Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 2. С. 78–84.

УДК 517.977.5

ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ СОБОЛЕВА

А. Ф. Шуклина[1,a], **М. В. Плеханова**[1,2,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *isaf@csu.ru*, [b] *mariner79@mail.ru*

В работе получены условия разрешимости задач жёсткого смешанного оптимального управления для системы уравнений Соболева. Рассмотрены задачи с функционалом качества с нормой в пространстве Лебега и с терминальным функционалом.

Ключевые слова: *оптимальное управление, жёсткое управление, смешанное управление, терминальный функционал, система уравнений Соболева.*

Введение

В работе рассматривается задача оптимального управления для системы уравнений Соболева, описывающей динамику малых внутренних движений стратифицированной жидкости в равновесном состоянии. Поскольку система Соболева относится к не разрешённым относительно производной по времени системам уравнений, её исследование проводится в рамках абстрактной задачи

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$$Px(0) = v, \tag{2}$$

$$(u, v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(x) \to \inf. \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — гильбертовы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (т. е. линейный и непрерывный, действует из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линеен и замкнут, плотно определён в $\mathcal{X}$, действует в $\mathcal{Y}$), $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое и замкнутое множество допустимых управлений, J — выпуклый функционал качества, $y : [0, T] \to \mathcal{Y}$ — заданная функция. Задачи оптимального управления с функционалом качества, в явном виде не зависящим от функции управления, часто называются задачами жёсткого управления [1]. При этом управляющее воздействие входит как в само уравнение, так и в начальное условие. Такое управление будем называть смешанным [2] (распределённое и стартовое управление [1; 3] одновременно). Отметим, что в приложениях часто естественным оказывается использование обобщённого условия Шоуолтера — Сидорова (2), где P — проектор вдоль M-корневого подпространства оператора L.

Исследование опирается на результаты о разрешимости начально-краевых задач для вырожденных эволюционных уравнений, полученные в работах В. Е. Федорова [4; 5], результаты М. В. Плехановой, В. Е. Федорова и А. Ф. Исламовой

[6–10] о разрешимости задач оптимального управления для вырожденных эволюционных уравнений, т. е. уравнений с вырожденным оператором при производной по времени.

В работе рассмотрены случаи функционала с нормой в пространстве Лебега и терминального функционала, однако аналогичным образом можно получить результаты и для близких по структуре задач с некоторыми другими функционалами (см. по этому поводу [3]).

1. Задача оптимального управления

Введём необходимые в дальнейшем обозначения: $W_2^k(0,T;\mathcal{X}) = H^k(\mathcal{X})$ для $k \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H^0(\mathcal{X}) = L_2(\mathcal{X})$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$.

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Возьмём (L,σ)-ограниченный оператор M, выберем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = R > a\}$. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$$

являются проекторами. Положим $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Тогда $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$. Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathcal{X}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k)$, $k = 0,1$.

Теорема [11]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0,1$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$;

(iii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$.

Обозначим $G = M_0^{-1}L_0$. (L,σ)-ограниченный оператор M назовём (L,p)-ограниченным при $p \in \mathbb{N}_0$, если $G^p \neq \mathbb{O}$, $G^{p+1} = \mathbb{O}$.

Решения уравнения (1) будем искать в гильбертовом пространстве (см. [7])

$$\mathcal{Z} = \{z \in H^1(\mathcal{X}) : \ L\dot{z} - Mz \in H^{p+1}(\mathcal{Y})\},$$

наделённом нормой $\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 = \|z\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \|L\dot{z} - Mz\|_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}^2$. Выберем пространство управлений $\mathfrak{U} = H^{p+1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{X}$ и введём в рассмотрение оператор $\mathfrak{B} \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathcal{U}); H^{p+1}(\mathcal{Y}))$, $(\mathfrak{B}u)(t) = Bu(t)$, $t \in [0,T]$.

Множество $\mathfrak{W}$ троек $(x,u,v) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям (1)–(3), назовём *множеством допустимых троек* задачи (1)–(4). Решением задачи (1)–(4) называется тройка $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующая функционал стоимости J: $J(\hat{x}) = \inf_{(x,u,v)\in\mathfrak{W}} J(x)$.

Задачу (1)–(4) будем рассматривать с функционалами

$$J(x) = \frac{1}{2}\|x - w\|_{L_2(\mathcal{X})}^2 \to \inf, \tag{5}$$

$$J(x) = \frac{1}{2}\|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}^2 \to \inf, \tag{6}$$

где $w \in L_2(\mathcal{X})$ и $w \in \mathcal{X}$ заданы для (5) и (6) соответственно.

Из теоремы 4.2.1 [11] получим, что из (L,p)-ограниченности оператора M следует его сильная (L,p)-радиальность. Вкупе с ограниченностью оператора M_1 и результатами работы [10] (следствия 1 и 2) это сразу влечёт следующие утверждения о разрешимости задач (1)–(3), (5) и (1)–(3), (6).

Предложение 1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $w \in L_2(\mathcal{X})$, $\mathfrak{U}_\partial$ — замкнутое, выпуклое и ограниченное в пространстве $\mathfrak{U}$ множество. Тогда существует решение $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$ задачи* (1)–(3), (5). *Решение задачи единственно только в случае инъективности оператора $\mathfrak{B}$.*

Предложение 2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $w \in \mathcal{X}$, $\mathfrak{U}_\partial$ — замкнутое, выпуклое и ограниченное в пространстве $\mathfrak{U}$ множество. Тогда существует решение задачи* (1)–(3), (6) $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$. *Решение задачи единственно только в случае инъективности оператора $\mathfrak{B}$.*

2. Задачи управления для системы уравнений Соболева

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Соболева, описывающей динамику малых внутренних движений стратифицированной жидкости в равновесном состоянии [12],

$$v(x,0) = q(x), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$v_n(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i(x,t) n_i(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{8}$$

$$v_t(x,t) = [v(x,t),\bar{\omega}] - r(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{9}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{10}$$

Здесь $n = (n_1,n_2,n_3)$ — вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, $v = (v_1,v_2,v_3)$ — вектор скорости движения частиц жидкости, $r = (r_1,r_2,r_3) = (p_{x_1},p_{x_2},p_{x_3})$ — градиент нестационарного давления, $[\cdot,\bar{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\bar{\omega} = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$, где ω — удвоенная угловая скорость вращения,

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Неизвестными вектор-функциями являются v и r. Пара (u,q) задаёт управление.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространства $\mathbb{L}_2$. Существует представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим ортогональным представлением ортопроектор.

Следуя подходу С. Л. Соболева [12], используем обобщённую постановку задачи (7)—(10), заменив уравнение несжимаемости (10) и граничное условие (8) на уравнение

$$\Pi v(\cdot,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A} : v \to [v,\bar{\omega}], \bar{\omega} = (0,0,\omega)$, осуществляет линейное непрерывное отображение из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$, при этом $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = |\omega|$. Нетрудно также показать, что имеет место действие оператора $\mathcal{A} : \mathbb{H}_\pi \to \mathbb{H}_\sigma$ [13].

Положим $\Sigma = I - \Pi$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}|_{\mathbb{H}_\sigma}$, тогда задачу (7), (9), (11) можно задать в виде (1), (2) с помощью операторов (подробнее см. в [14])

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}),\ M = \begin{pmatrix} \Sigma\mathcal{A}_\sigma & \mathbb{O} \\ \Pi\mathcal{A}_\sigma & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}),\ B = I \in \mathcal{L}(\mathcal{U}).$$

В работе [14] показано, что в таком случае оператор M $(L,0)$-ограничен.

Рассмотрим задачу оптимального управления с ограничением на функции управления
$$\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2)} + \|q\|^2_{\mathbb{H}_\sigma} \leq R^2 \tag{12}$$
и с функционалом качества
$$J(v,r) = \frac{1}{2}\|v - v_0\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2)} + \frac{1}{2}\|r - r_0\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2)} \to \inf \tag{13}$$
либо
$$J(v,r) = \frac{1}{2}\|v(T) - v_0\|^2_{\mathbb{L}_2} + \frac{1}{2}\|r(T) - r_0\|^2_{\mathbb{L}_2} \to \inf \tag{14}$$
для системы (7), (9), (11).

Определим пространства
$$\mathcal{Z} = H^2(0,T;\mathbb{H}_\sigma) \times H^1(0,T;\mathbb{H}_\pi),\ \mathfrak{U} = L_2(0,T;\mathbb{L}_2) \times \mathbb{H}_\sigma.$$
Нетрудно заметить, что определённое таким образом пространство $\mathcal{Z}$ соответствует пространству $\mathcal{Z}$ из предыдущего параграфа при заданных $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{U}$ и операторах L, M.

Теорема 1. *Пусть $v_0, r_0 \in L_2(0,T;\mathbb{L}_2)$. Тогда существует единственное решение $(\hat{v},\hat{r},\hat{u},\hat{q}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$ задачи* (7), (9), (11)—(13).

Доказательство. В силу очевидной выпуклости, замкнутости и ограниченности множества $\mathfrak{U}_\partial$, заданного условием (12), в пространстве $\mathfrak{U}$ утверждение теоремы следует из предложения 1. Поскольку оператор B инъективен, решение задачи управления единственно. □

Аналогичным образом из предложения 2 получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $v_0, r_0 \in \mathbb{L}_2$. Тогда существует единственное решение $(\hat{v},\hat{r},\hat{u},\hat{q}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$ задачи* (7), (9), (11), (12), (14).

Список литературы

1. **Фурсиков, А. В.** Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Науч. кн., 1999. — 350 с.
2. **Исламова, А. Ф.** Задачи смешанного управления для линейных распределенных систем соболевского типа : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. Ф. Исламова. — Челябинск, 2012.
3. **Плеханова, М. В.** Оптимальное управление вырожденными распределёнными системами / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013. — 174 с.
4. **Федоров, В. Е.** О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1646–1649.
5. **Федоров, В. Е.** Обобщение теоремы Хилле — Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров. // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 426–448.
6. **Плеханова, М. В.** Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 5. — С. 40–44.

7. **Плеханова, М. В.** Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 37–44.
8. **Плеханова, М. В.** Исследование линеаризованной системы уравнений Буссинеска методами теории вырожденных полугрупп / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2009. — № 20 (158). Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. — С. 62–69.
9. **Плеханова, М. В.** О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределёнными системами, не разрешёнными относительно производной по времени / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — Т. 75, вып. 2. — С. 177–194.
10. **Исламова, А. Ф.** Минимизация функционалов со слабой нормой на решениях вырожденного линейного уравнения. / А. Ф. Исламова // Вестн. ЮУрГУ. — 2011. — № 17 (234). Сер. «Мат. моделирование и программирование». Вып. 8. — С. 36–45.
11. **Sviridyuk, G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht ; Boston : VSP, 2003. — vii+216 p.
12. **Соболев, С. Л.** Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.
13. **Уразаева, А. В.** Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 8. — С. 1111–1119.
14. **Гордиевских, Д. М.** Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени / Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». — 2015. — Т. 12. — С. 12–22.

Поступила в редакцию 15.05.2016
После переработки 12.06.2012

Сведения об авторах

Шуклина Анна Фаридовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: isaf@csu.ru.

Плеханова Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mariner79@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 78–84.

MIXED CONTROL PROBLEMS FOR SOBOLEV'S SYSTEM

A.F. Shuklina[1,a], **M.V. Plekhanova**[1,2,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *isaf@csu.ru*, [b] *mariner79@mail.ru*

In the paper solvability conditions are obtained for robust mixed optimal control problems to the Sobolev's system of equations. Problems with a quality functional using the norm in Lebesgue space and with a terminal functional are considered.

Keywords: *optimal control, robust control, mixed control, terminal functional, Sobolev's system of equations.*

References

1. **Fursikov A.V.** *Optimal'noe upravlenie raspredelyonnymi sistemami. Teoriya i prilozheniya.* [Optimal control of distributed systems. Theory and Applications]. Novosibirsk, Nauchnaya kniga Publ., 1999. 350 p. (In Russ.).
2. **Islamova A.F.** *Zadachi smeshannogo upravleniya dlya lineynykh raspredelyonnykh sistem sobolevskogo tipa* [Mixed control problems for linear distributed systems of Sobolev type. Thesis]. Chelyabinsk, 2012. (In Russ.).
3. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** *Optimal'noye upravleniye vyrozhdennymi raspredelyonnymi sistemami* [Optimal control for degenerate distributed systems]. Chelyabinsk, Publishing Center of South Ural State University, 2013. 174 p. (In Russ.).
4. **Fedorov V.E.** Smoothness of solutions of linear equations of Sobolev type. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1731–1735.
5. **Fedorov V.E.** A generalization of the Hille — Yosida theorem to the case of degenerate semigroups in locally convex spaces. *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, no. 2, pp. 333–350.
6. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** An optimal control problem for a class of degenerate equations. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 5, pp. 698–702.
7. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** An optimality criterion in a control problem for a Sobolev-type linear equation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 248–254.
8. **Plekhanova M.V., Islamova A.F.** *Issledovanie linearizovannoy sistemy uravneniy Bussineska metodami teorii vyrozhdennykh polugrupp* [Study of the linearized Boussinesq equations system by the methods of the theory of degenerate semigroups]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Chelyabinsk State University. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2009, no. 20, pp. 62–69. (In Russ.).
9. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** On the existence and uniqueness of solutions of optimal control problems of linear distributed systems which are not solved with respect to the time derivative. *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 395–412.
10. **Islamova A.F.** Minimizatsiya funktsionalov so slaboy normoy na resheniyakh vyrozhdennogo lineynogo uravneniya [Minimization of functionals with a weak norm on solutions of degenerate linear equation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye»* [Bulletin of South Ural State University. Ser. Mathematical modeling and programming], 2011, no. 17 (234), pp. 36–45. (In Russ.).

11. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, VSP, 2003. vii+216 p.
12. **Sobolev S.L.** Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. matematicheskaya* [News of Academy of Sciences of USSR. Ser. mathematical], 1954, vol. 18, pp. 3–50. (In Russ.).
13. **Urazaeva A.V., Fedorov V.E.** Prediction-control problem for some systems of equations of fluid dynamics. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 1147–1156.
14. **Gordievskikh D.M., Fedorov V.E.** Resheniya nachal'no-kravevykh zadach dlya nekotorykh vyrozhdennykh sistem uravneniy drobnogo poryadka po vremeni [Solutions of initial boundary value problems for certain time fractional order degenerate systems of equations]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika* [News of Irkutsk State University. Ser. Mathematics], 2015, vol. 12, pp. 12–22. (In Russ.).

Accepted article received 15.05.2016
Corrections received 12.06.2016