V. G. Krotov, Unconditional convergence of Fourier series with respect to the Haar system in the spaces Λ_ω^p, *Mat. Zametki*, 1978, Volume 23, Issue 5, 685–695

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 23, № 5 (1978)

УДК 517.5

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА В ПРОСТРАНСТВАХ Λ_ω^p

В. Г. Кротов

Доказаны критерии базисности и безусловной базисности системы Хаара в пространствах

$$\Lambda_\omega^p = \{f \in L^p : \omega_p(\delta, f) = O\{\omega(\delta)\}\},$$

где $1 < p < \infty$ и ω — модуль непрерывности. Библ. 6 назв.

1. Пусть X — банахово пространство, $F = \{f_n\}$ — последовательность элементов из X и $E(X; F)$ — замкнутая линейная оболочка системы F в X.

Система F называется базисной в X, если для любого элемента $f \in E(X; F)$ существует, и притом единственный, ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$, сходящийся к f по норме в X, причем, если все такие ряды сходятся в X безусловно, то F — безусловная базисная система. Если $X = E(X; F)$ и F — базисная (безусловная базисная) система, то она называется базисом (соответственно безусловным базисом) в X.

Модулем непрерывности называется всякая непрерывная на $[0, 1]$ функция ω со свойствами

$$0 = \omega(0) \leqslant \omega(\delta) \leqslant \omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta)$$

при всех $0 \leqslant \delta \leqslant \delta + \eta \leqslant 1$.

Модулем непрерывности функции $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, называется величина

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt\right\}^{1/p},$$

где $0 < \delta \leqslant 1$.

Классы Λ_ω^p и λ_ω^p определяются для любого модуля непрерывности ω и любого числа $1 \leqslant p < \infty$ следующим образом:

$$\Lambda_\omega^p = \{f \in L^p : \omega_p(\delta, f) = O\{\omega(\delta)\}\},$$

$$\lambda_\omega^p = \{f \in \Lambda_\omega^p : \omega_p(\delta, f) = o\{\omega(\delta)\}\}.$$

Легко убедиться в том, что Λ_ω^p — банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \|f\|_{p,\omega}^*,$$

где $\|f\|_p$ — обычная норма f в L^p, а

$$\|f\|_{p,\omega}^* = \sup_{0<h\leqslant 1} (\omega_p(h, f)/\omega(h)).$$

При этом λ_ω^p — замкнутое подпространство в Λ_ω^p.

Целью настоящей работы является описание тех пространств Λ_ω^p, в которых система Хаара $\chi = \{\chi_n\}$ является базисной или безусловной базисной.

2. Сформулируем некоторые известные свойства системы Хаара, которые будут использованы нами в дальнейшем. Через $S_N f \equiv S_N$ мы обозначаем частные суммы Фурье функции $f \in L^1$ $(N = 1, 2, \ldots)$ по системе Хаара. Обозначим также

$$I_{k,i} \equiv ((i-1)\,2^{-k},\ i2^{-k})$$

при $k = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, 2^k$.

ЛЕММА 1. *Если функция $f \in L^1$, то*

$$S_{2^k}(t) \equiv 2^k \int_{I_{k,i}} f(t)\,dt$$

при $t \in I_{k,i}$ $(i = 1, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, \ldots)$.

ЛЕММА 2. *Если функция $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, то*

$$\|S_N f\|_p \leqslant \|f\|_p$$

при $N = 1, 2, \ldots$

ЛЕММА 3. *Если $\{a_n\}$ — любой набор чисел и $|\lambda_n| \leqslant 1$, то*

$$\Big\|\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \chi_n\Big\|_p \leqslant A_p \Big\|\sum_{n=1}^N a_n \chi_n\Big\|_p,$$

где $1 < p < \infty$, $N = 1, 2, \ldots$ и A_p — постоянная, зависящая только от p.

ЛЕММА 4. *Если* $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, *то*

$$A_p^{(k)}(f) \equiv \{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |(f, \chi_n)|^p\}^{1/p} \leqslant 8 \cdot 2^{k(1/p-1/2)} \omega_p(2^{-k}, f),$$

где $k = 0, 1, \ldots$

ЛЕММА 5. *Если* $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, *то при* $N = 1, 2, \ldots$

$$\| f - S_N f \|_p \leqslant 3\omega_p (1/N, f).$$

ЛЕММА 6. *Если* $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, *то при* $n = 0, 1, \ldots$

$$\omega_p(2^{-n}, f) \leqslant 16 \cdot 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} \| f - S_{2^k} f \|_p.$$

ЛЕММА 7. *Для любого полинома* H_{2^n} *по системе Хаара и любого* $0 < h \leqslant 2^{-n}$

$$\omega_p (h, H_{2^n}) = (h2^n)^{1/p} \omega_p (2^{-n}, H_{2^n}) \qquad (0 < p < \infty)$$

(2^n — *порядок полинома* H_{2^n}).

Лемма 1 принадлежит Хаару [1], лемму 2 установил Шаудер [2], лемма 3 является следствием неравенства Пэли — Марцинкевича [3], леммы 4 и 5 получены П. Л. Ульяновым [4], лемма 6 доказана Б. И. Голубовым [5], лемма 7 имеется в [6] (по поводу леммы 5 см. также [6]).

Если модуль непрерывности ω не удовлетворяет условию

$$\omega (\delta) \geqslant C_1 \delta^{1/p} \qquad (0 < \delta \leqslant 1), \tag{1}$$

то при $n \geqslant 2$ нормы $\| \chi_n \|^*_{p, \omega} = \infty$, поэтому всюду ниже считаем условие (1) выполненным, не оговоривая этого особо.

3. ТЕОРЕМА 1. *Пусть* ω — *модуль непрерывности и* $1 \leqslant p < \infty$. *Система Хаара является базисной в пространстве* Λ_ω^p *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

(*) *существует постоянная* $C_2 = C_2 (p, \omega) > 0$ *такая, что*

$$\delta^{-1/p} \omega (\delta) \leqslant C_2 \eta^{-1/p} \omega (\eta) \tag{2}$$

при всех $0 < \eta \leqslant \delta \leqslant 1$.

Доказательство. Достаточность. Зафиксируем сначала $n \geqslant 1$ и, используя лемму 1 и неравенство Гельдера, получим

$$\int_0^{1-2^{-n}} | S_{2^n}(t+2^{-n}) - S_{2^n}(t) |^p \, dt =$$

$$= 2^{n(p-1)} \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_{I_{n,i}} [f(t+2^{-n}) - f(t)] \, dt \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n(p-1)} \sum_{i=1}^{2^n-1} \left\{ \left[\int_{I_{n,i}} dt \right]^{1-1/p} \left[\int_{I_{n,i}} | f(t+2^{-n}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(t) |^p \, dt \right]^{1/p} \right\}^p \leqslant \omega_p^p(2^{-n}, f). \qquad (3)$$

Отсюда и из леммы 7 вытекает, что при $0 < h \leqslant 2^{-n}$

$$\omega_p(h, S_{2^n} f) \leqslant (h2^n)^{1/p} \omega_p(2^{-n}, f) \leqslant C_2 \| f \|_{p,\omega}^{*} \omega(h)$$

(см. условие ($*$)). Если $2^{-n} < h \leqslant 1$, то надо применить лемму 5:

$$\omega_p(h, S_{2^n} f) \leqslant \omega_p(h, f) + \omega_p(h, f - S_{2^n} f) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_p(h, f) + 6\omega_p(2^{-n}, f) \leqslant 7\omega_p(h, f).$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\omega_p(h, S_{2^n} f) \leqslant C_3 \| f \|_{p,\omega}^{*} \omega(h), \qquad (4)$$

где можно взять $C_3 = \max\{7, C_2\}$.

Пусть теперь N — произвольное натуральное число, $2^{n-1} < N \leqslant 2^n$ $(n \geqslant 1)$. Если $1/(2N) < h \leqslant 1$, то в силу леммы 5

$$\omega_p(h, S_N f) \leqslant \omega_p(h, f) + 2 \| f - S_N f \|_p \leqslant 13\omega_p(h, f).$$

Если же $0 < h < 1/(2N)$, то

$$\omega_p(h, S_N f) \leqslant \omega_p(h, S_{2^n}) + \omega_p(h, S_{2^n}(f - S_N f)) \leqslant$$
$$\leqslant (h2^n)^{1/p} [\omega_p(2^{-n}, S_{2^n} f) + \omega_p(2^{-n}, S_{2^n}(f - S_N f))] \leqslant$$
$$\leqslant (h2^n)^{1/p} [\omega_p(2^{-n}, f) + \omega_p(2^{-n}, f - S_N f)] \leqslant$$
$$\leqslant (h2^n)^{1/p} (\omega_p(2^{-n}, f) + 6\omega_p(1/N, f)) \leqslant 13\, C_2 \| f \|_{p,\omega}^{*} \omega(h).$$

Здесь были использованы леммы 7 и 5, а также соотношения (2) и (3). Итак,

$$\omega_p(h, S_N f) \leqslant 13 C_2 \| f \|_{p,\omega}^{*} \omega(h) \qquad (N \geqslant 1,\ h \in (0, 1]),$$

и достаточность доказана.

Необходимость. Рассмотрим вспомогательную последовательность функций

$$f_n(t) = \begin{cases} \omega(2^{-n} - t) & \text{при} \quad t \in (0, 2^{-n}), \\ 0 & \text{при} \quad t \in]2^{-n}, 1]. \end{cases}$$

Подсчитаем нормы $\| f_n \|^*_{p,\omega}$, предполагая, что ω — выпуклый модуль непрерывности (это не ограничивает общности в силу известной леммы Стечкина). Если $0 < h \leqslant 2^{-n}$, то

$$\int_0^{2^{-n}-h} | f_n(t+h) - f_n(t) |^p \, dt \leqslant 2^{-n} \omega^p(h).$$

Поэтому

$$\omega_p(h, f_n) \leqslant 2^{-n/p} \omega(h) \qquad (n \geqslant 1, \;\; 0 < h \leqslant 2^{-n}).$$

Если же $2^{-n} < h \leqslant 1$, то

$$\int_0^{1-h} | f_n(t+h) - f_n(t) |^p \, dt = \int_0^{2^{-n}} \omega^p(t) \, dt \leqslant 2^{-n} \omega^p(2^{-n}).$$

Следовательно, учитывая предыдущее неравенство, получаем

$$\| f_n \|^*_{p,\omega} \leqslant 2^{-n/p} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу леммы 1

$$S_{2^n} f_n = \begin{cases} 2^n \int_0^{2^{-n}} \omega(t) \, dt, & t \in (0, 2^{-n}] \\ 0, & t \in (2^{-n}, 1] \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а тогда

$$\omega_p(2^{-n}, S_{2^n} f_n) \geqslant \left\{ \int_0^{2^n} \left| 2^n \int_0^{2^{-n}} \omega(t) \, dt \right|^p d\tau \right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant (1/4) \, 2^{-n/p} \omega(2^{-n}).$$

Это неравенство вместе с оценкой для $\| f_n \|^*_{p,\omega}$ означает, что

$$\frac{\| S_{2^n} f_n \|^*_{p,\omega}}{\| f_n \|^*_{p,\omega}} \geqslant \frac{1}{4} 2^{n/p} \omega(2^{-n}) \sup_{0 < h \leqslant 2^{-n}} \frac{h^{1/p}}{\omega(h)} \qquad (n \geqslant 1)$$

(см. лемму 7). Если теперь предположить, что условие (*) не выполнено, то правая часть этого неравенства неограничена, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \| S_{2^n} \|^* = \infty$ и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть ω — модуль непрерывности и $1 < p < \infty$. Система Хаара является безусловной* *базисной в пространстве Λ_ω^p тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (*) *и*

(**) *существует постоянная $C_3 = C_3(p, \omega) > 0$ такая, что*

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} \omega(2^{-k}) \leqslant C_3 2^{n/p} \omega(2^{-n}). \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть функция $f \in \Lambda_\omega^p$ и $\{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность нулей и единиц. В силу леммы 3 функция

$$f^\lambda \overset{L_p}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, \chi_n) \chi_n$$

принадлежит L^p, а применение лемм 6, 3 и 5 дает следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&\omega_p(2^{-n}, f^\lambda) \leqslant \\
&\leqslant 16 \cdot 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} \Big\| \sum_{n=2^k+1}^{\infty} \lambda_n (f, \chi_n) \chi_n \Big\|_p \leqslant \\
&\leqslant 16 A_p 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} \Big\| \sum_{n=2^k+1}^{\infty} (f, \chi_n) \chi_n \Big\|_p \leqslant \\
&\leqslant 48 A_p 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} \omega_p(2^{-k}, f) \leqslant \\
&\leqslant 48 A_p \| f \|_{p,\omega}^{*} 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} \omega(2^{-k}) \leqslant \\
&\leqslant 48 A_p C_3 \| f \|_{p,\omega}^{*} \omega(2^{-n}).
\end{aligned}$$

Отсюда легко следует, что

$$\| f^\lambda \|_{p,\omega}^{*} \leqslant 96 A_p C_3 \| f \|_{p,\omega}^{*}. \tag{6}$$

Если $f \in E(\Lambda_\omega^p, \chi)$, то ряд

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \chi_n) \chi_n \tag{7}$$

сходится по норме $\| \cdot \|_{p,\omega}^{*}$ (по теореме 1), а из (6) вытекает сходимость по этой норме любого частичного ряда (7). По теореме Орлича ряд (7) сходится в Λ_ω^p безусловно.

Необходимость. Необходимость условия (*) очевидна в силу теоремы 1, поэтому считаем это условие выполненным. Пусть

$$B_n = 2^{n/p} \omega(2^{-n}) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

и предположим, что условие (**) не выполнено. Тогда последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k \neq O(B_n), \tag{8}$$

$$B_k \leqslant C_1 B_n \qquad (0 \leqslant k \leqslant n < \infty). \tag{9}$$

Покажем сначала, что для любых натуральных чисел l и m можно указать такое натуральное $n > m$, что

$$lB_{n+l} \leqslant 2C_1 \sum_{k=n}^{n+l-1} B_k, \tag{10}$$

$$\sum_{k=n}^{n+l-1} B_k^p \leqslant (2C_1)^p \, l B_n^p. \tag{11}$$

Для этого установим существование натуральных чисел $s > [m/l] + 1$ и $0 \leqslant r \leqslant l - 1$, удовлетворяющих условию

$$B_{r+(s+1)l} \leqslant 2B_{r+sl}. \tag{12}$$

Если предположить противное, то, взяв призвольно $n = r + sl$ $(s \geqslant [m/l] + 1,\ 0 \leqslant r \leqslant l - 1)$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} B_k = \sum_{k=0}^{[m/l]} B_k + \sum_{\mu=0}^{r-1} B_{\mu+sl} + \\ + \sum_{\nu=[m/l]+1}^{s-1} \sum_{\mu=0}^{l-1} B_{\mu+\nu l} \leqslant C_1 [m/l] B_n + C_1 l B_n + \\ + C_1 B_n \sum_{\mu=0}^{l-1} \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{\nu-s+1} = O(B_n),$$

а это противоречит (8). Определив нужные числа s и r, положим $n = r + sl$. Тогда (10) следует из (9) и (12):

$$B_{n+l} \leqslant 2C_1 B_{n+i} \qquad (i = 0, \ldots, l-1);$$

аналогично получаем (11).

Зафиксируем теперь число α так, чтобы

$$1/p < \alpha < 1, \tag{13}$$

и целое число β выберем так, чтобы

$$\beta(\alpha p - 1) > 1 \tag{14}$$

(это возможно в силу (13)).

Используя доказанное выше утверждение, по индукции строим последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$

со свойствами

$$n_\nu > n_{\nu-1} + (\nu - 1)^\beta, \tag{15}$$

$$\nu^\beta B_{n_\nu+\nu^\beta} \leqslant 2C_1 \sum_{k=n_\nu}^{n_\nu+\nu^\beta-1} B_k, \tag{16}$$

$$\sum_{k=n_\nu}^{n_\nu+\nu^\beta-1} B_k^p \leqslant (2C_1)^p \nu^\beta B_n^p, \tag{17}$$

где $n_0 = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Для этого надо на ν-м шаге брать $l = \nu^\beta$ и $m = n_{\nu-1} + (\nu - 1)^\beta$.

Определим вспомогательную последовательность $\{a_n\}$ следующим образом. Пусть при $\nu = 1, 2, \ldots$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{при } n_{\nu-1} + (\nu-1)^\beta \leqslant k < n_\nu, \\ \nu^{-\alpha\beta}\,[\omega(2^{-k}) - \omega(2^{-(k+1)})] & \text{при } n_\nu \leqslant k \leqslant n_\nu + \nu^\beta. \end{cases}$$

Тогда $\{a_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$a_k = O(\omega(2^{-k})), \tag{18}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(\omega(2^{-k})), \tag{19}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_k^p = O(2^n \omega^p(2^{-n})), \tag{20}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/p} a_k \neq O(2^{n/p}\,\omega(2^{-n})). \tag{21}$$

Действительно, (18) и (19) очевидны. Для доказательства (20) используем (17):

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_k^p \leqslant \sum_{k=0}^{n_\nu+\nu^\beta} 2^k a_k^p \leqslant \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{k=n_\mu}^{n_\mu+\mu^\beta-1} 2^k \mu^{-\alpha\beta p}\,\omega^p(2^{-k}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^{-\alpha\beta p} \sum_{k=n_\mu}^{n_\mu+\mu^\beta-1} B_k^p \leqslant (2C_1)^p \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^{\beta(1-\alpha p)} B_{n_\mu}^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^p C_1^{2p} B_{n_\nu}^p \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\beta(1-\alpha p)} = O(2^n \omega^p(2^{-n}))$$

согласно (14) (здесь ν выбрано так, что $n_\nu < n \leqslant n_{\nu+1}$). Осталось доказать (21):

$$\sum_{k=n_\nu}^{n_\nu+\nu^\beta-1} 2^{k/p} a_k \geqslant \sum_{k=n_\nu}^{n_\nu+\nu^\beta-1} 2^{k/p} \nu^{-\alpha\beta}\,[\omega(2^{-k}) - \omega(2^{-(k+1)})] \geqslant$$

$$\geqslant (1 - 2^{-1/p}) \sum_{k=n_\nu}^{n_\nu+\nu^\beta-1} \nu^{-\alpha\beta} B_k + 2^{(n_\nu-1)/p} \nu^{-\alpha\beta}\,\omega(2^{-n_\nu}) -$$

$$- 2^{(n_\nu+\nu^\beta-1)/p} \nu^{-\alpha\beta}\,\omega(2^{-n_\nu-\nu^\beta}).$$

Последние два слагаемых имеют порядок $o(B_{n_\nu+\nu^\beta})$, первое надо оценивать с помощью (16):

$$\sum_{k=n_\nu}^{n_\nu+\nu^\beta-1} 2^{k/p} a_k \geqslant (1-2^{-1/p})(2C_1)^{-1} B_{n_\nu+\nu^\beta}\, \nu^{\beta(1-\alpha)} + o(B_{n_\nu+\nu^\beta}),$$

и (21) следует из (13).

Используя (18) — (21), покажем, что полиномы

$$H_N \equiv \sum_{k=1}^{n_N+N^\beta-1} 2^{k(1/p-1/2)} a_k \chi_{m_k},$$

где $m_k = 3\cdot 2^{k-1}+1$ $(k=1, 2 \ldots)$, удовлетворяют условию

$$\varlimsup_{N\to\infty} \| H_N \|_{p,\omega}^* = \infty. \tag{22}$$

Легко видеть, что

$$2^{-k/2}\Delta_h \chi_{m_k}(t) = \\ = \begin{cases} -2, & t \in (1/2+2^{-(k+1)}-h,\ 1/2+2^{-(k+1)}), \\ 1, & t \in (1/2-h,\ 1/2) \cup (1/2+2^{-k}-h,\ 1/2+2^{-k}), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{23}$$

Для произвольного $h \in (0, 1)$ найдем номер n так, что $2^{-(n+1)} < h \leqslant 2^{-n}$, и оценим интеграл

$$\int_0^{1-h} \left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k(1/p-1/2)} a_k \Delta_h \chi_{m_k}(t) \right|^p dt = \\ = \int_{1/2-h}^{1/2} + \int_{1/2}^{1/2+2^{-n}} + \int_{1/2+2^{-n}}^{5/8} + \int_{5/8}^{1-h} \equiv \sum_{j=1}^4 J_j.$$

В силу (21) и (23)

$$J_1 = h\left(\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k/p} a_k\right)^p \neq O(\omega^p(2^{-n}));$$

из (23) и (18) следует

$$J_2 = h\,|(-2)\cdot 2^{(n-1)/p} a_{n-1}|^p = O(\omega^p(2^{-n}));$$

применяя (23) и (20), получаем

$$J_3 = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{1/2+2^{-(k+1)}}^{1/2+2^{-(k+1)}-h} |2^{k/p} a_k - 2\cdot 2^{(k-1)/p} a_{k-1}|^p dt = \\ = h\sum_{k=2}^{n-1} |2^{k/p} a_k - 2^{1-1/p} 2^{k/p} a_{k-1}|^p \leqslant \\ \leqslant 3\cdot 2^{-n} \sum_{k=2}^{n-1} 2^k a_k^p = O(\omega^p(2^{-n}));$$

наконец, очевидно, что $J_4 = O(2^{-n}) = O(\omega^p(2^{-n}))$.

Таким образом,

$$\omega_p \left(h, \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k(1/p-1/2)} a_k \chi_{m_k}\right) \neq O(\omega(h)),$$

а с другой стороны, согласно (19) имеем

$$\omega_p \left(h, \sum_{k=n}^{h_N+N^\beta-1} 2^{k(1/p-1/2)} a_k \chi_{m_k}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} 2^{k(1/p-1/2)} a_k \| \chi_{m_k} \|_p = O(\omega(h)).$$

Из последних двух соотношений следует (22).

Выберем теперь знаки $\lambda_k = \pm 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k/p} \lambda_k a_k \right| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} 2^{k/p} a_k \leqslant C_1 2^{n/p} \omega(2^{-n}).$$

Тогда, повторяя проведенные только что рассуждения, мы получим

$$\omega_p(h, H_N^\lambda) = O(\omega(h)),$$

где O не зависит от h и N. Это соотношение вместе с (22) означает

$$\sup_{|\lambda_k|=1} \sup_{\|H\|_{p,\omega}^* \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \chi_k \right\|_{p,\omega}^* = \infty,$$

и теорема доказана полностью.

В связи с теоремами 1 и 2 возникает вопрос об описании линейных оболочек $E(\Lambda_\omega^p, \chi)$.

Справедливы следующие утверждения:

а) если выполнено (*), то $\lambda_\omega^p \subset E(\Lambda_\omega^p, \chi)$;

б) если

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^{-1/p} \omega(\delta) = \infty, \tag{24}$$

то $E(\Lambda_\omega^p, \chi) \subset \lambda_\omega^p$.

Первое из них доказывается, как и теорема 1 (достаточность), а второе вытекает из того, что при условии (24) функции Хаара $\chi_n \in \lambda_\omega^p$ и λ_ω^p — замкнутое подпространство в Λ_ω^p. В частности, справедлива

ЛЕММА 8. *Если выполнены условия* (*) *и* (24), *то*

$$E(\Lambda_\omega^p, \chi) = \lambda_\omega^p.$$

Единственным (по порядку) модулем непрерывности, не удовлетворяющим условию (24) (при соблюдении (*)), является $\omega(\delta) = \delta^{1/p}$. В этом случае точного описания $E(\Lambda_\omega^p, \chi)$ получить не удается.

Из теорем 1, 2 и леммы (8) вытекают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Система Хаара является базисом пространства* λ_ω^p, $1 < p \leqslant \infty$, *тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (*) *и* (24).

ТЕОРЕМА 4. *Система Хаара является безусловным базисом пространства* λ_ω^p, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (*) *и* (**).

Одесский государственный
университет

Поступило
10.II.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Haar A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systeme, Math. Ann., 69 (1910), 331—371.
[2] Schauder J., Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonal-systems, Math, Z., 28 (1928), 317—320.
[3] Marcinkiewicz J., Quelques theorems sur les series orthogonales, Ann. polon. math., 16 (1937), 85—96.
[4] Ульянов П. Л., О рядах по системе Хаара, Матем. сб., 63, № 3 (1964), 356—391.
[5] Голубов Б. И., Наилучшие приближения в метрике L^p полиномами Хаара и Уолша, Матем. сб., 87, № 2 (1972), 254—274.
[6] Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П., Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p, $0 < p < 1$, Матем. сб., 98, № 3 (1975), 395—415.