1997. Т. 33, № 5, С. 602 — 605

УДК 517.926

О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЯ

И. А. Волков

Рассмотрим квазилинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in G_f \subset \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

заданную в прямом произведении $[0,+\infty) \times G_f$ временной полуоси и открытой области G_f, содержащей начало координат. Матрица $A(\cdot)\colon\ [0,+\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ существенно ограничена и измерима на временной полуоси, а вектор-функция $f(\cdot,\cdot)\colon [0,+\infty) \times G_f \to \mathbb{R}^n$ является возмущением высшего порядка малости $m > 1$ по зависимой переменной x, т.е. $\|f(t,x)\| \leq C_f\|x\|^m$, $m \in \mathbb{R}$, $m = \mathrm{fix} > 1$, $C_f = \mathrm{const}$. Пусть, кроме того, $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по $x \in G_f$ с интегрируемой по Лебегу на каждом отрезке функцией переменной $t \geq 0$. Согласно теореме Каратеодори, это обеспечивает единственность решений системы (1). Возмущения, удовлетворяющие приведенным условиям, обычно называются m-возмущениями [1]. Класс таких возмущений обозначим F_n^m.

Пусть система первого приближения

$$\dot{y} = A(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad n \geq 2, \tag{2}$$

обладает следующим свойством: для любого $f \in F_n^m$ существует окрестность нуля G_f такая, что верхний показатель Боля любого решения, выходящего из этой окрестности, отрицателен. Класс всех таких систем будем обозначать $\mathcal{B}_n$ и, отождествляя систему (2) с ее матрицей $A(t)$, писать $A \in \mathcal{B}_n$. Легко видеть, что этот класс не пуст.

Через $x(t,x_0)$ обозначим решение системы (1) с начальным вектором $x_0 = x(0,x_0)$.

Нижним показателем Боля [2] (равномерным нижним показателем) решения $x(\cdot,x_0)$ системы (1) называется [3, с. 171] число

$$\underline{\beta}[x(\cdot,x_0)] \overset{\mathrm{def}}{=} \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t,x_0)\|}{\|x(\tau,x_0)\|}$$

(в определении верхнего показателя Боля $\overline{\beta}[x(\cdot,x_0)]$ нижний предел заменяется верхним).

Множество $B_n(A,f)$ $(B^n(A,f))$ нижних (верхних) показателей Боля системы (1) аналогично [4] определим следующим образом: $B_n(A,f) = \bigcap\limits_{\rho>0} \{\underline{\beta}[x(\cdot,x_0)] : \|x_0\| < \rho\}$ ($B^n(A,f) = \bigcap\limits_{\rho>0} \{\overline{\beta}[x(\cdot,x_0)] : \|x_0\| < \rho\}$), $x_0 \in G_f \subset \mathbb{R}^n$.

В работе [5], в частности, доказано, что мощность множества равномерных нижних (верхних) показателей диагональной системы (2) не превышает $2^n - 1$. В [4] показано, что m-возмущения могут существенно менять структуру множества характеристических (нижних) показателей линейной диагональной системы. Рассмотрим воздействие m-возмущений на множество равномерных нижних (верхних) показателей диагональной системы (2) и покажем, что неравенство $\operatorname{card} B_n(A,f) < 2^n$ ($\operatorname{card} B^n(A,f) < 2^n$), вообще говоря, для систем (1) уже не выполняется.

Теорема. *Для любых не более чем счетного множества* $\Psi = \{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$, $\psi_i \in \mathbb{R}$, $\inf\Psi \in \Psi \ni \sup\Psi = \mu < 0$, *вещественного* $m > 1$ *и натурального* $n \geq 2$ *существует система (1) с диагональной матрицей* $A \in \mathcal{B}_n$ *и возмущением* $f \in F_n^m$ *такая, что* $\Psi = B_n(A,f)$.

Если $\operatorname{card}\Psi < 2^n$, то полагаем $f \equiv 0$ и построение системы проводим аналогично [5]. В противном случае сначала проведем построения для $n = 2$.

Фиксируем в $\mathbb{R}^2$ евклидову норму и естественный базис e_1, e_2. В качестве G_f возьмем единичную окрестность начала координат. Зададим произвольную монотонно убывающую числовую последовательность $\{p_k\} \downarrow 0$, $k \in \mathbf{N}$, $p_1 < 1/2$. Обозначим $S = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 \colon \|\alpha\| = 1\}$. Для фиксированных чисел p, φ и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^2$ определим множество $S_p(\varphi, \alpha) = \{\gamma u : \gamma \in S,\ |u| \geq p,\ u \in \mathbb{R},\ |(\alpha/\|\alpha\|, \gamma)| > \varphi\}$, где $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение, $\varphi \in (0,1)$, α и γ лежат в первом квадранте. Обозначим $K(\varphi) = \{\gamma u : \gamma \in S,\ u \in \mathbb{R},\ |(\gamma, e_2)| > \varphi\}$.

Отметим, что для множества $S_0(\varphi, \alpha)$ всегда можно указать такое $\eta \in (0,1)$, что для любой невырожденной матрицы H имеет место включение $HS_0(\varphi,\alpha) \supset S_0(\eta, H\alpha)$. Это справедливо, в частности, для матрицы Коши $Y(t,\tau)$ системы (2). При действии $Y(t,\tau)$ в силу невырожденности матрицы Коши дизъюнктные подмножества остаются дизъюнктными.

Для чисел $t_1 > t_0 \geq 0$, $\Delta \geq 0$ и вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\underline{\beta}(x_0, t_0, t_1, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{t_0 \leq \tau < t \leq t_1} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t,x_0)\|}{\|x(\tau,x_0)\|}, \quad t_0 + \Delta \leq t_1, \quad t - \tau \geq \Delta, \quad x(t_0, x_0) = x_0.$$

Лемма. *Для любого порядка возмущения $m > 1$, любых вещественных $p \in (0,1)$, ρ, ψ, μ, Δ, удовлетворяющих неравенствам $\psi < \mu < m\rho < 0$, существует система (1) с диагональной матрицей $A \in \mathcal{B}_2$ и возмущением $f \in F_2^m$ такая, что для промежутка $[t_0, T]$, где T — некоторое число, $T > \Delta$, выполняется*

$$\underline{\beta}(x_0, t_0, T, \Delta) = \psi \quad \text{при} \quad x_0 = \alpha r \in G_f, \quad |r| \geq p, \quad r \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\beta}(x_0, t_0, T, \Delta) = \mu \quad \text{при} \quad \|x_0\| \geq p, \quad x_0 \in G_f \backslash S_p(\varphi, \alpha),$$

где $\alpha \in S$ — некоторый заданный вектор из первого квадранта, $(\alpha, e_2) \in (0,1)$, а $\varphi \in (0,1)$ — фиксированное число, удовлетворяющее условию $|(\alpha, e_i)| < \varphi$, $i = 1, 2$.

Систему (1) будем строить по этапам. Матрицу Коши первого приближения для этой системы обозначим $X(t,\tau)$. На первом этапе при $t \in [t_0, t_1)$ возьмем $f(t,x) \equiv \mathbf{0}$, $A = \operatorname{diag}[\mu, \rho]$. Число t_1 выбирается таким, чтобы в момент времени $t_2 = t_1 + 1$ образ луча $R = \{r\alpha : r \geq p\}$ можно было совместить, пользуясь m-возмущением, с осью Ox_2. Для построения такого возмущения воспользуемся конструкцией, изложенной в [1]. Возьмем угол поворота $\gamma(t,x) = (t - t_1)\|x\|^{m-1} g(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, где $t \in [t_1, t_2)$; $g(x) = 0$ при $0 \leq \|x\| < \rho_p \stackrel{\text{def}}{=} \|X(t_1, t_0) p\alpha/2\|$; $g(x) = \sin^2 \pi(\|x\| - \rho_p)/(2\rho_p)$, $\rho_p \leq \|x\| < 2\rho_p$; $g(x) = 1$, $\|x\| \geq 2\rho_p$.

На втором этапе зададим систему (1) на промежутке $[t_1, t_2)$ следующим образом:

$$A = \mathbf{0}, \quad f(t,x) = \dot{U} U^{-1} x, \quad U = \begin{bmatrix} \cos\gamma(t,x) & \sin\gamma(t,x) \\ -\sin\gamma(t,x) & \cos\gamma(t,x) \end{bmatrix}.$$

Как и в [1], приведенное выше возмущение является возмущением высшего порядка малости m, причем система на рассматриваемом промежутке удовлетворяет требованиям, налагаемым теоремой Каратеодори.

Для выполнения требуемого ортогонального преобразования на промежутке $[t_1, t_2)$ достаточно [1], чтобы угол γ, образованный $X(t_1, t_0)\alpha$ и вектором e_2, не превосходил $\|X(t_1, t_0)\alpha\|^{m-1}$. Поскольку длина вектора $X(t, t_0)\alpha$, $t \in [t_0, t_1)$, пропорциональна $\exp \rho t$, а угол между этим вектором и e_2 пропорционален $\exp(\mu - \rho)t$, то искомое t_1 всегда существует.

Можно указать такое $\eta \in (0,1)$, что $X(t_1, t_0) S_0(\varphi, \alpha) \supset S_0(\eta, X(t_1, t_0)\alpha)$.

Как и в [6], обозначаем для заданных ψ, ρ, μ, θ через $\nu(\psi, \theta)$, $\theta \in (0, +\infty)$, число φ из интервала $(0,1)$, для которого $\max\{\theta^{-1} \ln(\|z(\theta,\delta)\|/\|z(0,\delta)\|) : \delta \in K(\varphi)\} = \mu$, где z — решение системы $\dot{z} = \operatorname{diag}[\rho, \psi] z$.

Третий этап построения системы (1) зависит от того, выполняется или нет неравенство

$$\eta > \nu(\psi, \Delta). \tag{3}$$

Пусть неравенство выполняется. Тогда на промежутке $[t_2, t_3)$ положим систему (1) совпадающей с системой

$$\dot{w} = \operatorname{diag}[\rho, \mu]w, \tag{4}$$

$t_3 = t_2 + \tau$, где число τ определяется из соотношения $K(\eta) = X_*^{-1}(\tau, 0)K(\nu(\psi, \Delta))$, а X_* является матрицей Коши системы (4).

Если же неравенство (3) не выполняется, то полагаем $t_3 = t_2$.

На четвертом этапе при $t \in [t_3, t_4)$, $t_4 = t_3 + \Delta$ положим систему (1) совпадающей с $\dot{x} = \operatorname{diag}[\rho, \psi]x$.

На пятом и шестом этапах, используя на промежутках $[t_4, t_5)$ и $[t_5, t_6)$, $t_6 = t_5 + 1$, преобразования, аналогичные выполненным на первом и втором этапах, добьемся, чтобы множество $L = \{e_2 r : \ r \geq 2\rho_p\}$, $t = t_1$, в момент времени t_6 снова оказалось на оси Ox_2. На промежутке $[t_6, T]$, $T = t_6 + \Delta$, система (1) полагается совпадающей с системой $\dot{x} = \operatorname{diag}[\mu, \mu]x$.

Линейное приближение построенной системы очевидно принадлежит классу $\mathcal{B}_2$. Подсчитывая величину $\underline{\beta}(x_0, t_0, T, \Delta)$, получаем, что при $x_0 = \alpha r$, $|r| \geq p$, она равна $\psi = \underline{\beta}(X(t_3, t_0)x_0, t_3, t_4, \Delta)$, а при $x_0 \notin S_p(\varphi, \alpha)$, $\|x_0\| \geq p$, в силу изложенных выше построений $\underline{\beta}(X(t_6, t_0)x_0, t_6, T, \Delta) = \mu$. Лемма доказана.

Возьмем (по количеству элементов множества Ψ) попарно несовпадающие точки из первого квадранта $\alpha_i \in S$, $(\alpha_i, e_2) \in (0, 1)$, и каждому $\psi_i \in \Psi$ поставим в соответствие α_i. Если множество Ψ счетно, то α_i берем таким образом, чтобы (α_i, e_2) были серединами (собственных) смежных интервалов к канторову дисконтинууму [7, с. 138 — 140], заданному на сегменте $[0, 1]$ числовой прямой. Вследствие определения множества $\{\alpha_i\}$ для каждого i существует число $\delta(i) > 0$ такое, что $|(\alpha_i - \alpha_j, e_2)| > \delta(i)$ для любого $j \neq i$.

Будем строить систему (1) по шагам (на шаге с номером i построения будут вестись на промежутке времени $[T_{i-1}, T_i]$ (в лемме этот же промежуток обозначен $[t_0, T]$)).

В случае если множество Ψ конечно, то зафиксируем сюръекцию $\varkappa : \mathbf{N} \to \{1, \ldots, \operatorname{card}\Psi\}$ такую, что полный прообраз $\varkappa^{-1}(j)$ есть множество $\{k \operatorname{card}\Psi + j \ : \ k \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}\}$. Если Ψ счетно, то возьмем сюръекцию $\varkappa : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, для которой $\varkappa^{-1}(j) = \{k(k-1)/2 + j \ : \ k \geq j, k \in \mathbf{N}\}$.

На первом шаге осуществляем построения леммы для $\alpha = \alpha_1$, $p = p_1$, $\Delta = p_1^{-1}$, $\psi = \psi_1$ и числа $\varphi = \varphi_1 \in (0, 1)$ такого, чтобы множество $S_p(\varphi, \alpha) = S^{(1)}$ не включало ни одного α_i, $i \neq 1$, и $e_i \notin S_p(\varphi, \alpha)$, $i = 1, 2$.

После $(k-1)$-го шага построения системы (1) обозначим образы векторов α_i через $\alpha_i^{(k-1)}$. На k-м шаге построения леммы будем вести для $\psi = \psi_j$, $j = \varkappa(k)$, вектора $\alpha = \alpha_j^{(k-1)}/\|\alpha_j^{(k-1)}\|$ и числа p такого, чтобы прообраз вектора α в момент времени $t = T_0$ принадлежал p_k-окрестности начала координат. Такое p существует в силу того, что $x(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и решения $x(t, x_0)$ системы (1) непрерывно зависят от начальных данных при фиксированном t. В качестве $\varphi = \varphi_i \in (0, 1)$ возьмем такое число, чтобы множество $S_p(\varphi, \alpha) = S^{(k)}$ не включало векторов из множества $\{\alpha_i^{(k-1)}/\|\alpha_i^{(k-1)}\|, \ i \neq j\}\bigcup\{e_1, e_2\}$, а Δ положим равным p_k^{-1}.

Пусть $W(i, j)$, $j > i$, — прообраз множества $S^{(j)} = S_p(\varphi, \alpha)$, $T = T_{j-1}$, в момент времени T_i. Потребуем дополнительно, чтобы φ_j, $j > i$, $\varkappa(j) = \varkappa(i)$, удовлетворяли условию

$$\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \bigcup_{j \geq i+k} W(i, j) \backslash \{x : \|x\| < p\} = \{\alpha u : |u| \geq p\}, \tag{5}$$

где p — параметр i-го шага построения системы.

Осуществляем построения леммы, причем на пятом и шестом этапах множество L, фигурирующее в лемме, определим формулой $L = \{e_2 u \ : \ u \geq r \in (0, 1), \ \|X(t_5, t_0)e_2 r\| \leq \leq \min\limits_i\{\|X(t_5, t_0)\alpha_i^{(k-1)}p\|\}\}$. Построение системы (1) закончено.

Зафиксируем некоторое $k \in \mathbf{N}$. Пусть на k-м шаге построения леммы велись для параметров α, $\psi = \psi_j$, $j = \varkappa(k)$, p, φ, Δ. Обозначим $L_k = \{\alpha u\colon u \geq p\}$. Используя доказанную лемму и тот факт, что нижний показатель Боля можно вычислять по формуле [6]

$$\underline{\beta}[x(\cdot, x_0)] = \varliminf_{t - \tau \to +\infty} \frac{1}{t - \tau} \ln \frac{\|x(t, x_0)\|}{\|x(\tau, x_0)\|}, \quad \tau, t \in [T_{i-1}, T_i], \quad i \to \infty, \quad T_i \to \infty,$$

получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\{\underline{\beta}(X(T_{i-1},T_{k-1})x_0,T_{i-1},T_i,\Delta)\colon x_0\in L_k\}=\{\psi_j\},\quad i\in\varkappa^{-1}(j),\quad i>k,\\
&\inf\{\underline{\beta}(X(T_{i-1},T_{k-1})x_0,T_{i-1},T_i,\Delta)\colon x_0\in L_k\}=\mu,\quad i\notin\varkappa^{-1}(j),\quad i>k.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Следовательно, $\underline{\beta}(x(\cdot,x_0))=\psi_j$ для любого $x_0=x(T_{k-1},x_0)\in L_k$.

Поскольку $p_k\to 0$ при $k\to\infty$, то для любой ρ-окрестности начала координат можно указать такие векторы β_i, что $\underline{\beta}(x(\cdot,\beta_i))=\psi_i$, $\|\beta_i\|<\rho$, $\{\underline{\beta}(x(\cdot,\beta_i))\}=\Psi$.

В силу (5), (6) и описанного метода построения системы любое решение с начальным вектором $x_0=x(0)$ либо попадает в некоторый момент времени T_k в множество $\{\alpha_i^{(k-1)}/\|\alpha_i^{(k-1)}\|u:|u|\geq p\}$, и тогда $\underline{\beta}(x(\cdot,x_0))\in\Psi$, либо найдется такой номер $l(x_0)$, что $X(T_{k-1},0)x_0\notin S^{(k)}$ для любого $k>l(x_0)$. В этом случае из леммы следует, что $\underline{\beta}(x(\cdot,x_0))=\mu$. В силу определения отображения $\varkappa$ окончательно получаем, что $B_2(A,f)=\Psi$.

Для завершения доказательства в случае $n>2$ достаточно к построенной системе (1) присоединить $n-2$ уравнения $\dot{x}_i=\mu x_i$, $i=3,\ldots,n$. Теорема доказана.

Для множества старших показателей Боля справедлива аналогичная теорема, доказательство которой в основном повторяет доказательство приведенной выше теоремы, при этом числа μ, ρ и ψ в лемме должны удовлетворять неравенствам $\mu/m<\rho<\psi<0$.

Выполнение работы финансировалось Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. *Виноград Р. Э.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 5. С. 800 — 813.
2. *Vinograd R. E.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88, N 4. P. 595 — 601.
3. *Далецкий Ю. А., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
4. *Изобов Н. А.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 24, № 5. С. 784 — 795.
5. *Конюх А. В.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1465 — 1467.
6. *Барабанов Е. А., Конюх А. В.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1665 — 1676.
7. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

Институт математики АН Беларуси

Поступила в редакцию 30 декабря 1996 г.