Автор выражает благодарность Б. А. Дубровину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кричевер И. М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия // Функц. анализ. 1981. **15**, вып. 2. 22—35.
2. Драгович В. И. Решения уравнения Янга с рациональными неприводимыми спектральными кривыми. Деп. в ВИНИТИ. № 564—В92. М., 1992.
3. Чередник И. В. Об одном методе построения факторизованных $S$-матриц в элементарных функциях // Теор. и матем. физ. 1980. **43**, № 1. 117—119.

Поступила в редакцию
03.01.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1992. № 5

УДК 519.71

**Г. Г. Аманжаев**

## ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В работе рассматривается дискретный аналог $K^N_\omega$ класса функций, имеющих заданный модуль непрерывности $\omega$. Приводятся оценки мощности 1-приближающих множеств для класса $K^N_\omega$, т. е. таких наборов функций, что каждую функцию из $K^N_\omega$ можно приблизить ими с погрешностью $\leqslant 1$ в каждой точке.

Устанавливается, что логарифм мощности минимального 1-приближающего множества асимптотически равен $N\log(N\omega(1/N))$.

Приводится пример 1-приближающего множества с асимптотически наименьшей сложностью реализации схемами из функциональных элементов; доказывается, что эта сложность есть $\rho\cdot 2^s\times\log(2^s\omega(2^{-s}))$, где $s$ — число двоичных разрядов при задании аргумента функций, а $\rho$ — характеристика базиса.

Указанные результаты обобщаются на функции многих переменных.

**1. Определения классов.** Пусть функция $\omega:[0,\ 1)\to\mathbf{R}$ неотрицательна, не убывает, выпукла вверх и удовлетворяет условиям

1) $\lim\limits_{x\to 0}\ \omega(x)/x=0$,

2) $\omega(x)\leqslant x^\alpha$ для некоторого $\alpha>0$.

Введем следующие классы функций:

$$K_\omega=\{f:[0,\ 1)\to[0,\ 1)\ \mid(\forall x,\ y\in[0,\ 1))\ \ |f(x)-f(y)|\leqslant\omega(|x-y|)\},$$

$$K^N_\omega=\{g:\{0,\ 1,\ldots,N-1\}\to\{0,\ 1,\ldots,N-1\}\mid(\exists f\in K_\omega)(\forall x\in$$
$$\in\{0,\ 1,\ldots,N-1\})\quad g(x)=[Nf(x/N)]\},$$

$$K^N_\omega=\{g:\{0,\ 1,\ldots,N-1\}\to\{0,\ 1,\ldots,N-1\}\mid(\forall x,\ y\in$$
$$\in\{0,\ 1,\ldots,N-1\})\mid g(x)-g(y)|<1+N\omega(|x-y|/N)\}.$$

Множество $K_\omega$ состоит из функций, модуль непрерывности которых не превосходит функции $\omega(x)$.

«Квантованием» области определения и множества значений $[0,\ 1)$ этих функций на $N$ уровней строятся дискретные функции из $K_\omega{}^N$;

следует отметить, что для проверки утверждения $g \in \bar{K}^N_\omega$ надо перебрать бесконечное множество функций $K_\omega$, т. е. определение класса $\bar{K}^N_\omega$ неэффективно.

Этот недостаток исправлен в классе $K^N_\omega$, который строится следующим образом. Рассмотрим величину $\Delta = |g(x) - g(y)|$, где $g \in \bar{K}^N_\omega$. По определению класса $\bar{K}^N_\omega$ найдется такая функция $f \in K_\omega$, для которой

$$\Delta = |[Nf(x/N) - [Nf(y/N)]| < 1 + N\,|f(x/N) - f(y/N)|.$$

В силу определения класса $K_\omega$ последняя величина не превосходит $1 + N\omega(|x-y|/N)$. Итак, все функции $g$ из $\bar{K}^N_\omega$ удовлетворяют условию

$$|g(x) - g(y)| < 1 + N\omega(|x-y|/N).$$

Взяв набор таких условий за определение, получим класс $K^N_\omega$. Он совпадает с $\bar{K}^N_\omega$. Действительно, с одной стороны, $\bar{K}^N_\omega \subset K^N_\omega$. С другой стороны, для каждой функции $f \in K^N_\omega$ рассмотрим ломаную $g$ с узлами $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, постоянную на $[N-1, N)$, такую, что в целых точках значения $g(x)$ отличаются от $f(x)$ не более чем на $\frac{1}{2}$, и имеющую график наименьшей длины. Тогда функция $\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} + g(Nx)\right)$ будет принадлежать $K_\omega$, а построенная по ней квантованием дискретная функция $\left[\frac{1}{2} + g(x)\right]$ совпадает с $f$.

**2. Нижняя оценка.** Рассмотрим множество $D^N_\omega$, состоящее из всех функций, которые принимают значения, не превосходящие $N\omega(1/N)$ и кратные трем. Понятно, что $D^N_\omega \subset K^N_\omega$ при достаточно больших $N$. Кроме того, $\log|D^N_\omega| \sim N\log(N\omega(1/N))$. Так как функции из множества $D^N_\omega$ будут 3-различимы, то сложность реализации функций из 1-приближающего класса для $K^N_\omega$ при $N = 2^s$ схемами из функциональных элементов в базисе с характеристикой $\rho$ [1, с. 41] асимптотически не меньше, чем $\rho \cdot 2^s \log(2^s\omega(2^{-s}))/s$ (в силу теоремы Д 1 из [1] и того факта, что

$$\log\log(2^s\omega(2^{-s})) = o(s)).$$

**3. Верхняя оценка.** Функции из класса $K^N_\omega$ удовлетворяют условию Липшица с константой $1 + N\omega(1/N)$, поэтому их число не превосходит $N \cdot (3 + 2N\omega(1/N))^{N-1}$ (функцию можно задать набором целых чисел

$$\{f(0),\ f(1) - f(0),\ f(2) - f(1),\ \ldots,\ f(N-1) - f(N-2)\},$$

где $f(0) \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, а $|f(i+1) - f(i)| \leqslant 1 + N\omega(1/N))$ или $(N\omega(1/N))^{N(1+o(1))}$. Логарифм этой величины асимптотически равен

$$N\log(N\omega(1/N)),$$

что совпадает с приведенной выше нижней оценкой.

Для установления верхней оценки сложности реализации функций из $K^N_\omega$ (а следовательно, и функций 1-приближающего класса) воспользуемся методом локального кодирования О. Б. Лупанова.

Пусть $f \in K_\omega^N$, где $N=2^s$, и $d$ — натуральное число. Тогда

$$f(x)=f(d[x/d])+\sum_{i=1}^{d\{x/d\}}(f(d[x/d]+i)-f(d[x/d]+i-1))=$$

$$=f(d[x/d])+\sum_{i=1}^{d\{x/d\}}\Delta(d[x/d]+i-1),$$

где $\Delta y=f(y+1)-f(y)$.

Пусть $x_1=[x/d]$, $x_2=d\{x/d\}$. Сложность вычисления $x_1=x_1(x)$ и $x_2=$ $=x_2(x)$ есть $o(2^s/s)$. Тогда $f(x)=f(dx_1)+\sum_{i=1}^{x_2}\Delta(dx_1+i-1)$. Величина $f(dx_1)$ является $(]\log N/d[,\ ]\log N[)$-оператором сложности

$$\leqslant \log N\cdot(2^{]\log(N/d)[}/]\log(N/d)[).$$

Набор $\{\Delta(dx_1), \Delta(dx_1+1), \ldots, \Delta(dx_1+d-1)\}$ функций от $x_1$ есть

$$(]\log(N/d)[,\ d]\log(2N\omega(1/N)+1)[)\text{-оператор}$$

(ибо $|\Delta(y)|\leqslant N\omega(1/N)$), и его сложность $\leqslant d\log(N\omega(1/N))\cdot\rho\dfrac{2^{]\log(N/d)[}}{]\log(N/d)[}$.

Выберем $d=2^{[s/\log s]}$. Тогда $N/d=2^{s-[s/\log s]}$,

$$L_1\leqslant o(2^s/s),\ L_2\leqslant\rho\cdot\frac{2^s}{s}\log(2^s\omega(2^{-s})).$$

Наконец, имея значения $x_1$, $x_2$, $f(dx_1)$ и набор $\{\Delta(dx_1), \Delta(dx_1+1), \ldots$ $\ldots, \Delta(dx_1+d-1)\}$, значения $f(x)=f(dx_1)+\sum_{i=1}^{x_2}\Delta(dx_1+i-1)$ можно вычислить со сложностью $o(2^s/s)$. Поэтому сложность функции $f$ будет асимптотически равна $\rho\cdot\dfrac{2^s}{s}\log(2^s\omega(2^{-s}))$.

Замечание. Нижняя оценка выводилась для 3-различимого множества (т. е. для минимального 1-приближающего класса), а верхняя — для самого класса $K_\omega^N$. Тем самым точная и приближенная реализации функций из $K_\omega^N$ требуют асимптотически одинаковой сложности схем.

**4. Обобщение на функции многих переменных.** Классы функций нескольких переменных с модулем непрерывности определяются аналогично одномерному случаю:

$$K_\omega^n=\{f:[0,\ 1)^n\to[0,\ 1)\mid \forall(x,\ y\in[0,\ 1)^n)\,|f(x)-f(y)|\leqslant\omega(|x-y|)\}$$

(здесь в качестве $|x-y|$ можно брать как $\max\limits_i|x_i-y_i|$, так и $(\Sigma(x_i-$ $-y_i)^2)^{1/2}$ или $\sum\limits_i|x_i-y_i|$),

$$\widehat{K}_\omega^{N,n}=\{g:\{0,\ 1,\ldots,N-1\}^n\to\{0,\ 1,\ldots,N-1\}\mid(\exists f\in K_\omega^N)$$
$$(\forall x\in\{0,\ 1,\ldots,N-1\}^n)\ g(x)=[Nf(x/N)]\},$$
$$K_\omega^{N,n}=\{g:\{0,\ 1,\ldots,N-1\}^n\to\{0,\ 1,\ldots,N-1\}\mid(\forall x,\ y\in$$
$$\in\{0,\ 1,\ldots,N-1\}^n)\ |g(x)-g(y)|<1+N\omega(|x-y|/N)\}.$$

Говорить о совпадении классов $\widehat{K}_\omega^{N,n}$ и $K_\omega^{N,n}$ уже нельзя, но все остальные результаты одномерного случая переносятся на многомерный. Так, 3-различимое множество строится тем же способом (как множество всех функций, принимающих кратные значения, не превосходящие $\mathrm{const}\cdot N\omega(1/N)$, где константа зависит только от размерности и нормы в пространстве аргументов; таким образом, мощность 1-приближающего класса $\geqslant(\mathrm{const}\cdot N\cdot\omega(1/N))^{N^n}$, логарифм этой величины $\geqslant N^n\log(N\omega(1/N))$.

Для получения верхней оценки заметим, что множество $\{0, 1, \ldots, N-1\}^n$ можно отобразить на отрезок $\{0, 1, \ldots, N^{n-1}\}$ так, чтобы модуль непрерывности соответствующей функции одной переменной не превосходил исходного. Поэтому реализация функций из $K_\omega^{N,n}$ имеет сложность (при $N=2^s$) $\sim\rho\, 2^{ns}\log(2^s\omega(2^{-s}))/(ns)$. Такова же сложность функций из 1-приближающего класса.

**5. Примеры.** 1. Пусть $\omega(x)=x^r$, где $0<r<1$. Тогда мощность 1-приближающих классов для $K_\omega^N(K_\omega^{N,n})$ будет асимптотически равна $(1-r)N\log N^\omega$(соответственно $(1-r)N^n\log N$), а сложность их реализации (при $N=2^s$) — $\rho(1-r)\cdot 2^s$ $\left(\text{соответственно } \rho\dfrac{1-r}{n}2^{ns}\right)$.

2. Пусть $\omega(x)=x\left(\log\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$, $\alpha>0$. Соответствующие классы $K_\omega(K_\omega^n)$ содержат класс липшицевых функций (гладкость $r=1$). Мощность 1-приближающих классов равна

$$N\log(N\omega(1/N))=N\log(N((1/N)\cdot\log^\alpha N))\sim N\log\log N$$

(для $n$ переменных $N^n\log\log N$).

Соответствующая сложность реализации есть величина

$$\rho\frac{2^s}{s}\log s\quad\left(\rho\frac{2^{ns}}{ns}\log s\right).$$

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю О. Б. Лупанову за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М., 1965. 31—110.

Поступила в редакцию
03.03.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1992. № 5

---

УДК 531.01.

**С. В. Киргетова**

## О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрим гамильтонову систему с полутора степенями свободы

$$\left\{\ \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y},\ \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x},\ H=T+V,\right. \tag{1}$$

$$T=y^2/2$$