С. А. Теляковский, Весовые интегральные оценки для лакунарных тригонометрических рядов, *Тр. МИАН*, 1994, том 203, 173–183

Труды Математического института РАН
1994, том 203

УДК 517.518.4

С.А. Теляковский

Весовые интегральные оценки для лакунарных тригонометрических рядов[1]

1. Пусть n_1, $n_2, \dots$ — последовательность положительных (не обязательно целых) чисел, лакунарная по Адамару, т.е.

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Положим еще $n_0 = 0$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(n_k x - \psi_k), \tag{1.1}$$

где ψ_k — произвольные числа, а коэффициенты ряда удовлетворяют условию $\sum a_k^2 < < \infty$. В этом случае ряд (1.1) сходится почти всюду и его сумма, которую обозначим $F(x)$, интегрируема на любом отрезке.

Для упрощения формулировок будем в дальнейшем предполагать, что последовательность n_1, $n_2, \dots$ удовлетворяет условиям

$$1 < q \leq \frac{n_{k+1}}{n_k} \leq q^2, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

Это не ограничивает общности, так как к такому случаю всегда можно прийти, добавив в ряд (1.1) слагаемые с нулевыми коэффициентами.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена для $x > 0$, положительна, с ростом x убывает, а при $x \to 0$ стремится к бесконечности. Класс функций φ, обладающих этими свойствами, будем обозначать Φ^*. Если φ, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_0^x t^{\tau-1}\varphi(t)\, dt \leq D x^{\tau} \varphi(x), \qquad x > 0, \tag{1.3}$$

где τ и D — заданные положительные числа, будем писать $\varphi \in \Phi^*_\tau$. Понятно, что с ростом τ классы Φ^*_τ расширяются. Отметим, что степенная функция $x^{-\gamma} \in \Phi^*_\tau$, если $0 < \gamma < \tau$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–011–198).

Настоящая работа посвящена оценкам интеграла от функции $|F(x)|\varphi(x)$. Впервые такую задачу рассматривала М. Вейс. Она доказала [1; 2, с. 32], что если ряд (1.1) содержит только синусы, т.е. $\psi_k \equiv \pi/2$, то для сходимости интеграла

$$\int_0^\pi |F(x)|x^{-1}\,dx \tag{1.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{p=1}^\infty \left(\sum_{k=p}^\infty a_k^2\right)^{1/2}.$$

Л.А. Балашов и автор исследовали этот вопрос для ряда (1.1) с произвольными ψ_k и при некоторых условиях на φ, более ограничительных, чем принадлежность классу Φ_2^* (функция $x^{-\gamma}$ удовлетворяет им, если $0 < \gamma \le 1$), доказали [3, теорема 1], что интеграл

$$\int_0^\pi |F(x)|\varphi(x)\,dx \tag{1.5}$$

сходится в том и только том случае, когда сходятся ряды

$$U := \sum_{p=1}^\infty \left(\sum_{k=p}^\infty a_k^2\right)^{1/2} \varphi_p \tag{1.6}$$

и

$$V_0 := \sum_{p=1}^\infty \left|\sum_{k=0}^p a_k \cos\psi_k\right| \varphi_p, \tag{1.7}$$

где

$$\varphi_p := \int_{E_p} \varphi(x)\,dx, \qquad E_p := \left[\frac{1}{n_{p+1}}, \frac{1}{n_p}\right]. \tag{1.8}$$

А.С. Белов получил следующий более общий результат, относящийся к произвольной функции $\varphi \in \Phi_\tau^*$ [4, следствия 1–3]. Пусть α — наименьшее натуральное число, для которого $\tau \le \alpha$. Тогда для сходимости интеграла (1.5) необходимы и достаточны:

условие $U < \infty$, если $\alpha = 1$;

условия $U < \infty$, $V_0 < \infty$, если $\alpha = 2$;

условия $U < \infty$, $V_0 < \infty$ и

$$V_i := \sum_{p=1}^\infty \left|\sum_{k=1}^p a_k n_k^i \cos\left(\frac{\pi i}{2} - \psi_k\right)\right| n_p^{-i}\varphi_p < \infty \tag{1.9}$$

для $i = 1, \dots, \alpha - 2$, если $\alpha > 2$.

В отличие от указанных работ мы оцениваем здесь интеграл

$$\int |F(x)|\varphi(x)\,dx,$$

взятый по отрезку, не содержащему точку 0, и прослеживаем характер зависимости получаемых оценок от промежутка интегрирования. Это дает возможность в предположении сходимости или расходимости интеграла

$$\int_0^{\pi} |F(x)|\varphi(x)\,dx \tag{1.10}$$

оценивать скорость стремления к нулю, соответственно, роста к бесконечности при $\varepsilon \to +0$ интегралов вида

$$\int_0^{\varepsilon} |F(x)|\varphi(x)\,dx \text{ и } \int_{\varepsilon}^{\pi} |F(x)|\varphi(x)\,dx. \tag{1.11}$$

Условимся в этом разделе писать в остаточном члене O, если оценка равномерна по всем параметрам, O_q, если числовой множитель может зависеть от q, и т.д. Через $A(q)$ будем обозначать положительные величины, которые могут зависеть только от q; в разных случаях они могут быть различными.

Т е о р е м а 1. *Пусть последовательность положительных чисел* $n_1, n_2, \ldots$ *удовлетворяет условиям* (1.2), *сходится ряд* $\sum a_k^2$ *и функция* $\varphi \in \Phi^*$. *Тогда*

$$I(l,m) := \int_{1/n_m}^{1/n_l} |F(x)|\varphi(x)\,dx = J(l,m) + O_q(U(l,m)), \tag{1.12}$$

где

$$J(l,m) := \sum_{p=l}^{m-1} \int_{E_p} \left| \sum_{k=0}^{p} a_k \cos(n_k x - \psi_k) \right| \varphi(x)\,dx \tag{1.13}$$

и

$$U(l,m) := \sum_{p=l}^{m-1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \varphi_{p+1}. \tag{1.14}$$

Справедлива также оценка, которая получится из (1.12), *если в интегралах, задающих величины* $I(l,m)$ *и* $J(l,m)$, *опустить знак модуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\sum_{p=l}^{m-1} \int_{E_p} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \cos(n_k x - \psi_k) \right| \varphi(x)\,dx \le A(q)U(l,m), \tag{1.15}$$

откуда будут следовать оба утверждения теоремы.

Оценим интеграл

$$U_p := \int\limits_{E_p} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \cos(n_k x - \psi_k) \right| \varphi(x)\, dx \le$$

$$\le \varphi\Big(\frac{1}{n_p}\Big) \int\limits_{E_p} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \cos(n_k x - \psi_k) \right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{n_p} \varphi\Big(\frac{1}{n_p}\Big) \int\limits_0^1 \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \cos\Big(\frac{n_k}{n_p} x - \psi_k\Big) \right| dx. \tag{1.16}$$

Так как последовательность $\lambda_r := n_{p+r}/n_p$ удовлетворяет условиям $\lambda_1 \ge q$ и $\lambda_{r+1}/\lambda_r \ge q$, $r = 1, 2, \ldots$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^1 \left| \sum_{r=1}^{\infty} a_{p+r} \cos(\lambda_r x - \psi_{p+r}) \right| dx \le A(q) \Big(\sum_{r=1}^{\infty} a_{p+r}^2 \Big)^{1/2}. \tag{1.17}$$

Подобные оценки хорошо известны, они использовались в [1–4]. Доказательство (1.17) имеется, например, в [4, теорема 1].

Далее, в силу монотонности функции φ и условий (1.2)

$$\varphi\Big(\frac{1}{n_p}\Big) \le \Big(\frac{1}{n_p} - \frac{1}{n_{p+1}}\Big)^{-1} \varphi_p = \frac{n_p n_{p+1}}{n_{p+1} - n_p} \varphi_p \le A(q) n_p \varphi_p. \tag{1.18}$$

Поэтому

$$\varphi\Big(\frac{1}{n_p}\Big) \le \varphi\Big(\frac{1}{n_{p+1}}\Big) \le A(q) n_{p+1} \varphi_{p+1}$$

и, значит, из (1.16) и (1.17) следует, что

$$U_p \le A(q) \Big(\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k^2 \Big)^{1/2} \varphi_{p+1}. \tag{1.19}$$

Суммируя оценки (1.19) по p от l до $m-1$, приходим к (1.15). Теорема доказана.

Дальнейшие теоремы имеют целью получить при дополнительных предположениях о функции φ соотношения, которые могут оказаться удобными при нахождении асимптотических оценок интеграла $I(l, m)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $\varphi \in \Phi_\tau^*$, *где* $0 < \tau \le 1$. *Тогда*

$$I(l, m) = \int\limits_{1/n_m}^{1/n_l} \left| \sum_{k=0}^{l} \cos(n_k x - \psi_k) \right| \varphi(x)\, dx + O_{q,D}(U(l, m)). \tag{1.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы воспользоваться теоремой 1, преобразуем величину $J(l,m)$ следующим образом:

$$J(l,m)=\sum_{p=l}^{m-1}\int\limits_{E_p}\left|\sum_{k=0}^{l}a_k\cos(n_kx-\psi_k)\right|\varphi(x)\,dx+O\Bigl(\sum_{p=l+1}^{m-1}\int\limits_{E_p}\sum_{k=l+1}^{p}|a_k|\varphi(x)\,dx\Bigr)=$$

$$=\int\limits_{1/n_m}^{1/n_l}\left|\sum_{k=0}^{l}a_k\cos(n_kx-\psi_k)\right|\varphi(x)\,dx+O\Bigl(\sum_{k=l+1}^{m-1}|a_k|\int\limits_{0}^{1/n_k}\varphi(x)\,dx\Bigr). \tag{1.21}$$

Так как $\tau\le 1$, то $\varphi\in\Phi_1^*$ и в силу оценок (1.3) и (1.18) имеем

$$\sum_{k=l+1}^{m-1}|a_k|\int\limits_{0}^{1/n_k}\varphi(x)\,dx\le D\sum_{k=l+1}^{m-1}|a_k|\frac{1}{n_k}\varphi\Bigl(\frac{1}{n_k}\Bigr)\le$$

$$\le A(q)D\sum_{k=l+1}^{m-1}|a_k|\varphi_k\le A(q)DU(l,m). \tag{1.22}$$

Оценка (1.20) вытекает из (1.12), (1.21) и (1.22). Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *функция* $\varphi\in\Phi_\tau^*$ *при некотором* $\tau>0$ *и* s — *произвольное целое число такое, что* $\tau-1\le s$. *Тогда*

$$I(l,m)=J_s(l,m)+O_{q,D}\Bigl(\sum_{k=0}^{l}|a_k|\Bigl(\frac{n_k}{n_l}\Bigr)^s\varphi_l\Bigr)+O_{q,D}(U(l,m)), \tag{1.23}$$

где

$$J_s(l,m):=\sum_{p=l}^{m-1}\int\limits_{E_p}\left|\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{p}a_kn_k^i\cos\Bigl(\frac{\pi i}{2}-\psi_k\Bigr)x^i\right|\varphi(x)\,dx \tag{1.24}$$

и считается, что $n_0^0=1$.

При этом, пользуясь оценкой (1.23) *в случае* $\tau\le 1$, *мы можем в* (1.24) *вести суммирование по* k *от* 0 *до* l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем исходить из оценки (1.12). Представив сумму под знаком интеграла в $J(l,m)$ по формуле Тейлора, получим

$$\sum_{k=0}^{p}a_k\cos(n_kx-\psi_k)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{p}a_kn_k^ix^i\cos\Bigl(\frac{\pi i}{2}-\psi_k\Bigr)+O\Bigl(\sum_{k=0}^{p}|a_k|n_k^sx^s\Bigr). \tag{1.25}$$

Оценим величину

$$W(l,m):=\sum_{p=l}^{m-1}\int\limits_{E_p}\sum_{k=0}^{p}|a_k|n_k^sx^s\varphi(x)\,dx=$$

$$= \sum_{p=l}^{m-1} \sum_{k=0}^{p} |a_k| n_k^s \int_{E_p} x^s \varphi(x)\, dx = \sum_{p=l}^{m-1} \sum_{k=0}^{l} + \sum_{p=l+1}^{m-1} \sum_{k=l+1}^{p} . \tag{1.26}$$

С помощью оценок (1.3) и (1.18) находим

$$\sum_{p=l}^{m-1} \sum_{k=0}^{l} |a_k| n_k^s \int_{E_p} x^s \varphi(x)\, dx \le \sum_{k=0}^{l} |a_k| n_k^s \int_0^{1/n_l} x^s \varphi(x)\, dx \le$$

$$\le D \sum_{k=0}^{l} |a_k| n_k^s \frac{1}{n_l^{s+1}} \varphi\left(\frac{1}{n_l}\right) \le A(q) D \sum_{k=0}^{l} |a_k| \left(\frac{n_k}{n_l}\right)^s \varphi_l. \tag{1.27}$$

Подобным образом проводится оценка и второй суммы из правой части (1.26):

$$\sum_{p=l+1}^{m-1} \sum_{k=l+1}^{p} |a_k| n_k^s \int_{E_p} x^s \varphi(x)\, dx = \sum_{k=l+1}^{m-1} |a_k| n_k^s \sum_{p=k}^{m-1} \int_{E_p} x^s \varphi(x)\, dx \le$$

$$\le \sum_{k=l+1}^{m-1} |a_k| n_k^s \int_0^{1/n_k} x^s \varphi(x)\, dx \le A(q) D \sum_{k=l+1}^{m-1} |a_k| \varphi_k \le$$

$$\le A(q) D \sum_{p=l}^{m-1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \varphi_{p+1}. \tag{1.28}$$

Из (1.26)–(1.28) следует, что $W(l,m)$ мажорируется остаточными членами формулы (1.23). Поэтому (1.23) вытекает из (1.12).

Чтобы убедиться в справедливости замечания, относящегося к случаю $\tau \le 1$, нужно провести те же рассуждения, но исходить при этом не из (1.12), а из (1.20).

Теорема доказана.

Наряду с интегралом $I(l,m)$, в котором функция $F(x)$ берется по модулю, будем рассматривать аналогичный интеграл с функцией $F(x)$ без модуля

$$\tilde{I}(l,m) := \int_{1/n_m}^{1/n_l} F(x) \varphi(x)\, dx. \tag{1.29}$$

Доказательство теорем 2 и 3 позволяет утверждать, что справедливы оценки, которые получаются из (1.20) и (1.23), если заменить в них $I(l,m)$ на $\tilde{I}(l,m)$ и опустить знак модуля в интегралах из правых частей этих оценок.

Обозначим через $\tilde{J}_s(l,m)$ выражение, в которое перейдет правая часть (1.24), если опустить там знак модуля. Изменив порядок суммирования по p и k, получим

$$\tilde{J}_s(l,m) = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} a_k n_k^i \cos\left(\frac{\pi i}{2} - \psi_k\right) \int_{1/n_m}^{1/n_l} x^i \varphi(x)\, dx + \right.$$

$$+\sum_{k=l}^{m-1} a_k n_k^i \cos\left(\frac{\pi i}{2}-\psi_k\right)\int\limits_{1/n_m}^{1/n_k} x^i\varphi(x)\,dx\Bigg\}. \tag{1.30}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Если выполнены условия теоремы* 3, *то*

$$\tilde I(l,m)=\tilde J_s(l,m)+O_{q,D}\left(\sum_{k=0}^{l}|a_k|\left(\frac{n_k}{n_l}\right)^s\varphi_l\right)+O_{q,D}(U(l,m)), \tag{1.31}$$

где для $\tilde J_s(l,m)$ *справедливо представление* (1.30). *При этом, пользуясь оценкой* (1.31) *при* $\tau\le 1$, *мы можем в* (1.30) *опустить вторую сумму в фигурных скобках.*

Отметим, что если $a_k\ge 0$ для всех k и $\psi_k\equiv 0$ или $\psi_k\equiv\pi/2$, т.е. ряд (1.1) содержит только косинусы или только синусы, то полиномы, стоящие под знаком интеграла в (1.13), неотрицательны на промежутках интегрирования. Значит, в этих случаях можно пользоваться оценкой (1.23), заменив в ней $J_s(l,m)$ на $\tilde J_s(l,m)$.

2. Проиллюстрируем полученные результаты на примере функции Вейерштрасса

$$w(x):=\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos b^k x,\qquad 0<a<1,\quad b>1, \tag{2.1}$$

и степенной весовой функции $\varphi(x)=x^{-\gamma}$, $\gamma>0$.

При изучении для функции w асимптотического поведения интегралов вида (1.11) мы не будем следить за зависимостью числовых множителей в остаточных членах от a, b и γ. Условимся, что в этом разделе в оценках с O-символами не утверждается их равномерность относительно указанных параметров.

Для функции Вейерштрасса полиномы, стоящие под знаком интеграла в (1.13), положительны на отрезках E_p. Согласно сказанному выше это позволяет заменить в (1.23) $J_s(l,m)$ на $\tilde J_s(l,m)$, что мы и будем иметь в виду при ссылках на теорему 3.

Так как в нашем случае

$$U(l,m)=\sum_{p=l}^{m-1}\left(\sum_{k=p}^{\infty}a^{2k}\right)^{1/2}\varphi_p=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\sum_{p=l}^{m-1}a^p\varphi_p \tag{2.2}$$

и

$$\varphi_p=\begin{cases}\log b & \text{при } \gamma=1,\\ \dfrac{1}{\gamma-1}(b^{\gamma-1}-1)b^{(\gamma-1)p} & \text{при } \gamma\ne 1,\end{cases} \tag{2.3}$$

то для сходимости ряда U необходимо и достаточно условие $ab^{\gamma-1}<1$, которое заведомо выполнено, если $\gamma\le 1$. Далее,

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}a^p\varphi_p=\frac{a}{1-a}\sum_{p=1}^{m}\varphi_p+O\left(\sum_{p=1}^{m}a^p\varphi_p\right). \tag{2.4}$$

Поэтому условие $V_0 < \infty$ выполняется при $\gamma < 1$ и не выполняется, если $\gamma \geq 1$. Таким образом, согласно приведенным выше результатам из [3, 4] для сходимости интеграла

$$\int_0^1 |w(x)|x^{-\gamma}\,dx \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно условие $\gamma < 1$.

Будем отдельно рассматривать случаи, когда $\gamma < 1$ и $\gamma \geq 1$.

Если $0 < \gamma < 1$, то интеграл (2.5) сходится и мы будем использовать теорему 3 при $m = \infty$ (говоря точнее, при $m \to \infty$).

Для $\gamma < 1$ можно считать $\tau = 1$, а в теореме 3 брать любое $s \geq 0$.

Из (2.2) и (2.3) находим

$$U(l,\infty) = O\left(\sum_{p=l}^{\infty} a^p b^{(\gamma-1)p}\right) = O(a^l b^{(\gamma-1)l}). \tag{2.6}$$

Оценим первый остаточный член формулы (1.23). Так как соответствующая сумма имеет вид

$$\sum_{k=1}^{l} a^k b^{(k-l)s} b^{(\gamma-1)l} = b^{(\gamma-1-s)l} \sum_{k=1}^{l} (ab^s)^k,$$

то, взяв в качестве s наименьшее натуральное число, при котором $ab^s > 1$, получим, что первый остаточный член в (1.23) есть $O(a^l b^{(\gamma-1)l})$, т.е. для него справедлива та же оценка, что и для второго остаточного члена.

Пользуясь теоремой 3 при $\tau = 1$, мы можем в представлении (1.30) величины $\tilde{J}_s(l,\infty)$ опустить вторую сумму в фигурных скобках. Поэтому

$$\int_0^{b^{-l}} |w(x)|x^{-\gamma}\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} \cos\frac{\pi i}{2} \sum_{k=1}^{l-1} a^k b^{ik} \int_0^{b^{-l}} x^{i-\gamma}\,dx + O(a^l b^{(\gamma-1)l}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!(i+1-\gamma)} \cos\frac{\pi i}{2} \sum_{k=1}^{l-1} a^k b^{ik} b^{-(i+1-\gamma)l} + O(a^l b^{(\gamma-1)l}). \tag{2.7}$$

Согласно выбору числа s имеем $ab^{s-1} \leq 1$. Если $ab^{s-1} < 1$, то из (2.7) получаем

$$\int_0^{b^{-l}} |w(x)|x^{-\gamma}\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!(i+1-\gamma)} \cos\frac{\pi i}{2} \frac{ab^i}{1-ab^i} b^{-(i+1-\gamma)l} + O(a^l b^{(\gamma-1)l}). \tag{2.8}$$

А если $ab^{s-1} = 1$, то $s \geq 2$ и

$$\int_0^{b^{-l}} |w(x)|x^{-\gamma}\,dx = \sum_{i=0}^{s-2} \frac{1}{i!(i+1-\gamma)} \cos\frac{\pi i}{2} \frac{ab^i}{1-ab^i} b^{-(i+1-\gamma)l} +$$

$$+\frac{1}{(s-1)!(s-\gamma)}\cos\frac{\pi}{2}(s-1)b^{(\gamma-s)l}l+O(a^l b^{(\gamma-1)l}). \tag{2.9}$$

Формулы (2.8) и (2.9) дают решение задачи для $\gamma < 1$.

Пусть теперь $\gamma \geq 1$. Так как в этом случае интеграл (2.5) расходится, то будем пользоваться теоремой 3 при $l = 1$. Тогда первый остаточный член в (1.23) есть $O(1)$ при любом s.

Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$U(1,m)=O\left(\sum_{p=1}^{m-1}a^p b^{(\gamma-1)p}\right)=\begin{cases} O(1), & \text{если } ab^{\gamma-1}<1,\\ O(m), & \text{если } ab^{\gamma-1}=1,\\ O(a^m b^{(\gamma-1)m}), & \text{если } ab^{\gamma-1}>1.\end{cases} \tag{2.10}$$

Функция $x^{-\gamma} \in \Phi^*_\tau$ для $\tau > \gamma$, а s должно удовлетворять условию $s \geq \tau - 1$. Поэтому можно взять $s = [\gamma]$.

Асимптотические формулы для $\tilde{J}_s(1,m)$ имеют более простой вид, если γ — не целое число. Рассмотрим этот случай подробно.

Имеем

$$\tilde{J}_s(1,m)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!}\cos\frac{\pi i}{2}\sum_{k=1}^{m-1}a^k b^{ik}\int_{b^{-m}}^{b^{-k}}x^{i-\gamma}\,dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!(\gamma-i-1)}\cos\frac{\pi i}{2}b^{(\gamma-i-1)m}\sum_{k=1}^{m-1}a^k b^{ik}+O\left(\sum_{k=1}^{m-1}a^k b^{(\gamma-1)k}\right). \tag{2.11}$$

Заметим, что остаточный член этой формулы уже встречался при оценке величины $U(1,m)$, см. (2.10).

Рассматривая главный член оценки (2.11), будем различать случаи, когда $ab^{s-1} < 1$ и $ab^{s-1} \geq 1$.

Если $ab^{s-1} < 1$, то для всех $i \leq s-1$ имеем

$$b^{(\gamma-i-1)m}\sum_{k=1}^{m-1}a^k b^{ik}=b^{(\gamma-i-1)m}\sum_{k=1}^{\infty}a^k b^{ik}+$$

$$+O(b^{(\gamma-i-1)m}a^m b^{mi})=\frac{ab^i}{1-ab^i}b^{(\gamma-i-1)m}+O(a^m b^{(\gamma-1)m}). \tag{2.12}$$

Поэтому теорема 3 и оценки (2.10) и (2.11) показывают, что в этом случае

$$\int_{b^{-m}}^{1}|w(x)|x^{-\gamma}\,dx=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!(\gamma-i-1)}\cos\frac{\pi i}{2}\frac{ab^i}{1-ab^i}b^{(\gamma-i-1)m}+$$

$$+\begin{cases} O(1), & \text{если } ab^{\gamma-1}<1,\\ O(m), & \text{если } ab^{\gamma-1}=1,\\ O(a^m b^{(\gamma-1)m}), & \text{если } ab^{\gamma-1}>1.\end{cases} \tag{2.13}$$

Если же $ab^{s-1} \geq 1$, то $ab^{\gamma-1} > 1$ и $s \geq 2$. Обозначим через d число, при котором $ab^{d-1} = 1$. Тогда $s \geq d > 1$. Положим $s_0 = [d]$.

Для слагаемых из главного члена оценки (2.11), соответствующих $i < d-1$, мы можем использовать соотношение (2.12). А если $i > d-1$, то

$$b^{(\gamma-i-1)m} \sum_{k=1}^{m-1} a^k b^{ik} = O(b^{(\gamma-i-1)m} a^m b^{mi}) = O(a^m b^{(\gamma-1)m}),$$

т.е. в правой части (2.11) слагаемые с такими i можно отнести к остаточному члену.

Таким образом, если d — не целое число, то из теоремы 3 и оценок (2.10) и (2.11) получаем

$$\int_{b^{-m}}^{1} |w(x)| x^{-\gamma}\, dx = \sum_{i=0}^{s_0-1} \frac{1}{i!(\gamma-i-1)} \cos\frac{\pi i}{2} \frac{ab^i}{1-ab^i} b^{(\gamma-i-1)m} + O(a^m b^{(\gamma-1)m}), \quad (2.14)$$

а если d — целое, то

$$\int_{b^{-m}}^{1} |w(x)| x^{-\gamma}\, dx = \sum_{i=0}^{s_0-2} \frac{1}{i!(\gamma-i-1)} \cos\frac{\pi i}{2} \frac{ab^i}{1-ab^i} b^{(\gamma-i-1)m} +$$

$$+ \frac{1}{(s_0-1)!(\gamma-s_0)} \cos\frac{\pi(s_0-1)}{2} b^{(\gamma-s_0)m} m + O(a^m b^{(\gamma-1)m}). \quad (2.15)$$

Итак, если γ — не целое число, $\gamma > 1$, то решение задачи дают формулы (2.13)–(2.15).

Если γ — целое, то $s = \gamma$ и вместо (2.11) получаем

$$\tilde{J}_s(1,m) = \sum_{i=0}^{\gamma-2} \frac{1}{i!(\gamma-i-1)} \cos\frac{\pi i}{2} b^{(\gamma-i-1)m} \sum_{k=1}^{m-1} a^k b^{ik} +$$

$$+ \frac{1}{(\gamma-1)!} \cos\frac{\pi(\gamma-1)}{2} \log b \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) a^k b^{(\gamma-1)k} + O\left(\sum_{k=1}^{m-1} a^k b^{(\gamma-1)k}\right). \quad (2.16)$$

Рассмотрим сумму

$$B_m := \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) a^k b^{(\gamma-1)k}. \quad (2.17)$$

Если $ab^{\gamma-1} < 1$, то

$$B_m = m \sum_{k=1}^{m-1} (ab^{\gamma-1})^k + O(1) = \frac{ab^{\gamma-1}}{1-ab^{\gamma-1}} m + O(1). \quad (2.18)$$

Если $ab^{\gamma-1} = 1$, то

$$B_m = \sum_{k=1}^{m-1}(m-k) = \frac{m^2}{2} + O(m). \tag{2.19}$$

А если $ab^{\gamma-1} > 1$, то

$$B_m = O(a^m b^{(\gamma-1)m}), \tag{2.20}$$

что следует из оценок

$$\sum_{k=1}^{m-1} ma^k b^{(\gamma-1)k} = m(ab^{\gamma-1})^m \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(ab^{\gamma-1})^k} = m(ab^{\gamma-1})^m \frac{1}{ab^{\gamma-1}-1} + O(m)$$

и

$$\sum_{k=1}^{m-1} k(ab^{\gamma-1})^k = \frac{ab^{\gamma-1}}{ab^{\gamma-1}-1}((m-1)(ab^{\gamma-1})^{(m-1)} - 1) = \frac{m-1}{ab^{\gamma-1}-1}(ab^{\gamma-1})^m + O(1).$$

Преобразование сумм $\sum_{k=1}^{m-1} a^k b^{ik}$ из (2.16) при $i = 0, 1, \ldots, \gamma - 1$ не требует новых соображений по сравнению со случаем нецелых γ. Не будем останавливаться на этом и приведем только результаты для $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$:

$$\int_{b^{-m}}^{1} |w(x)| x^{-1}\, dx = \frac{a \log b}{1-a} m + O(1), \tag{2.21}$$

$$\int_{b^{-m}}^{1} |w(x)| x^{-2}\, dx = \frac{a}{1-a} b^m + \begin{cases} O(1), & \text{если } ab < 1, \\ O(m), & \text{если } ab = 1, \\ O(a^m b^m), & \text{если } ab > 1. \end{cases} \tag{2.22}$$

Поступило в мае 1993 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weiss M.* A theorem on lacunary trigonometric series //Orthogonal expansions and their continuous analogues: Proc. Conf. South. Ill. Univ. (Edwardsville, 1967). Carbondale (Ill.): SIU press, 1968. P. 227–230.
2. *Boas R.P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. Heidelberg etc.: Springer, 1967.
3. *Балашов Л.А., Теляковский С.А.* Некоторые свойства лакунарных тригонометрических рядов и интегрируемость тригонометрических рядов //Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 32–41.
4. *Belov A.S.* On some local properties of the sum of lacunary trigonometric series //Anal. Math. 1988. Vol. 14. P. 65–97.