В. П. Танана, Е. В. Табаринцева, О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач,
Сиб. журн. вычисл. матем., 2007, том 10, номер 2, 221–228

О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач*

В.П. Танана, Е.В. Табаринцева

УДК 517.948

Танана В.П., Табаринцева Е.В. О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 2. — С. 221–228.

Предложен метод приближения разрывных решений нелинейных обратных задач. В качестве примера рассмотрена обратная задача для нелинейного параболического уравнения. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения.

Ключевые слова: *обратная задача, нелинейное операторное уравнение, приближенное решение.*

Tanana V.P., Tabarintseva E.V. On a method to approximate discontinuous solutions of nonlinear inverse problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2007. — Vol. 10, № 2. — P. 221–228.

A method to approximate discontinuous solutions of nonlinear inverse problems is suggested. An inverse problem for a nonlinear parabolic equation is considered as an example. A sharp error estimation for the constructed approximate solution is obtained.

Key words: *inverse problem, nonlinear operator equation, approximate solution.*

При приближении кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач [1, 2] и оценках равномерного уклонения этих приближений на участках непрерывности возникают трудности, связанные со сложностью нелинейной задачи, рассматриваемой в пространстве кусочно-непрерывных функций.

В данной работе предложен способ сведения этой задачи к суперпозиции более простых.

Одна из этих задач остается нелинейной, но рассматривается в гильбертовых пространствах, и это позволяет получить ее приближенное решение и оценить его погрешность.

Другая из задач линейна, использует оценку для предыдущей и рассматривается в более сложных пространствах.

1. Основные понятия и определения

Пусть U, V, и F — банаховы пространства, B — инъективный линейный вполне непрерывный оператор, отображающий V в U, а A — инъективный непрерывный оператор, действующий из U в F. Обозначим через M_r множество, равное $B\overline{S}_r$, где $\overline{S}_r = \{v : v \in V, \|v\| \leq r\}$ и рассмотрим операторное уравнение первого рода

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 04-01-00063).

$$Au = f; \quad u \in U, \quad f \in F. \tag{1}$$

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит множеству M_r, но точное значение правой части f_0 нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta \in F$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_0 - f_\delta\| \le \delta$.

Требуется по исходным данным задачи M_r, f_δ и δ определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения u_0.

Обозначим через R_δ множество пространства F, определяемое формулой

$$R_\delta = AM_r + \overline{S}_\delta,$$

где $\overline{S}_\delta$ — соответствующий δ — шар пространства F.

Определение 1. Семейство операторов $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M_r, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает множество R_δ в U и $T_\delta f_\delta \to u_0$ при $\delta \to 0$ равномерно на множестве M_r при условии $\|Au - f_\delta\| \le \delta$.

Для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ введем количественную характеристику точности метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на классе M_r:

$$\Delta(T_\delta) = \sup\{\|u - T_\delta f_\delta\| : u \in M_r, \|Au - f_\delta\| \le \delta\}, \tag{2}$$

а соответствующее приближенное решение u_δ определим формулой

$$u_\delta = T_\delta f_\delta.$$

Тогда из (2) следует, что для u_δ справедлива оценка

$$\|u_\delta - u_o\| \le \Delta(T_\delta). \tag{3}$$

2. Определение приближения кусочно-непрерывного решения уравнения (1).

Пусть $(\overline{T})$ — разбиение отрезка $[0, 1]$ точками

$$0 = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_m = 1,$$

U — пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, допускающих разрывы первого рода в точках $\bar{t}_i : i \in \overline{1, m-1}$ разбиения $(\overline{T})$ с нормой

$$\|u\|_U = \sum_{i=1}^{m} \max\{|u(t)| : t \in (\bar{t}_{i-1}, \bar{t}_i)\},$$

F — гильбертово пространство, а $Z = L_2[0, 1]$. Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in U$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{(\bar{t}_{i-1}, \bar{t}_i)} [u_0'(\tau)]^2 d\tau + \int\limits_0^1 [u_0(\tau)]^2 d\tau \le r^2, \tag{4}$$

где величина r предполагается известной, а

$$\int\limits_{(\bar{t}_{i-1},\bar{t}_i)} [u_0'(\tau)]^2 d\tau = \lim_{\mu\to+0} \int\limits_{\bar{t}_{i-1}+\mu}^{\bar{t}_i-\mu} [u_0'(\tau)]^2 d\tau.$$

Сделаем в уравнении (1) замену

$$z(t) = \int\limits_0^t u(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,1]. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) сведется к уравнению

$$A_1 z(t) = f; \qquad z \in L_2[0,1], \qquad f \in F, \tag{6}$$

в котором оператор A_1 непрерывно и инъективно отображает пространство $L_2[0,1]$ в F. При $f = f_0$ уравнение (6) имеет решение $z_0(t)$, принадлежащее множеству $M_r = B\overline{S}_r$, в котором оператор B, отображающий пространство $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$, определен формулой (5), а величина r — формулой (4). Требуется, используя априорную информацию M_r , f_δ и δ, определить приближенное решение z_δ уравнения (6) и оценить его уклонение $\|z_\delta - z_o\|$ от точного решения z_0.

Используя один из методов $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на классе M_r, рассмотрим в качестве приближенного решения уравнения (6) элемент

$$z_\delta = T_\delta f_\delta. \tag{7}$$

Тогда уровень погрешности приближенного решения (7) удовлетворяет неравенству

$$\Delta(T_\delta) \le \varepsilon(\delta) \le l\Delta(T_\delta), \tag{8}$$

где l — некоторая константа.

Для окончательного решения нашей задачи рассмотрим уравнение (5) и предположим, что вместо точного значения правой части z_0 в нем нам известна функция z_δ и уровень ее погрешности $\varepsilon(\delta)$, определяемые формулами (3), (7) и (8).

Для решения уравнения (5) используем метод усредняющих функций, предложенный в работе [3], и рассмотрим функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\exp\left(-\dfrac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\gamma = \int\limits_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) dt.$$

Тогда для любых значений $h > 0$ определим

$$\omega_h(t) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{|t|}{h}\right), \quad t \in R. \tag{10}$$

Из [4, с. 111–112] и формул (9), (10) следует, что для любого $h > 0$ $\omega_h(t) \in C^\infty(R)$, $\omega_h(t) = 0$ при $|t| > h$ и $\int_{|t|\le h} \omega_h(t)dt = 1$.

Теперь определим регуляризующее семейство $\{\widehat{T}_h : h > 0\}$ линейных ограниченных операторов $\widehat{T}_h$, отображающих $L_2[0,1]$ в $C[0,1]$, используя формулу

$$u^h(t) = \widehat{T}_h z(t) = \int\limits_0^1 z(\tau) \frac{d\omega_h(t-\tau)}{dt}\, d\tau, \quad z \in L_2[0,1]. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть $h > 0$, а линейный ограниченный оператор $\widehat{T}_h$ определен формулой* (11). *Тогда*

$$\|\widehat{T}_h\| \le \frac{\sqrt{2}d}{\gamma h^{3/2}},$$

где $d^2 = \frac{3}{2}e^{-2}$.

Доказательство. Пусть $z(t) \in L_2[0,1]$ и $\|z\|_{L_2[0,1]} \le 1$. Тогда из (11) следует, что для любого $t \in [0,1]$:

$$|\widehat{T}_h z(t)| \le \frac{1}{h^3\gamma} \int\limits_{|\tau|\le h} |z(\tau - t)| e^{-x} 2\tau x^2 d\tau, \tag{12}$$

где $x = \dfrac{h^2}{h^2-\tau^2}$. Из формулы (12) следует, что для любого $t \in [0,1]$:

$$|\widehat{T}_h z(t)| \le \frac{1}{h^3\gamma} \left[\int\limits_{|\tau|\le h} z^2(\tau - t) d\tau \right]^{1/2} \left[\int\limits_{|\tau|\le h} e^{-2x} 4\tau^2 x^4 d\tau \right]^{1/2}. \tag{13}$$

Так как

$$\int\limits_{|\tau|\le h} z^2(\tau - t) d\tau \le \int\limits_0^1 z^2(y) dy \le 1,$$

где $y = t - \tau$, то из (13) следует, что для любого $t \in [0,1]$:

$$|\widehat{T}_h z(t)| \le \frac{\sqrt{2}}{h^{3/2}\gamma} \left[\int\limits_1^\infty e^{-2x} x^2 dx \right]^{1/2}. \tag{14}$$

Учитывая, что $\int_1^\infty e^{-2x} x^2 dx = d^2$, из формулы (14) получаем утверждение леммы. $\square$

Теперь рассмотрим отрезок $[a,b]$ непрерывности функции $z_0(t)$, т.е. такой что существует номер $i_0 \in \overline{1,m}$, удовлетворяющий соотношению

$$[a,b] \subset (\bar{t}_{i_0-1}, \bar{t}_{i_0}).$$

Обозначим через $\widehat{M}_r$ множество кусочно-непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $u_0(t)$ таких, что

$$\int\limits_a^b u_0^2(t) dt + \int\limits_a^b [u_0'(t)]^2 dt \le r^2, \tag{15}$$

$$z_0(t) = \int\limits_0^t u_0(\tau) d\tau, \qquad u_0^h(t) = \widehat{T}_h z_0(t).$$

Лемма 2. *Пусть множество* $\widehat{M}_r$ *определено формулой* (15), *тогда справедлива оценка*

$$\sup_{u_0\in\widehat{M}_r}\|u_0-u_0^h\|_{C[a,b])}\le r\sqrt{h}.$$

Доказательство. Предположим, что $u_0\in\widehat{M}_r$, тогда для любого $t\in[a,b]$:

$$|u_0(t)-u_0^h(t)|=\left|\int\limits_{|t-\tau|\le h}\omega_h(t-\tau)\frac{d}{dt}z_0(t)\,d\tau-\int\limits_{|t-\tau|\le h}\omega_h(t-\tau)\frac{d}{d\tau}z_0(\tau)\,d\tau\right|. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует, что

$$|u_0(t)-u_0^h(t)|\le\int\limits_{|t-\tau|\le h}\omega_h(t-\tau)|u_0(t)-u_0(\tau)|\,d\tau. \tag{17}$$

Так как в силу теоремы, доказанной в [4, с. 126], условие (15) влечет

$$|u_0(t_1)-u_0(t_2)|\le|t_1-t_2|^{1/2}, \tag{18}$$

то из (17) и (18) следует, что для любого $t\in[a,b]$:

$$|u_0(t)-u_0^h(t)|\le r\sqrt{h}. \tag{19}$$

Из (19), произвольности значений $t\in[a,b]$ и условия $u_0\in\widehat{M}_r$ следует утверждение леммы. □

В качестве приближенного решения уравнения (5) возьмем функцию

$$u_\delta^{h(\varepsilon)}=\widehat{T}_{h(\varepsilon)}z_\delta(t),$$

в которой

$$r\sqrt{h}=\frac{\sqrt{2}d\varepsilon}{h^{3/2}\gamma}, \tag{20}$$

а $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$.

Очевидно, что при любых значениях r и ε уравнение (20) имеет единственное решение

$$h(\varepsilon)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}d\varepsilon}{r\gamma}}. \tag{21}$$

Учитывая, что

$$\sup_{t\in[a,b]}\|u_0(t)-u_\delta^{h(\varepsilon)}\|\le\sup_{t\in[a,b]}\|u_0(t)-u_0^{h(\varepsilon)}\|+\|\widehat{T}_{h(\varepsilon)}\|\varepsilon,$$

и используя соотношение (21) и леммы 1, 2, получаем, что

$$\sup_{t\in[a,b]}\|u_0(t)-u_\delta^{h(\varepsilon)}\|\le 2^{9/8}r^{3/4}\left(\frac{d\varepsilon(\delta)}{\gamma}\right)^{1/4}. \tag{22}$$

Теперь, чтобы доказать точность по порядку оценки (22), построим пример функции.

Пусть

$$\frac{2}{\sqrt{3}}u_0(t) = \begin{cases} \varepsilon^{1/4} - \varepsilon^{-1/4}(t-a), & t \in [a, a+\sqrt{\varepsilon}], \\ 0, & t \notin [a, a+\sqrt{\varepsilon}]. \end{cases} \tag{23}$$

Тогда при $\varepsilon \le 1$ из (23) следует

$$\|u_0(t)\|_{C[a,b]} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon^{1/4}, \qquad \|u_0'(t)\|_{L_2[0,1]} \le 1, \qquad \left\| \int\limits_0^t u_0(\tau)\,d\tau \right\|_{L_2[0,1]} \le \varepsilon,$$

что и доказывает точность по порядку оценки (22). □

3. Обратная задача Коши для нелинейного параболического уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + f(v), \tag{24}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [0,t_0]$, $a \in C^1[0,1]$ и $0 < a_1 \le a(x) \le a_2$. Предположим, что

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = v(1,t) = 0, \tag{25}$$

$$v(x,t_0) = \chi(x), \tag{26}$$

а $v(x,0) = v_0(x)$ требуется определить. Здесь функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, ограниченную на всей действительной прямой. Пусть в качестве априорной информации о точном решении известно разбиение $(\overline{T})$ отрезка $[0,1]$:

$$0 = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_m = 1,$$

такое, что

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{(\overline{x}_{i-1},\overline{x}_i)} [v_0'(\tau)]^2 d\tau + \int\limits_0^1 [v_0(\tau)]^2 d\tau \le r^2. \tag{27}$$

Сделав в уравнении (24) замену

$$u(x,t) = \int\limits_0^x \frac{v(\xi,t)}{a(\xi)}\,d\xi,$$

сведем его к уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + F(u), \tag{28}$$

в котором

$$F(u) = \int\limits_0^x \frac{f(u'_\xi(\xi,t))}{a(\xi)}\,d\xi,$$

а соответствующие условия к

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = u(0,t) = 0 \tag{29}$$

и

$$u(x,t_0) = g(x). \tag{30}$$

Требуется определить начальное распределение $u(x,0) = u_0(x)$, принадлежащее множеству $M_r = BS(0,r)$, где B — оператор, действующий в $L_2[0,1]$ по правилу

$$Bv(x) = \int\limits_0^x \frac{v(\xi)}{a(\xi)}\,d\xi.$$

3.1. Оценка погрешности приближенного решения нелинейной задачи

Исходная задача (28)–(30) поставлена некорректно (см. [5]). Пусть известно, что при заданном начальном условии $g(x) \in L_2[0,1]$ эта задача имеет решение $u_0(x)$, принадлежащее множеству M_r, но вместо $g(x)$ известны δ — приближение $g_\delta(x)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|g(x) - g_\delta(x)\| \le \delta$. Вместо (28)–(30) рассмотрим вспомогательную задачу определения начального условия $u^\alpha_\delta = u(x,0)$, где $u(x,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + (-1)^m\alpha\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}} + F(u), \quad \alpha > 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u^2(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(1,t)}{\partial x^3} = 0,$$

$$u(x,t_0) = g_\delta(x).$$

Элементарная оценка показывает, что при условии ограниченности производной функции $f(x)$ отображение $F(u) : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(u) - F(v)\|_{L_2[0,1]} \le L\|u - v\|_{L_2[0,1]}.$$

Тогда верна следующая

Теорема [5]. *Задача* (31) *поставлена корректно в пространстве* $L_2[0,1]$.

Пусть отображение $T_\delta : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ *действует по правилу* $T_\delta g_\delta = u_\alpha(x,0)$, *где* $u_\alpha(x,t)$ *— решение задачи* (31) *и зависимость* $\alpha = \alpha(\delta)$ *выбирается из условия*

$$\alpha \simeq \frac{1}{(\ln 1/\delta)^{m-1}}. \tag{33}$$

В качестве устойчивого приближенного решения задачи (28)–(30) рассмотрим функцию

$$u_{\alpha(\delta)}(x) = T_\delta g_\delta. \tag{34}$$

Выбор параметра регуляризации из условия (33) является квазиоптимальным, т. е. обеспечивает минимальный порядок погрешности построенного приближенного решения (см. [6, 7]).

Из результатов работы [6] следует, что оценка погрешности приближенного решения (34) нелинейной задачи (28)–(30) на множестве M_r имеет вид

$$\Delta(T_\delta) \le C\frac{1}{(\ln(r/\delta))^{\frac{2m-1}{4m}}} = \varepsilon(\delta). \tag{35}$$

Следовательно, оценка погрешности построенного приближения кусочно-непрерывного решения задачи (24) имеет вид (22), где $\varepsilon(\delta)$ определяется правой частью (35).

Список литературы

[1] **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // ЖВМ и МФ.—1980.—Т. 20, № 4.—С. 819–826.

[2] **Леонов А.С.** Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // ЖВМ и МФ.—1982.—Т. 32, № 3.—С. 516–531.

[3] **Васин В.В.** Регуляризация задачи численного дифференцирования // Матем. записки Уральского университета.—1969.—Т. 7, № 2.—С. 29–33.

[4] **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации.—М.: МГУ, 1999.

[5] **Танана В.П., Табаринцева Е.В.** О решении некорректной задачи для полулинейного дифференциального уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.—Новосибирск, 2002.—Т. 5, № 2.—С. 189–198.

[6] **Табаринцева Е.В.** Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.—Новосибирск, 2005.—Т. 8, № 3.—С. 259–271.

[7] **Танана В.П.** Методы решения операторных уравнений.—М.: Наука, 1982.

Кафедра вычислительной математики,
Челябинский госуниверситет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
Челябинск, 454136
E-mails: tanana@cgu.math.chel.ru (Танана В.П.)
elt@csu.ru (Табаринцева Е.В.)

Статья поступила
26 апреля 2006 г.
Переработанный вариант
2 июня 2006 г.