНТЕГРИРУЕМОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ ТИПА ГОРЯЧЕВА

Е. В. Аношкина

1. Введение и постановка задачи. В настоящей работе на основе теории А. Т. Фоменко [1–3] исследуется топология интегрируемой динамической системы, описывающей движение гиростата в потенциальном поле сил типа Горячева. Уравнения Эйлера–Пуассона для гиростата в потенциальном поле сил имеют вид

$$A\dot{\omega} = [A\omega + \lambda] \times \omega + \gamma \times \operatorname{grad} \Pi, \tag{1}$$

где $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции тела, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор мгновенной угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор вертикали ($\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ заданы в системе координат, связанной с главными осями инерции), $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — вектор гиростатического момента, $\Pi = \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — потенциальная энергия тела; через $\times$ обозначено векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Хорошо известно,

12-1231