А. И. Кибзун, Е. А. Кузнецов, Выпуклые свойства функции квантили в задачах стохастического программирования, *Автомат. и телемех.*, 2004, выпуск 2, 33–42

Автоматика и телемеханика, № 2, 2004

© 2004 г. **А. И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук,**
Е. А. КУЗНЕЦОВ
(Московский авиационный институт)

ВЫПУКЛЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ КВАНТИЛИ В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Исследуется задача стохастического программирования с квантильным критерием (VaR-критерием). Приводятся условия, связанные со свойствами вероятностных распределений, при которых функция квантили оказывается выпуклой по стратегии. Показывается связь между выпуклостью функции квантили и выпуклостью функции интегральной квантили (CVaR-критерием).

1. Введение

В задачах выбора оптимальной стратегии исследователь часто сталкивается с тем, что возможные потери, которые необходимо минимизировать, зависят не только от стратегии управления, но и от некоторого случайного фактора с известным или частично известным распределением. Одним из способов учета влияния случайного фактора на возможные потери является использование функции квантили в качестве критерия оптимальности. Задача поиска оптимальной стратегии, таким образом, сводится формально к задаче математического программирования. Трудоемкость решения таких задач существенно зависит от свойств минимизируемой функции. Так, если функция оказывается строго выпуклой на выпуклом множестве допустимых стратегий, то можно гарантировать единственность решения такой задачи. Поэтому в задачах с квантильным критерием важно установить условия, при которых функция квантили обладает выпуклыми свойствами.

Функция квантили является довольно сложным объектом, на свойства которого влияет как вид функции потерь, так и закон распределения случайного вектора. Основные свойства функции квантили изучались в [1]. В [2] приведены условия, при которых функция квантили будет выпукла. Эти условия базируются на различных понятиях вогнутости вероятностных мер.

Все полученные в [2] результаты справедливы для любого произвольного уровня доверительной вероятности $0 < \alpha < 1$. Однако на практике уровень доверительной вероятности достаточно близок к 1, т.е. стратегия, получаемая при решении задачи с квантильным критерием, должна гарантировать величину потерь не большую, чем оптимальное значение критерия, с некоторой близкой к единице вероятностью. Поэтому предлагается ослабить условия из [2] за счет того, что мы не будем гарантировать выпуклость функции квантили для любого значения доверительной вероятности, ограничившись лишь значениями большими, чем некоторое α_0. В результате, мы ослабим требования и на свойства закона распределения случайного вектора, и на свойства функции потерь.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00416).

Иногда бывает удобно вместо функции квантили рассматривать функцию интегральной квантили [3], известную как CVaR [4, 5], которая также зависит от некоторого уровня доверительной вероятности. В условиях из [5], при которых функция интегральной квантили оказывается выпуклой, не используются какие-либо свойства вогнутости распределения случайного вектора, но требуется существование первого момента для случайной величины потерь. Мы приведем условие, при котором из выпуклости функции интегральной квантили будет следовать выпуклость функции квантили.

2. Основные определения

Предположим, что на $\mathbb{R}^n$ задана вероятностная мера $\mathcal{P}_\xi$, соответствующая случайному вектору ξ. Зададим скалярную функцию $f(u,x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, значение которой представляет величину потерь при выбранной стратегии u и реализации x случайного вектора ξ. Определим функцию вероятности:

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}_\xi\{f(u,\xi) \leqslant \varphi\}, \tag{1}$$

где ξ – случайный вектор с носителем $X \subset \mathbb{R}^n$, а φ – заданный уровень потерь. Задача поиска оптимальной стратегии с критерием в виде функции вероятности обычно заключается в нахождении стратегии, максимизирующей функцию вероятности, т.е. вероятность того, что потери не превысят допустимый порог φ. Определим также функцию квантили:

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \tag{2}$$

где α – фиксированный уровень доверительной вероятности. В отличие от задачи с критерием в виде функции вероятности, в задачах с квантильным критерием минимизируются максимальные потери, которые не будут превзойдены с заданной вероятностью α. Найденная стратегия будет, таким образом, гарантирующей с вероятностью α. Квантильный критерий часто называют VaR-критерием (Value-at-Risk). Иногда для учета возможных бóльших потерь, чем VaR, которые могут происходить с вероятностью $1-\alpha$, рассматривают так называемую интегральную функцию квантили $\psi_\alpha(u)$. Для этого рассмотрим функцию квантили $\varphi_\beta(u)$ не только как функцию аргумента u, но и как функцию с переменным уровнем доверительной вероятности β. Тогда

$$\psi_\alpha(u) \triangleq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \varphi_\beta(u)d\beta. \tag{3}$$

Интегральная квантиль известна также как CVaR (Conditional Value-at-Risk). Функция CVaR была предложена в [4], а тождественность данного определения с определением CVaR из [5] показана в [3]. Следует заметить также, что для существования функции CVaR требуется, по крайней мере, чтобы величина $\mathsf{M}[f^+(u,\xi)]$ была ограничена, где $f^+(\cdot) \triangleq \max(f(\cdot),0)$.

Пусть функция квантили определена на выпуклом множестве U. Тогда очевидно, что если функция квантили $\varphi_\beta(u)$ выпукла по $u \in U$ для всех $\beta \geqslant \alpha_1$ для некоторого α_1, то функция $\psi_\alpha(u)$ также будет выпукла по $u \in U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_1$. На практике оказывается, что для выпуклости функции $\psi_\alpha(u)$ достаточно выпуклости функции потерь по стратегии для почти всех значений случайного вектора ξ. Доказательство этого утверждения приведено в [5].

3. Выпуклость функции квантили и α-квазивогнутые меры

Вероятностная мера $\mathcal{P}_\xi$ называется квазивогнутой (см. [1]), если для любых выпуклых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ и для любого $\gamma \in [0,1]$ выполняется неравенство:

$$\mathcal{P}_\xi(\gamma A + (1-\gamma)B) \geqslant \min(\mathcal{P}_\xi(A), \mathcal{P}_\xi(B)), \tag{4}$$

где под суммой множеств и умножением множества на число понимаются соответствующие операции по Минковскому. Введем новое определение.

Определение 1. *Назовем вероятностную меру α-квазивогнутой, если свойство* (4) *выполняется для всех выпуклых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ таких, что $\mathcal{P}(A) \geqslant \alpha$, $\mathcal{P}(B) \geqslant \alpha$.*

Таким образом, для $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 1$, если вероятностная мера является α_1-квазивогнутой, то она и α_2-квазивогнута. Если вероятностная мера 0-квазивогнута, то это означает обычную квазивогнутость меры.

Теперь можно сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Если функция $f(u,x)$ является выпуклой на выпуклом множестве $U \times X$ со значениями в $V \subseteq \mathbb{R}^1$ и вероятностная мера $\mathcal{P}_\xi$ является α_0-квазивогнутой на носителе $X \subseteq \mathbb{R}^n$, то функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ выпукла на U для любого $\alpha \in [\alpha_0, 1)$.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении. Данное утверждение обобщает утверждение из [2], в котором требовалась квазивогнутость меры $\mathcal{P}_\xi$ и тогда функция квантили оказывалась выпуклой на U для всех $\alpha \in (0,1)$.

Покажем, что линейные преобразования не портят свойства α-квазивогнутости вероятностной меры. Обозначим прообраз множества $A \subset \mathbb{R}^p$ при отображении $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ как $T^{-1}(A) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \in A\}$. Обозначим как $\mathcal{P}_{T\xi}$ вероятностную меру, индуцированную отображением $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, так что для любого борелевского $A \subseteq \mathbb{R}^p$ $\mathcal{P}_{T\xi}(A) = \mathcal{P}_\xi(T^{-1}(A))$.

Теорема 2. *Пусть T – линейный оператор, отображающий $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^p$, $p \leqslant n$, и $\mathcal{P}_\xi$ является α-квазивогнутой мерой. Тогда вероятностная мера $\mathcal{P}_{T\xi}$ будет α-квазивогнутой.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Приведем простой пример вероятностной меры, не являющейся квазивогнутой, но являющейся α-квазивогнутой. Рассмотрим распределение на $\mathbb{R}^1$ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}5, & x \in [-2,-1] \cup [1,2], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{5}$$

Очевидно, что данная мера не является квазивогнутой, для примера достаточно взять $A = [-1{,}5; -1]$, $B = [1; 1{,}5]$, $\gamma = 0{,}5$. Но данная мера является α-квазивогнутой для $\alpha > 0{,}5$.

4. Связь между выпуклостью CVaR и выпуклостью VaR

Как мы уже упоминали, из выпуклости функции квантили вытекает выпуклость интегральной квантили, являющейся выпуклой. Обратное, вообще говоря, не верно. Однако для некоторого вида функции интегральной квантили, являющейся выпуклой, оказывается, что функция квантили также будет выпуклой, хотя и не для всех значений доверительной вероятности α.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены следующие условия:

(i) *функция интегральной квантили* (3) *имеет вид*

$$\psi_\alpha(u) = S_0(u) + \sum_{i=1}^{k} S_i(u) g_i(\alpha), \tag{6}$$

где $u \in U$, а $U \subseteq \mathbb{R}^m$ – выпуклое множество;

(ii) *$g_i(\alpha)$, $i = \overline{1,k}$ – скалярные функции скалярного аргумента, монотонно неубывающие и непрерывно дифференцируемые на $(\alpha_0, 1)$ такие, что*

$$\lim_{\alpha \to 1} (1-\alpha) g_i'(\alpha) = 0, \quad i = \overline{1,k}; \tag{7}$$

(iii) *$S_i(u)$, $i = \overline{0,k}$ – функции такие, что существует набор $\{C_i^0\}$ констант*

$$C_i^0 < \lim_{\alpha \nearrow 1} g_i(\alpha), \quad i = \overline{1,k}, \tag{8}$$

для которых при любых $C_i \geqslant C_i^0$, $i = \overline{1,k}$, функция

$$\psi_0(u) \triangleq S_0(u) + \sum_{i=1}^{k} S_i(u) C_i \tag{9}$$

будет выпуклой. Тогда:

а) *функция квантили имеет вид*

$$\varphi_\alpha(u) = \psi_\alpha(u) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} S_i(u) g_i'(\alpha), \tag{10}$$

б) *существуют константы α_*, $\alpha^* \in [\alpha_0, 1)$, где $\alpha_* \leqslant \alpha^*$, такие что $\psi_\alpha(u)$ будет выпуклой для всех $\alpha \in [\alpha_*, 1)$, а $\varphi_\alpha(u)$ будет выпуклой для всех $\alpha \in [\alpha^*, 1)$.*

Обобщим утверждение о выпуклости функции интегральной квантили (CVaR). В [5] показано, что функция интегральной квантили может быть представлена в виде:

$$\psi_\alpha(u) = \min_{-\infty < \varphi < \infty} \left\{ \varphi + \frac{1}{1-\alpha} \mathsf{M}\left[(f(u,\xi) - \varphi)^+ \right] \right\}, \tag{11}$$

из которого следует выпуклость функции CVaR в случае, если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция потерь $f(u,x)$ будет выпуклой по u на выпуклом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Обобщение заключается в ослаблении требований на выпуклость функции потерь по u. Сформулируем следующую теорему:

Т е о р е м а 4. Пусть для некоторого $\alpha \in (0,1)$ существуют такие константы $\vartheta \leqslant \vartheta_\alpha$, что функция $g_{x,\vartheta}(u) \triangleq \max(f(u,x), \vartheta)$ выпуклая на U для любого $x \in X$ и, кроме того, $P_{\vartheta_\alpha}(u) < \alpha$ для всех $u \in U$. Тогда функция интегральной квантили $\psi_\alpha(u)$ будет выпуклой для всех $u \in U$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенные теоремы. Пусть функция потерь имеет вид $f(u,x) \triangleq u_1^2 x_1 + u_2^2 x_2$, где $u_1, u_2 \in [1,2]$, случайный вектор ξ имеет равномерное распределение на множестве $X \triangleq \{(x_1, x_2) : -1 \leqslant x_1 \leqslant a, \ -1 \leqslant x_2 \leqslant \leqslant a\}$, где $a > 0$ (см., например, [1]). В данном примере можно найти аналитическое выражение для функций $\varphi_\alpha(u)$ и $\psi_\alpha(u)$.

Пусть $S_\varphi(u) \triangleq \{x \in X : u_1^2 x_1 + u_2^2 x_2 \leqslant \varphi\}$. Для вычисления функции квантили используем соотношение $\mathcal{P}_\xi(S_\varphi(u)) = \alpha$. В данном случае это соотношение принимает вид:

$$\frac{\operatorname{mes}(X \setminus S_\varphi(u))}{(a+1)^2} = 1 - \alpha,$$

где под mes понимается лебегова мера в $\mathbb{R}^2$. Выбрав достаточно большое $\varphi > 5a$, находим

$$\operatorname{mes}(X \setminus S_\varphi(u)) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\varphi - u_2^2 a}{u_1^2}\right)\left(a - \frac{\varphi - u_1^2 a}{u_2^2}\right).$$

Откуда получаем

$$\varphi_\alpha(u) = a\left(u_1^2 + u_2^2\right) - (a+1)u_1 u_2 \sqrt{2(1-\alpha)}.$$

Если $0 < 1 - \dfrac{2a^2}{(1+a)^2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, то функция квантили выпуклая. Воспользовавшись соотношением (3) находим:

$$\psi_\alpha(u) = a\left(u_1^2 + u_2^2\right) - (a+1)u_1 u_2 \frac{2}{3}\sqrt{2(1-\alpha)}.$$

Если $0 < 1 - \dfrac{9a^2}{8(1+a)^2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, то функция $\psi_\alpha(u)$ выпуклая. При $\alpha = 1$ получаем

$$\psi_1(u) = \varphi_1(u) = a\left(u_1^2 + u_2^2\right),$$

т.е $\psi_1(u)$ и $\varphi_1(u)$ – выпуклые функции. В данном примере условие теоремы 3 выполняется, так как функция представима в виде $f(u,x) = S_0(u) + S_1(u)g_1(\alpha)$, где $S_0(u) = a(u_1^2 + u_2^2)$, $S_1(u) = u_1 u_2$, $g(\alpha) = -(a+1)\dfrac{2}{3}\sqrt{2(1-\alpha)}$. В данном случае $\alpha_0 = \alpha_* = 1 - \dfrac{9a^2}{8(1+a)^2}$, а $\alpha^* = 1 - \dfrac{2a^2}{(1+a)^2}$. Условие теоремы 4 тоже выполняется: так, можно взять $\vartheta = 5a$, $\vartheta_\alpha > 5a$, в противном случае функция потерь может быть представлена как сумма выпуклой и вогнутой функции (при отрицательных x_1 или x_2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем значение $\alpha \in [\alpha_0, 1)$. Для доказательства выпуклости функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ на U достаточно показать, что надграфик $\mathsf{epi}\varphi_\alpha(u) \triangleq \{(u,\varphi) : \varphi_\alpha(u) \leqslant \varphi\}$ есть выпуклое множество. Заметим, что из определения функции квантили следует равенство:

$$\{(u,\varphi) : \varphi_\alpha(u) \leqslant \varphi\} = \{(u,\varphi) : P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{П.1}$$

Выберем две пары $(u_1,\varphi_1), (u_2,\varphi_2) \in \mathsf{epi}\,\varphi_\alpha(u)$ и произвольное $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и определим множества:

$$\begin{gathered} A_1 \triangleq \{x \in X : f(u_1,x) \leqslant \varphi_1\}, \quad A_2 \triangleq \{x \in X : f(u_2,x) \leqslant \varphi_2\}, \\ A \triangleq \{x \in X : f(\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2, x) \leqslant \gamma\varphi_1 + (1-\gamma)\varphi_2\}. \end{gathered} \tag{П.2}$$

Возьмем $x \in \gamma A_1 + (1-\gamma)A_2$, тогда найдутся $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ такие, что $x = \gamma x_1 + (1-\gamma)x_2$. Поэтому

$$f(\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2, x) \leqslant \gamma f(u_1, x_1) + (1-\gamma) f(u_2, x_2) \leqslant \gamma\varphi_1 + (1-\gamma)\varphi_2, \tag{П.3}$$

это означает, что $x \in A$, и, следовательно, $A \subseteq \gamma A_1 + (1-\gamma)A_2$. Откуда, воспользовавшись α_0-квазивогнутостью меры, получаем:

$$\mathcal{P}_\xi\{x \in A\} \geqslant \mathcal{P}_\xi\{x \in \gamma A_1 + (1-\gamma)A_2\} \geqslant \alpha. \tag{П.4}$$

Это означает выпуклость надграфика, а значит, и функции квантили.

Лемма 1. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ – линейный оператор, отображающий $\mathbb{R}^n$ на все $\mathbb{R}^p$, $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^p$ – непустые выпуклые множества. Тогда

а) $T^{-1}(A_1)$ *– выпуклое множество;*

б) *для любого* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1 : T^{-1}(\gamma A_1 + (1-\gamma)A_2) = \gamma T^{-1}(A_1) + (1-\gamma)T^{-1}(A_2)$.

Доказательство. Действительно пусть $x_1, x_2 \in T^{-1}(A_1)$, где A_1 – выпуклое множество. Тогда для любого $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ имеем $T(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) = \gamma T x_1 + (1-\gamma) T x_2 \in A_1$, так как $Tx_1, Tx_2 \in A_1$ и A_1 – выпуклое множество. Таким образом, пункт а) доказан.

Пусть $x \in T^{-1}(A_1)$ и $x' \in \ker T$, тогда $x + x' \in T^{-1}(A_1)$. Действительно, $T(x+x') = Tx + Tx' = Tx \in A$. Следовательно, $x + x' \in T^{-1}(A_1)$.

Возьмем $x \in \gamma T^{-1}(A_1) + (1-\gamma)T^{-1}(A_2)$. Значит, x представим как $x = \gamma x_1 + (1-\gamma)x_2$, где $x_1 \in T^{-1}(A_1)$, $x_2 \in T^{-1}(A_2)$. Получаем

$$Tx = \gamma T x_1 + (1-\gamma) T x_2 \in \gamma A_1 + (1-\gamma) A_2,$$

т.е. $T^{-1}(A_1) + (1-\gamma)T^{-1}(A_2) \subseteq T^{-1}(\gamma A_1 + (1-\gamma)A_2)$.

Теперь пусть $x \in T^{-1}(\gamma A_1 + (1-\gamma)A_2)$. Тогда существуют такие $y_1 \in A_1$, $y_2 \in A_2$, что $Tx = \gamma y_1 + (1-\gamma) y_2$. И поскольку T отображает $\mathbb{R}^n$ на все $\mathbb{R}^p$, существуют $x_1 \in T^{-1}(A_1)$ и $x_2 \in T^{-1}(A_2)$ такие, что $Tx_1 = y_1$ и $Tx_2 = y_2$. Таким образом, мы получаем $Tx = \gamma T x_1 + (1-\gamma) T x_2$, откуда следует, что $x_0 \triangleq x - \gamma x_1 - (1-\gamma)x_2 \in \ker T$. Но $x = \gamma(x_1 + x_0) + (1-\gamma)(x_2 + x_0)$, а $x_1 + x_0 \in T^{-1}(A_1)$ и $x_2 + x_0 \in T^{-1}(A_2)$, т.е. $x \in T^{-1}(\gamma A_1 + (1-\gamma)A_2) \subseteq \gamma T^{-1}(A_1) + (1-\gamma)T^{-1}(A_2)$ и утверждение пункта б) леммы доказано. ▲

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим выпуклые множества $A, B \subset \mathbb{R}^p$ такие, что $\mathcal{P}_{T\xi}(A) \geqslant \alpha$, $\mathcal{P}_{T\xi}(B) \geqslant \alpha$. Тогда

$$\mathcal{P}_{T\xi}(\gamma A + (1-\gamma)B) = \mathcal{P}_\xi(\gamma T^{-1}(A) + (1-\gamma)T^{-1}(B)).$$

Но согласно лемме 1 $T^{-1}(A)$ и $T^{-1}(B)$ – выпуклые множества с мерой, не меньшей α. Поэтому из α-квазивогнутости меры $\mathcal{P}_\xi$ будет следовать α-квазивогнутость меры $\mathcal{P}_{T\xi}$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_\xi(\gamma T^{-1}(A) + (1-\gamma)T^{-1}(B)) \geqslant \min(\mathcal{P}_\xi(T^{-1}(A)), \mathcal{P}_\xi(T^{-1}(A))) = \\ &= \min(\mathcal{P}_{T\xi}(A), \mathcal{P}_{T\xi}(B)),\end{aligned}$$

т.е. утверждение доказано.

Доказательство теоремы 3. Исходя из определения функции интегральной квантили (3), можно получить соотношение, связывающее функции $\varphi_\alpha(u)$ и $\psi_\alpha(u)$:

$$\varphi_\alpha(u) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left((1-\alpha)\psi_\alpha(u)\right), \tag{П.5}$$

справедливое в точках непрерывности $\varphi_\alpha(u)$ по $\alpha \in (0,1)$. Учитывая такое соотношение и используя вид (6) функции $\psi_\alpha(u)$, получим

$$\begin{aligned}\text{(П.6)}\qquad \varphi_\alpha(u) &= S_0(u) + \sum_{i=1}^{k} S_i(u)(g_i(\alpha) - (1-\alpha)g_i'(\alpha)) = \\ &= \psi_\alpha(u) - (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k} S_i(u) g_i'(\alpha).\end{aligned}$$

Так как $\psi_\alpha(u)$ непрерывна по $\alpha \in (0,1)$, $g_i'(\alpha)$ непрерывна по условию теоремы, то и $\varphi_\alpha(u)$ непрерывна по $\alpha \in (\alpha_0, 1)$. Поэтому соотношение (П.6) верно для всех $\alpha \in (\alpha_0, 1)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия (8) и благодаря непрерывности и монотонности $g_i'(\alpha)$ на $(\alpha_0, 1)$ найдутся такие $\alpha_i \in (\alpha_0, 1)$, для которых $C_i^0 + \varepsilon < g_i(\alpha_i)$. Выберем $\alpha_* = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Так как согласно условию (ii) функция $\psi_0(u)$ выпуклая на U для любых $C_i \geqslant C_i^0$, $i = \overline{1,k}$, то и $\psi_\alpha(u)$, имеющая структуру $\psi_0(u)$, будет выпуклой на U для всех $\alpha \in [\alpha_*, 1)$.

С другой стороны, из (7) вытекает, что существуют такие α^i, что $|(1-\alpha^i)g_i'(\alpha^i)| < \varepsilon$. Выберем $\alpha^* = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha^1, \ldots, \alpha^k\}$. Тогда $g_i(\alpha^*) > \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{C_i^0\} + \varepsilon$, а значит, $g_i(\alpha^*) - (1-\alpha^*)g_i'(\alpha^*) > C_i^0$ для всех $i = \overline{1,k}$. Согласно (ii) функция $\psi_0(u)$ выпуклая на U для любых $C_i \geqslant C_i^0$, $i = \overline{1,k}$. Поэтому функция квантили (П.6) будет выпуклой для всех $\alpha > \alpha^*$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Из выпуклости функции $\max(f(u,x), \vartheta)$ по u для любого x следует выпуклость функции $\max(f(u,x), \varphi)$ по u для любого x и любого $\varphi \geqslant \vartheta$, и, в частности, для $\varphi = \vartheta_\alpha$. Действительно, выберем $\varphi \geqslant \vartheta$ и рассмотрим $g_{x,\varphi}(u) \triangleq \max(f(u,x), \varphi)$ как функцию от u при фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда надграфик этой функции имеет вид:

$$\begin{aligned}&\mathsf{epi}\, g_{x,\varphi}(u) = \{(u,y) : \max(f(u,x), \varphi) \leqslant y\} = \\ &= \{(u,y) : f(u,x) \leqslant y\} \cap \{(u,y) : \varphi \leqslant y\} = \\ &= \{(u,y) : f(u,x) \leqslant y\} \cap \{(u,y) : \varphi \leqslant y\} \cap \{(u,y) : \vartheta_0 \leqslant y\} = \\ &= \{(u,y) : \max(f(u,x), \vartheta) \leqslant y\} \cap \{(u,y) : \varphi \leqslant y\}.\end{aligned}$$

То есть этот надграфик является пересечением двух выпуклых множеств и, следовательно, является выпуклым. Поэтому функция $\max(f(u,x), \varphi)$ выпукла по u для любого x и любого $\varphi \geqslant \vartheta$.

Обозначим

$$\text{(П.7)}\qquad G_\alpha(u,\varphi) \triangleq \varphi + \frac{1}{1-\alpha}\mathsf{M}\left[(f(u,\xi) - \varphi)^+\right].$$

Данная функция совместно выпукла для $(u,\varphi) \in E$, где $E \triangleq U \times [\vartheta_\alpha, \infty)$. Действительно, функция $(f(u,x) - \varphi)^+ \triangleq \max(f(u,x) - \varphi, 0) = \max(f(u,x), \varphi) - \varphi$ является выпуклой на E для любого $x \in \mathbb{R}^n$, а оператор математического ожидания не портит свойств выпуклости.

Покажем теперь, что в данном случае

$$\text{(П.8)}\qquad \psi_\alpha(u) = \min_{\vartheta_\alpha < \varphi < \infty} G_\alpha(u,\varphi),$$

из чего будет следовать выпуклость $\psi_\alpha(u)$, так как производится минимизация выпуклой функции $G(u,\varphi)$ по φ на выпуклом множестве $\{\vartheta_\alpha < \varphi\}$.

Из условия $P_{\vartheta_\alpha}(u) < \alpha$, справедливого для любого u, по определению квантили следует, что функция квантили $\varphi_\alpha(u) > \vartheta_\alpha$ для любого u. Найдем значение:

$$\begin{aligned}
&G_\alpha(u, \varphi_\alpha(u)) = \varphi_\alpha(u) + \frac{1}{1-\alpha}\mathsf{M}\left[(f(u,\xi) - \varphi_\alpha(u))^+\right] = \\
&= \varphi_\alpha(u) + \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{f(u,x)>\varphi_\alpha(u)} [f(u,x) - \varphi_\alpha(u)] d\mathcal{P}_\xi(x) = \\
&= \varphi_\alpha(u) - \frac{1 - P_{\varphi_\alpha(u)}(u)}{1-\alpha}\varphi_\alpha(u) + \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{f(u,\xi)>\varphi_\alpha(u)} f(u,x) d\mathcal{P}_\xi(x) = \\
&= \frac{P_{\varphi_\alpha(u)}(u) - \alpha}{1-\alpha}\varphi_\alpha(u) + \frac{1 - P_{\varphi_\alpha(u)}(u)}{1-\alpha}\mathsf{M}[f(u,\xi) | f(u,\xi) > \varphi_\alpha(u)].
\end{aligned}$$

Но в [3] показано, что определение (3) эквивалентно следующему соотношению:

$$\psi_\alpha(u) = (1 - \lambda_\alpha(u))\,\mathsf{M}\,[f(u,\xi) | f(u,\xi) > \varphi_\alpha(u)] + \lambda_\alpha(u)\varphi_\alpha(u), \tag{П.9}$$

где

$$\lambda_\alpha(u) = \frac{P_{\varphi_\alpha(u)}(u) - \alpha}{1-\alpha}. \tag{П.10}$$

Таким образом, нам осталось показать, что величина

$$\varphi_\alpha(u) \in \operatorname*{Arg\,min}_{\vartheta_\alpha \leqslant \varphi \leqslant \infty} G_\alpha(u, \varphi).$$

Для этого рассмотрим производные слева и справа по φ функции $G(u, \varphi)$ в точках множества $\{\vartheta_\alpha < \varphi\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^- G_\alpha(u,\varphi)}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi' \nearrow \varphi} \frac{G_\alpha(u,\varphi') - G_\alpha(u,\varphi)}{\varphi' - \varphi}, \\
\frac{\partial^+ G_\alpha(u,\varphi)}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi' \searrow \varphi} \frac{G_\alpha(u,\varphi') - G_\alpha(u,\varphi)}{\varphi' - \varphi}.
\end{aligned}$$

Для вычисления производных рассмотрим разность

$$\frac{G_\alpha(u,\varphi') - G_\alpha(u,\varphi)}{\varphi' - \varphi} = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\mathsf{M}\left[\frac{(f(u,x) - \varphi')^+ - (f(u,x) - \varphi)^+}{\varphi' - \varphi}\right]. \tag{П.11}$$

При вычислении производной справа $\varphi' \searrow \varphi$, поэтому для $\varphi' > \varphi$ находим

$$\frac{(f(u,x) - \varphi')^+ - (f(u,x) - \varphi)^+}{\varphi' - \varphi} = \begin{cases} -1, & f(u,x) \geqslant \varphi, \\ 0, & f(u,x) \leqslant \varphi, \\ q(u,x,\varphi,\varphi'), & \varphi < f(u,x) < \varphi', \end{cases} \tag{П.12}$$

где $-1 < q(u,x,\varphi,\varphi') < 0$. Заметим, что $\mathcal{P}_\xi\{f(u,\xi) > \varphi'\} = 1 - P_{\varphi'}(u)$, а $\mathcal{P}_\xi\{\varphi < f(u,\xi) \leqslant \varphi'\} = P_{\varphi'}(u) - P_\varphi(u)$. А из теоремы о среднем следует, что существует функция $\rho(u,\varphi,\varphi')$ такая, что

$$\int\limits_{\varphi+0}^{\varphi'} q(u,x,\varphi,\varphi') d\mathcal{P}_\xi(x) = \rho(u,\varphi,\varphi')\mathcal{P}_\xi\{\varphi < f(u,\xi) \leqslant \varphi'\}.$$

Поэтому математическое ожидание от (П.12) при $\varphi' > \varphi$ имеет вид

$$\mathsf{M}\left[\frac{(f(u,x)-\varphi')^{+}-(f(u,x)-\varphi)^{+}}{\varphi'-\varphi}\right]=$$
$$=-(1-P_{\varphi}(u))+\rho(u,\varphi,\varphi')(P_{\varphi'}(u)-P_{\varphi}(u)).$$

Далее из непрерывности справа по φ функции вероятности (см. [1]) находим

$$\lim_{\varphi'\searrow\varphi}\mathsf{M}\left[\frac{f(u,x)-\varphi')^{+}-(f(u,x)-\varphi)^{+}}{\varphi'-\varphi}\right]=-(1-P_{\varphi}(u)).$$

Переходя к пределу при $\varphi' \searrow \varphi$ в формуле (П.11) выводим выражение для производной справа:

$$\frac{\partial^{+}G_{\alpha}(u,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{P_{\varphi}(u)-\alpha}{1-\alpha}.$$

Для вычисления производной слева, проводятся аналогичные рассуждения, меняя местами φ' и φ в (П.12), с тем лишь исключением, что непрерывности слева у функции вероятности может и не быть, и, значит, предел функции вероятности может и не совпадать со значением функции вероятности при $\varphi' \nearrow \varphi$. Для учета данной особенности, при вычислении математического ожидания используется то, что $\mathcal{P}_{\xi}\{f(u,\xi) \geqslant \varphi\} = 1 - P_{\varphi-0}(u)$ и $\mathcal{P}_{\xi}\{\varphi' < f(u,\xi) < \varphi\} = P_{\varphi-0}(u) - P_{\varphi'}(u)$. Аналогично проводя выкладки, находим предел слева

$$\lim_{\varphi'\nearrow\varphi}\mathsf{M}\left[\frac{f(u,x)-\varphi')^{+}-(f(u,x)-\varphi)^{+}}{\varphi'-\varphi}\right]=-(1-P_{\varphi+0}(u))$$

и производную слева

$$\frac{\partial^{-}G_{\alpha}(u,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{P_{\varphi-0}(u)-\alpha}{1-\alpha}.$$

Таким образом производные слева и справа имеют следующий вид:

$$\text{(П.13)}\qquad \frac{\partial^{-}G_{\alpha}(u,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{P_{\varphi-0}(u)-\alpha}{1-\alpha},\quad \frac{\partial^{+}G_{\alpha}(u,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{P_{\varphi}(u)-\alpha}{1-\alpha}.$$

Точками минимума выпуклой функции будут являться лишь те точки φ, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial G^{-}_{\alpha}(u,\varphi)}{\partial\varphi}\leqslant 0\leqslant\frac{\partial G^{+}_{\alpha}(u,\varphi)}{\partial\varphi}.$$

Но поскольку производные выпуклой функции монотонно не убывают и имеют вид (П.13), то минимум на рассматриваемом множестве достигается, причем в точках φ, удовлетворяющих соотношению $P_{\varphi-0}(u) \leqslant \alpha \leqslant P_{\varphi}(u)$. Наименьшей из таких точек является квантиль $\varphi_{\alpha}(u)$, которая принадлежит множеству $\{\vartheta_{\alpha} < \varphi\}$ для любого $u \in U$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kibzun A.I., Kan Yu.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester: John Wiley, 1996.
2. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.
3. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Сравнение критериев VaR и CVaR // АиТ. 2003. № 7. С. 153–165.
4. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-at-Risk // J. Risk 2000. № 2. P. 21–41.
5. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional Value-at-Risk for general loss distribution // J. Banking & Finance. 2002. № 26. P. 1443–1471.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 27.06.2003