И. С. Гуцул, Об одной серии компактных трехмерных многообразий постоянной отрицательной кривизны, *Докл. АН СССР*, 1979, том 248, номер 2, 283–286

И.С. ГУЦУЛ

ОБ ОДНОЙ СЕРИИ КОМПАКТНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком С.М. Никольским 16 I 1979)

В работе ([1]) указано одиннадцать компактных многообразий постоянной отрицательной кривизны, полученных с помощью ЭВМ отождествлением граней правильных многогранников пространства Лобачевского. В это число вошло и известное до ([1]) многообразие Зейферта – Вебера ([2]). В данной работе строится пример бесконечной серии попарно негомеоморфных таких многообразий.

Для построения такой серии многообразий нам понадобится бесконечная серия многогранников, каждый из которых разбивает пространство Лобачевского нормально и правильно. Серии таких многогранников найдены в ([3]).

В связи с важностью для дальнейшего изложения мы здесь воспроизводим построение одной из серий разбиений ([3]). Пусть ω – некоторая плоскость в пространстве Лобачевского; рассмотрим ее нормальное разбиение на равные правильные n-угольники, такое разбиение, как известно ([4]), возможно для любого n. В рассматриваемом нами построении важен случай, когда число многоугольников, сходящихся в вершине, равно четырем, а число сторон многоугольника $n = 2^k \cdot 3$, $k = 2, 3, \ldots$

Пусть имеется одно из таких разбиений плоскости ω. Восставим к этой плоскости перпендикуляры во всех вершинах этих многоугольников. Отложим на них по обе стороны от плоскости ω отрезки длины h и возьмем выпуклую оболочку концов этих отрезков. В ([3]) показано, что h можно выбрать такой длины, что двугранные углы полученного бесконечного многогранника ("линзы") равны $2\pi/3$. Этот многогранник естественным образом распадается на бесконечное число конечных прямых призм, смежных своими боковыми гранями. Боковые двугранные углы этих призм прямые, а двугранные углы при основаниях равны $\pi/3$. С помощью теорем 1 и 2 из ([5]) можно показать, что полученные призмы разбивают пространство Лобачевского нормально и правильно.

Теперь для получения серии компактных многообразий постоянной отрицательной кривизны докажем, что для каждой призмы из серии разбиений существует некоторое отождествление граней призмы, после проведения которого мы получаем компактное трехмерное многообразие постоянной отрицательной кривизны, причем многообразия, получаемые из различных призм, негомеоморфны. Иными словами, для каждой из призм будет указана группа без кручений, фундаментальный многогранник которой – призма разбиения.

Рассмотрим какую-либо призму из указанной серии. Любую боковую грань призмы можно отобразить в любую другую ее боковую грань поворотом v вокруг оси U, проходящей через центры оснований призмы, на угол $\varphi = 2\pi/(3 \cdot 2^k)$, причем $k = 2, 3, \ldots$ (k фиксировано для данной конкретной призмы).

Пусть k – произвольное фиксированное натуральное число, большее единицы. Рассмотрим призму с $3 \cdot 2^k$ боковыми гранями. Нижнее основание призмы отождествим с верхним основанием винтовым движением с осью U и углом поворота $\psi = \pi/3$.

Зафиксируем какую-либо боковую грань призмы и отождествим ее с противоположной боковой гранью винтовым движением с углом поворота $\alpha = \pi$ и осью U_1, проходящей через центры этих граней. Назовем это винтовое движение основным, а его ось U_1 – осью основного винтового движения. Грани призмы, полученные из граней, отождествляемых основным винтовым движением поворотом вокруг оси U на любой угол, кратный $\beta = 2\pi/2^k$, отождествим также винтовым движением с углом поворота $\alpha = \pi$ и осью, проходящей через центры граней. Легко видеть, что оси всех таких винтовых движений пересекаются в одной точке (центре призмы), перпендикулярны к прямой U (оси призмы) и к соответствующим парам граней.

Основное движение и те винтовые движения, оси которых образуют с осью U_1 углы, кратные $\gamma = 4\pi/2^k$, назовем нечетными, а остальные винтовые движения назовем четными. Боковые грани, отождествляемые четными винтовыми движениями, назовем гранями четных винтовых движений, а боковые грани, отождествляемые нечетными винтовыми движениями, назовем гранями нечетных винтовых движений. Оставшиеся неотождествленными боковые грани призмы разделим на четные грани–смежные с гранями четных винтовых движений и нечетные – смежные с гранями нечетных винтовых движений.

Лемма 1. *При повороте v на угол $\psi = \pi/3$ вокруг прямой U грани четных винтовых движений переходят в нечетные грани, а грани нечетных винтовых движений переходят в четные грани.*

Доказательство. Пусть A – боковая грань, отождествляемая каким-либо (четным или нечетным) винтовым движением с гранью B, и пусть при поороте v A и B перейдут соответственно в грани A' и B'.

Покажем, что A' не является гранью какого-либо (четного или нечетного) винтового движения. Допустим противное: пусть U' – ось винтового движения, переводящего A'в B'; но угол между двумя осями винтовых движений кратен углу $\beta = 2\pi/2^k$; тогда $\pi/3 = m \cdot 2\pi/2^k$, где m – целое положительное число. Отсюда $m = 2^k/6$ – противоречие с тем, что m целое. Значит, грани A' и B' не отождествляются винтовым движением.

Пусть A – грань четного винтового движения. Покажем, что A' – нечетная грань. Предположим противное: A'– четная грань. Поскольку угол между осями двух винтовых движений одинаковой четности кратен $\gamma = 4\pi/2^k$, то при нашем предположении мы имели бы либо $m \cdot 4\pi/2^k + 2\pi/(3 \cdot 2^k) = \pi/3$, либо $m \cdot 4\pi/2^k - 2\pi/(3 \cdot 2^k) = \pi/3$, где m – целое положительное число. Отсюда либо $m = (2^k + 2)/12$, либо $m = (2^k - 2)/12$.

В обоих случаях это противоречит тому, что m целое, а, значит, A' – нечетная грань. Если A – грань нечетного винтового движения, то подобным же образом доказывается, что A'– четная грань. Аналогичное свойство можно доказать и для грани B. Таким образом, при повороте v на угол $\psi = \pi/3$ вокруг оси U грани нечетных винтовых движений перейдут в четные грани, а грани четных винтовых движений – в нечетные. Лемма доказана.

Проведем через оси U и U_1 плоскость ω_1. Кроме того, через ось U проведем плоскость ω_2, перпендикулярную плоскости ω_1.

Лемма 2. *При отражении от плоскостей ω_1 и ω_2 призма переходит в себя и, кроме того, переходят в себя следующие множества: множество граней четных винтовых движений, множество четных граней, множество граней нечетных винтовых движений, множество нечетных граней.*

Доказательство леммы опустим. Оно легко следует из соображений симметрии.

Теперь каждую четную грань отождествим с четной гранью, симметричной ей относительно плоскости ω_1, сдвигом, а каждую нечетную грань отождествим тоже сдвигом с нечетной, симметричной ей относительно плоскости ω_2. Таким образом мы получили распределение всех граней призмы на пары конгруэнтных.

Легко показать, что призма с таким распределением граней на пары конгруэнтных удовлетворяет условиям теоремы 1 из ([1]) и поэтому множество всех движений, переводящих конгруэнтные грани одна в другую, является системой образующих некоторой федоровской группы Г пространства Лобачевского, а сама призма – фундаментальный многогранник группы Г.

Теорема. Г – *группа без кручений.*

Доказательство. Распределение граней призмы в пары конгруэнтных по группе Г индуцирует распределение множества ребер призмы на классы конгруэнтности. Ребра, входящие в один класс конгруэнтности, образуют цикл; согласно (1) сумма двугранных углов при ребрах одного цикла равна $2\pi/l$, где l – натуральное; если $l = 1$, то цикл называется несущественным; если все циклы несущественны, то Г – группа без кручения.

Покажем, что все циклы несущественны. У призмы имеются два вида ребер: пересечения пар боковых граней (двугранные углы при таких ребрах равны $\pi/2$) и пересечения боковых граней призмы с ее основаниями (двугранные углы при этих ребрах равны $\pi/3$). Первый вид ребер мы называем боковыми, а второй – ребрами при основаниях.

Боковые ребра могут быть трех сортов: первого – ребро пересечения грани нечетного винтового движения и нечетной грани; второго – ребро пересечения грани четного винтового движения и четной грани; третьего – ребро пересечения четной и нечетной граней.

Пусть a – боковое ребро первого сорта, тогда нечетным винтовым движением его можно перевести в ребро b того же сорта. Сдвигами, отождествляющими нечетные грани, ребра a и b можно совместить соответственно с ребрами c и d, симметричными им относительно плоскости ω_2. По лемме 2 ось нечетного винтового движения, переводящего ребро a в ребро b, симметрична относительно плоскости ω_2 оси некоторого нечетного винтового движения, и это винтовое движение переводит ребро c в ребро d, т.е. цикл состоит из четырех ребер. Так как двугранные углы при этих ребрах равны $\pi/2$, то цикл несущественный. В виду произвольности ребра d первого сорта имеем, что циклы ребер первого сорта несущественны.

Аналогично легко показать, что циклы ребер второго и третьего сортов также несущественны. Итак, все циклы, в которые входят боковые ребра, несущественны.

Пусть a – ребро пересечения грани нечетного винтового движения и одного из оснований, тогда винтовым движением, отождествляющим боковые грани, оно переведется в b – ребро пересечения другого основания и грани нечетного винтового движения. Взаимно обратными винтовыми движениями ω и ω^{-1}, отождествляющими основания призмы, ребра a и b переведутся соответственно в ребра c и d пересечения оснований с четными боковыми гранями (на основании леммы 1). Заметим, что боковые грани, содержащие ребра c и d, переводятся одна в другую поворотами на угол $\pm\pi/3$ вокруг оси U. Сдвигами, отождествляющими четные боковые грани, ребра c и d переведутся в ребра s и p, которые из соображений симметрии переводятся друг в друга винтовыми движениями ω и ω^{-1}, отождествляющими основания призмы. Таким образом, цикл содержит шесть ребер и, так как двугранные углы при ребрах такого вида равны $\pi/3$, цикл несущественный. Поскольку a – ребро пересечения грани произвольного нечетного винтового движения и одного из оснований, то все циклы, в которые входят указанные выше ребра, несущественны.

Заметим, что в циклы этого вида входят только по два (центральносимметричных) ребра, которые являются пересечениями оснований и граней нечетных винтовых движений, поэтому таких циклов будет столько же, сколько граней нечетных винтовых движений, т.е. число таких циклов равно $2^k/2$. Аналогично можно показать, что циклы, в которые входят ребра пересечения какой-либо грани четного винтового движения и одного из оснований, несущественны и таких циклов будет ровно $2^k/2$.

Ребер при основаниях насчитывается всего $2 \cdot 3 \cdot 2^k$, а количество циклов, которые получены нами, будет 2^k, и так как в каждый цикл входит шесть ребер, то все ребра при основаниях входят в несущественные циклы.

Итак, мы показали, что все ребра призмы образуют только несущественные циклы. Поэтому Γ – группа без кручений. Теорема доказана.

Если мы проведем "склейку" отождествленных граней призмы, то получим компактное многообразие M постоянной отрицательной кривизны, фундаментальная группа которого изоморфна группе Γ.

Поскольку k предполагалось фиксированным, но произвольным, то теорема верна для любой призмы описанного ранее вида.

Группы, полученные нами, попарно неизоморфны ввиду неравенства объемов двух различных призм и теоремы жесткости для многообразий постоянной отрицательной кривизны. Поэтому многообразия, полученные из указанных призм, попарно негомеоморфны.

Кишиневский государственный
университет

Поступило
20 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *L.A. Best,* Canad. J. Math., v. 23, 3, 456 (1971). [2] *C. Weber, H. Seifert,* Math. Zs., B. 37, 23 (1933). [3] *В.С. Макаров,* ДАН, т. 161, № 2, 277 (1965). [4] *М.М. Мордухай-Болтовской,* Уч. зап. Н.-и. ин-та матем. и физ. Рост.-Дон. гос. ун-та, № 2, 35 (1938). [5] *А.Д. Александров,* Вестн. ЛГУ, № 2, 33 (1954).

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

Г.А. ДЖАНАШИЯ, Т.С. ОЗИАШВИЛИ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ КОЛЕЦ ФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 24 III 1979)

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть R – симметричное регулярное нормированное кольцо, элементами которого являются комплекснозначные функции, непрерывные на единичной окружности. Допустим, что для R выполнены два условия:*

(а) *существует функция $g_0 \in R$, взаимно однозначно отображающая единичную окружность на себя;*

(б) *R представимо в виде прямой суммы*

(1) $\quad R = R^+ \oplus R^-,$

где R^+ и R^- – замкнутые подкольца кольца R, в каждом из которых существует элемент, имеющий обратный в R, причем выполнено условие ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} f^+ \overline{f^-} d\theta = 0, \qquad f^+ \in R^+, \qquad f^- \in R^-.$$

Тогда одно из колец R^+, R^- состоит из функций, аналитически продолжимых на внутреннюю часть единичного круга, а другое – из функций, аналитически продолжимых на внешнюю часть единичного круга.