Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. С. Никольский, Неравенства между различными полунормами дифференцируемых функций многих переменных,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 239–264

https://www.mathnet.ru/tm2488

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
20 июля 2025 г., 03:44:05

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Ю. С. НИКОЛЬСКИЙ

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ПОЛУНОРМАМИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье изучаются полунормированные пространства $L_p^l(E^n)$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ дифференцируемых функций многих переменных.

В работе [1] и при $p = q$ в работе [2] получено неравенство

$$\| D^\nu (f - P_{l-1}) \|_{L_q(E^n)} \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \| D_i^{l_i} f \|_{L_p(E^n)} = c \| f \|_{L_p^l(E^n)}, \tag{1}$$

где $P_{l-1} = P_{l-1}(x;\ f)$ — некоторый многочлен степеней не выше $l_i - 1$ по x_i $(i = 1, \ldots, n)$, линейно зависящий от f,

$$1 < p \leqslant q < \infty, \qquad 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \nu_i \right) = 0. \tag{2}$$

В настоящей работе устанавливаются подобные по характеру неравенства между различными полунормами дифференцируемых функций, характеризующие свойства производных функций из рассматриваемых пространств или их следов на m-мерных координатных подпространствах E^m. При этом в левых частях неравенств, так же как и в (1), присутствуют некоторые многочлены. Доказательство базируется на интегральных представлениях производных функций из рассматриваемых пространств или конечных разностей от этих производных через некоторые многочлены и заданные производные или конечные разности от производных. Вывод этих представлений осуществляется с помощью интегральных представлений функций через их производные и конечные разности от этих производных, полученных В. П. Ильиным [3].

Доказываются также теоремы о продолжении функций из пространств $b_p^{r(\tilde{\sigma})}(E^m)$ в пространства $L_p^l(E^n)$ и $b_p^{l(\sigma)}(E^n)$, причем в полунормах, стоящих в левых частях соответствующих оценок, вообще говоря, присутствуют некоторые многочлены. Продолжение функций осуществляется на одно измерение с помощью усреднений функций, параметром которых служит новая переменная (см. [4]).

Неравенство (1) верно для произвольной функции f, для которой конечна его правая часть. Заметим, что для функций $f \in W_p^l(E^n) = L_p(E^n) \cap L_p^l(E^n)$ при условиях (2) известно неравенство

$$\| D^\nu f \|_{L_q(E^n)} \leqslant c \| f \|_{L_p^l(E^n)} \tag{3}$$

(см. [4] при $p \neq q$). Неравенство (3) не имеет места для всех функций f с конечной правой частью, его обобщением является неравенство (1).

Устанавливаемые в работе неравенства обобщают известные неравенства, сопровождающие теоремы вложения с предельным показателем для пространств $W_p^l(E^n)$, $B_{p,\theta}^l(E^n)$, в том же направлении, в каком неравенство (1) обобщает неравенство (3).

Для вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$ с целыми положительными координатами рассмотрим пространство $L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функций $f(x)$, имеющих обобщенные по С. Л. Соболеву производные $D_i^l f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ на E^n с конечной полунормой

$$\|f\|_{L_p^l(E^n)} = \sum_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i} f\|_{L_p(E^n)}, \tag{4}$$

где E^n — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\|f\|_{L_p(E^n)}^p = \int_{E^n} |f(x)|^p dx, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad \|f\|_{L_\infty(E^n)} = \sup_{x \in E^n} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Рассмотрим пространство $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, функций $f(x)$, имеющих обобщенные производные $D_i^{k_i} f(x)$ на E^n с конечной полунормой

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^\infty \|\Delta_i^{s_i}(t) D_i^{k_i} f\|_{L_p(E^n)}^\theta \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-k_i)}} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \tag{5}$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i = s_i + k_i > l_i > k_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$$\Delta_i^s(t) f(x)| = \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} C_s^j f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + jt, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$\|f\|_{b_{p,\infty}^{l(\sigma)}(E^n)} = \sum_{i=1}^{n} \sup_{t>0} \operatorname{vrai} t^{-l_i+k_i} \|\Delta_i^{s_i}(t) D_i^{k_i} f\|_{L_p(E^n)}. \tag{6}$$

Аналогично определяются полунормированные пространства $L_p^l(\Omega)$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(\Omega)$ функций, определенных на области $\Omega \subset E^n$. Полунормы в этих пространствах определяются, как и в пространствах $L_p^l(E^n)$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, но с заменой интегрирования по E^n интегрированием по Ω, а конечной разности $\Delta_i^s(t) D_i^{k_i} f$ на $\Delta_i^{s_i}(t; \Omega) D_i^{k_i} f$, где $\Delta_i^s(t; \Omega)\varphi(x) = \Delta_i^s(t)\varphi(x)$, если $[x + ste_i] \subset \Omega$, и $\Delta_i^s(t; \Omega)\varphi(x) = 0$, если $[x + ste_i] \not\subset \Omega$ (e_i — координатный вектор i-го направления). Пусть еще $W_p^l(\Omega) = L_p(\Omega) \cap L_p^l(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $B_{p,\theta}^l(\Omega) = L_p(\Omega) \cap b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(\Omega)$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$.

Будем говорить, что функция f локально на E^n принадлежит пространству W_p^l или $B_{p,\theta}^l$, если для любого $R > 0$, $f \in W_p^l(E_R^n)$, соответственно $f \in B_{p,\theta}^l(E_R^n)$, где $E_R^n = \{x\colon |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < R\}$.

Введем следующие обозначения: $1 \leqslant m \leqslant n$, $x^{(m)} = (x_1, \ldots, x_m)$, $x^{(n)} = x$; $x = (x^{(m)}, x')$, $x' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, если $1 \leqslant m < n$, $(x^{(n)}, x') = x$; $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$, $\varkappa_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varkappa^{(m)} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$, $\varkappa^{(n)} = \varkappa$,

$$|\varkappa^{(m)}| = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m; \ \frac{x}{h^\varkappa} = \left(\frac{x_1}{h^{\varkappa_1}}, \ldots, \frac{x_n}{h^{\varkappa_n}}\right), \quad h > 0; \ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n),$$

$$\nu_i \geqslant 0 \text{ целые } (i = 1, \ldots, n), \ D^\nu = D_{x_1}^{\nu_1} \ldots D_{x_n}^{\nu_n}, \ (\nu, \varkappa) = \sum_1^n \nu_i \varkappa_i;$$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$ целые

$(i = 1, \ldots, n)$; $\alpha \leqslant l$, если $\alpha_i \leqslant l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sigma - 1 = (\sigma_1 - 1, \ldots, \sigma_n - 1)$; $E_+^n = \{x : x_n > 0\}$, $E^m = \{x: x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$, если $1 \leqslant m < n$; $1/p + 1/p' = 1$, $b_p^{l(\sigma)}(E^n) = b_{p,p}^{l(\sigma)}(E^n)$.

Для простоты записи вместо неравенства $A \leqslant cB$, где $A = A(f)$, $B = B(f)$ — некоторые выражения, содержащие функцию f рассматриваемого класса, c — положительная постоянная, не зависящая от f, будем писать $A \ll B$. Если под знаком интеграла область интегрирования Ω не указана, то это означает, что $\Omega = E^n$.

Через $L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ будем обозначать пространство измеримых на E_+^{n+1} функций $F(x, t)$, для которых конечна норма

$$\| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})} = \| \| F \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(E_+^1)}.$$

Везде в дальнейшем будем считать, что $\varkappa_i = 1/l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, $1 - |\varkappa|/p - \mu < 0$ (*при* $\theta = 1$ *возможно* и $1 - |\varkappa|/p - \mu = 0$), $F \in L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$,

$$J_{\varepsilon,h}(x) = \int_\varepsilon^h v^{-\delta_i - \mu}\, dv \iint t^{1/\theta + l_i - k_i} T_i\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{t}{v^{\varkappa_i}}\right) F(x + y, t)\, dy\, dt, \tag{7}$$

где $0 < \varepsilon < h \leqslant \infty$, $T_i(y, t)$ — *кусочно-непрерывные финитные функции, сосредоточенные в кубе* $\{0 < \delta < y_j < 1, j = 1, \ldots, n, \delta < t < 1\}$, $l_i > k_i$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i\varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\sup_{x \in E^n} |J_{\varepsilon,h}(x)| \ll \varepsilon^{1 - \frac{|\varkappa|}{p} - \mu} \left(\int_{\delta\varepsilon^{\varkappa_i}}^\infty \| F \|_{L_p(E^n)}^\theta dt \right)^{1/\theta}. \tag{8}$$

Доказательство неравенства (8) при $1 - |\varkappa|/p - \mu < 0$ вытекает из свойств функции $T_i(x, t)$ и последовательного применения неравенства Гёльдера к внутренним интегралам в (7). Неравенство (8) при $\theta = 1$, $1 - |\varkappa|/p - \mu = 0$ доказывается с помощью перемены порядка интегрирования в интеграле (7), интегрирования по v и применения неравенства Гёльдера.

Во всех приводимых ниже интегральных представлениях функций будем считать, что

$$D^\nu f_0(x) = D^\nu f(x),$$

где $D^\nu f$ — обобщенная производная функции f порядка ν $(D^0 f = f)$.

Для функций из пространств $L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, для любого вектора ν имеют место следующие интегральные представления В. П. Ильина [3]:

$$D^\nu f_\varepsilon(x) = D^\nu f_h(x) + (-1)^{|\nu|} \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^h \frac{dv}{v^{|\varkappa| + (\nu, \varkappa)}} \int \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}\right) D_i^{l_i} f(x + y)\, dy, \tag{9}$$

$$D^\nu f_\varepsilon(x) = D^\nu f_h(x) + (-1)^{|\nu|} \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^h \frac{dv}{v^{\delta_i + (\nu, \varkappa)}} \iint T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{t}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$
$$\times \Delta_i^{s_i}\left(\frac{t}{s_i}\right) D_i^{k_i} f(x + y)\, dy dt. \tag{10}$$

Здесь $0 < \varepsilon < h < \infty$, причем если $(\nu, \varkappa) < 1$, то $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i\varkappa_i$,

$$D^\nu f_h(x) = (-1)^{|\nu|} h^{-|\varkappa|-(\nu,\varkappa)} \int \Phi_0^{(\nu)}\left(\frac{y}{h^\varkappa}\right) f(x+y)\,dy,$$

$$\Phi_0(y) = \prod_{j=1}^{n} \frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}} \left[\frac{y_j^{\beta_j-1}}{(\beta_j-1)!} \int_0^{y_j} K_j(t)\,dt\right],$$

где β_j — достаточно большие натуральные числа, $K_j(t) = [a_j(t)]^2$, функции $a_j(t) \in C_0^\infty(E^1)$ сосредоточены на интервале $0 < \delta < t < 1$ и обладают свойством

$$\int K_j(t)\,dt = 1,$$

$\Phi_i(x)$, $T_i(x, t)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные соответственно в кубах $\{\delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ и $\{\delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \delta < t < 1\}$, $\delta > 0$.

Равенства (9), (10) при $\varepsilon = 0$ выполняются для почти каждого $x \in E^n$. Для функций $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < \infty$, в равенстве (9) возможно и $\varepsilon = 0$ при $(\nu, \varkappa) = 1$. В этом случае сходимость внешних интегралов правой части (9) понимается в смысле сходимости в $L_p(E^n)$ (см. [1]). Для функций $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ при $p = \infty$ и $\theta = 1$ в равенстве (10) возможно и $\varepsilon = 0$ при $(\nu, \varkappa) = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1 - |\varkappa|/p$). *Тогда при* $h \to \infty$ $D^\nu f_h(x)$ *и каждый из интегралов в представлении* (10) *сходится равномерно на* E^n; *при этом, если* $\nu_j \geqslant \sigma_j = s_j + k_j$ *при некотором* j, *то* $D^\nu f_h(x) \to 0$, $h \to \infty$ *равномерно на* E^n.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы следует из (10) и леммы 1.

Пользуясь свойствами функции $\Phi_0(y)$ и интегральным равенством из работы [3], выражающим интеграл от произведения функции f на некоторое ядро через интеграл от произведения конечной разности функции f на некоторое другое ядро, можно показать, что при $\nu_j \geqslant s_j + k_j$

$$D^\nu f_h(x) = h^{-|\varkappa|-\varkappa_j-(\nu,\varkappa)+k_j\varkappa_j} \iint T\left(\frac{y}{h^\varkappa}, \frac{t}{h^{\varkappa_j}}\right) \Delta_j^{s_j}\left(\frac{t}{s_j}\right) D_j^{k_j} f(x+y)\,dy\,dt,$$

где $T(y, t)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая финитная функция с носителем в кубе $\{0 < \delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \delta < t < 1\}$. Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получим

$$|D^\nu f_h(x)| \leqslant h^{1-\frac{|\varkappa|}{p}-(\nu,\varkappa)} \left(\int_{\delta h^{\varkappa_j/s_j}}^{\infty} \|\Delta_j^{s_j}(t) D_j^{k_j} f\|_{L_p(E^n)}^\theta \frac{dt}{t^{1+\theta(l_j-k_j)}}\right)^{1/\theta} \to 0, \quad h \to \infty,$$

что и доказывает вторую часть утверждения леммы.

Лемма 3. *Для всякой функции* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, *существует многочлен*

$$P_{\sigma-1}(x; f) = \sum_{\alpha \leqslant \sigma-1} c_\alpha x^\alpha, \tag{11}$$

$c_\alpha = 0$ *при* $(\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - |\varkappa|/p$ (*при* $\theta = 1$ $c_\alpha = 0$, *если* $(\alpha, \varkappa) < 1 - |\varkappa|/p$), (12)

степеней не выше $\sigma_i - 1$ *по* x_i $(i = 1, \ldots, n)$ *такой, что при* $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1 - |\varkappa|/p$) *равномерно на* E^n

$$D^\nu f_h(x) \to D^\nu P_{\sigma-1}(x; f), \qquad h \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Положим

$$c_\alpha = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f_h(0), (\alpha, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p \quad (\text{при } \theta = 1\, (\alpha, \varkappa) \geqslant 1 - |\varkappa|/p). \tag{14}$$

По лемме 2 эти пределы существуют и $c_\alpha = 0$ при $\alpha \nleqslant \sigma - 1$.

Разложим $D^\nu f_h(x)$ при $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ (при $\theta = 1$ $(\nu, \varkappa) \geqslant 1 - |\varkappa|/p$) в точке $x = 0$ по формуле Тейлора по степеням x до достаточно высокого порядка. Отсюда, пользуясь (14) и замечая, что при $\nu \nleqslant \sigma - 1$ по лемме 2 $D^\nu f_h(x)$ равномерно на E^n стремится к нулю, легко показать, что соотношение (13) выполняется на всяком компакте $K \subset E^n$ в смысле равномерной сходимости, а значит, в силу леммы 2 (13) выполняется также равномерно и на E^n.

Лемма 4. *Для любой функции* $f \in b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, *существует многочлен* $P_{\sigma-1}(x; f)$ *вида* (11), (12), (14), *линейно зависящий от* f, *такой, что*

$$\Delta_j^{\tilde{s}}(t) D^\nu [f_\varepsilon(x) - P_{\sigma-1}(x; f)] = (-1)^{|\nu|} \int_\varepsilon^\infty \sum_{i=1}^n v^{-\delta_i - (\nu, \varkappa)} \Delta_j^{\tilde{s}}(t) \iint T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$

$$\times \Delta_i^{s_i}\left(\frac{\tau}{s_i}\right) D_i^{k_i} f(x + y)\, dy\, d\tau\, dv \tag{15}$$

при $\varepsilon \geqslant 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa) < 1$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j = (\nu, \varkappa)$, *а при* $p = \infty$ *и* $\theta = 1$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1$) *и при* $\varepsilon > 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa)$ (*при* $\theta = 1$ $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j \leqslant (\nu, \varkappa)$). *При этом, если* $\varepsilon = 0$, *то равенство* (15) *выполняется для любого фиксированного* t *при почти всех* $x \in E^n$.

Доказательство. Пусть $\tilde{s} = 0$ $(\Delta_j^0(t) f = f)$. Перейдя в равенстве (10) к пределу при $h \to \infty$, в силу леммы 3 получаем равенство (15).

Пусть $\tilde{s} > 0$. Беря от обеих частей равенства (10) конечную разность $\tilde{s}$ порядка по переменной x_j, заменяя $\Delta_j^{\tilde{s}}(t) D^\nu f_h(x)$ через

$$\int_0^t \ldots \int_0^t D_j^{\tilde{s}} D^\nu f_h(x_1, \ldots, x_j + \zeta_1 + \ldots + \zeta_{\tilde{s}}, \ldots, x_n)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{\tilde{s}},$$

переходя в полученном равенстве при фиксированных x и t к пределу при $h \to \infty$, на основании леммы 3 получим (15).

Пусть $f \in L_p^l(E^n)$ и

$$P_{l-1}(x; f) = \sum_{\alpha \leqslant l-1} c_\alpha x^\alpha, \tag{16}$$

$$c_\alpha = 0 \text{ при } (\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - |\varkappa|/p \ (\text{при } p = 1\ c_\alpha = 0, \text{ если } (\alpha, \varkappa) < 1 - |\varkappa|/p), \tag{17}$$

$$c_\alpha = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f_h(0) \text{ при } (\alpha, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p \ (\text{при } p = 1\, (\alpha, \varkappa) \geqslant 1 - |\varkappa|/p). \tag{18}$$

Пределы (18) существуют (см. [1]).

С помощью представления (9) доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Для любой функции* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *существует многочлен* $P_{l-1}(x; f)$ *вида* (16)—(18), *линейно зависящий от* f, *такой, что*

$$\Delta_j^{\tilde{s}}(t) D^\nu [f_\varepsilon(x) - P_{l-1}(x; f)] = (-1)^{|\nu|} \int_\varepsilon^\infty \sum_{i=1}^n v^{-|\varkappa|-(\nu,x)} \times$$

$$\times \Delta_j^{\tilde{s}}(t) \int \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}\right) D_i^{l_i} f(x+y)\, dy\, dv \quad (19)$$

при $\varepsilon \geqslant 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa) < 1$ (*при* $1 < p < \infty$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1$, *а при* $p = 1$ *возможно и* $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j = (\nu, \varkappa)$) *и при* $\varepsilon > 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa)$ (*при* $p = 1$ $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j \leqslant (\nu, \varkappa)$). *При этом, если* $\varepsilon = 0$, *то равенство* (19) *выполняется для любого фиксированного* t *при почти всех* $x \in E^n$.

Эта лемма при $\tilde{s} = 0$ доказана О. В. Бесовым [1].

Пусть $f(x)$ — измеримая на E^n функция, $E_R^m = \{x^{(m)}: |x^{(m)}| < R\}$, $m < n$. Функцию $\varphi(x^{(m)})$ назовем следом функции f на E^m и будем писать $\varphi = f|_{E^m}$, если f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что после этого для видоизмененной функции (которую снова обозначим через f) при некотором q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, для любого $R > 0$ и достаточно малого $\delta > 0$ будут выполняться следующие свойства:

1) $f(x^{(m)}, x') \in L_p(E_R^m)$, $\quad |x'| < \delta$;

2) $f(x^{(m)}, 0) = \varphi(x^{(m)})$;

3) $\| f(x^{(m)}, x') - \varphi(x^{(m)}) \|_{L_q(E_R^m)} \to 0$, $\quad |x'| \to 0$.

Определенный таким образом след f на E^m единственен с точностью до эквивалентности в смысле E^m.

Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$, $F \in L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$,

$$J(x) = \int_0^\infty \int \frac{F(x+y, t)\, t^\varepsilon\, dy\, dt}{[\rho(y) + t^{1/a}]^{\lambda + a\varepsilon}},$$

где $a > 0$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = \frac{|\varkappa|}{p'} + \frac{a}{\theta'} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}$, $\rho(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^{1/\varkappa_i}$. Тогда (см. [5, с. 257]), если выполнено одно из условий: 1) $\theta = 1$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$; 2) $1 < \theta \leqslant q$, $1 \leqslant p < q < \infty$, то

$$\| J(x^{(m)}, x') \|_{L_q(E^m)} \leqslant c \| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})}, \quad (20)$$

где постоянная c не зависит от f и x'.

В приводимых ниже теоремах, если нет оговорок, считаем $1 \leqslant m \leqslant n$ и в этом случае условимся, что $D^\nu f|_{E^n} = D^\nu f(x)$. Под нормой $\| D^\nu f \|_{L_p(E^m)}$ и полунормой $\| D^\nu f \|_{b_{p,\theta}^{r(\sigma)}(E^m)}$ понимаются норма и полунорма следа $D^\nu f|_{E^m}$ соответственно в смысле пространств $L_p(E^m)$ и $b_{p,\theta}^{r(\sigma)}(E^m)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) = 0$, *и либо* $\theta = 1$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *либо* $1 < \theta \leqslant q$, $1 \leqslant p < q < \infty$. *Пусть еще* $P_{\sigma-1} = P_{\sigma-1}(x; f)$ — *многочлен из* (11), (12), (14). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$ *и выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{\sigma-1}) \|_{L_p(E^m)} \leqslant \| f \|_{a_{q,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \quad (21)$$

Если $\varepsilon_m < 0$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, *то при любом* $\varepsilon > 0$

$$\| D^{\nu}(f_{\varepsilon} - P_{\sigma-1}) \|_{L_q(E^m)} \leqslant c\varepsilon^{\varepsilon_m} \| f \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)}, \tag{22}$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* ε.

Доказательство. Для любой производной $D^{\nu}f$, порядок которой удовлетворяет условиям теоремы, в силу (15) для почти каждого $x \in E^n$ справедливо представление

$$D^{\nu}[f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)] = (-1)^{|\nu|} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{n} v^{-\delta_i - (\nu, \varkappa)} \iint t^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^{\varkappa}}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$
$$\times F_i(x + y, \tau)\, dy\, d\tau\, dv, \tag{23}$$

где $F_i(y, \tau) = \Delta_i^{s_i}\left(\frac{\tau}{s_i}\right) D_i^{k_i} f(y) / \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i}$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i \varkappa_i$.

Обозначим правую часть равенства (23) через $\Phi(x)$. С помощью свойств функций $T_i(y, \tau)$, неравенства Гёльдера, перемены порядка интегрирования, интегрирования по v и неравенства (20) получим для любого x'

$$\| \Phi(x^{(m)}, x') \|_{L_q(E^m)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_0^{\infty} \int \frac{t^{l_i - k_i} \| F_i(x^{(m)} + y^{(m)}, y', t) \|_{L_p(E^{n-m})}\, dy^{(m)}\, dt}{[\rho(y^{(m)}) + t^{1/\varkappa_i}]^{\lambda_i + \varkappa_i(l_i - k_i)}} \right\|_{L_q(E^m)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \| F_i \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})} \leqslant \| f \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)}, \tag{24}$$

где $\rho(y^{(m)}) = \sum_1^m |y_i|^{1/\varkappa_i}$, $\lambda_i = \frac{|\varkappa^{(m)}|}{p'} + \frac{\varkappa_i}{\theta'} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}$.

Из (24) следует оценка (21) для функции $\Phi(x^{(m)}, 0)$. Так как $D^{\nu}(f - P_{\sigma-1}) = \Phi$ для почти каждого $x \in E^n$, то неравенство (21) при $m = n$ доказано. Для завершения доказательства неравенства (21) при $m < n$ достаточно показать, что функция $\Phi(x^{(m)}, 0)$ является следом функции $D^{\nu}(f - P_{\sigma-1})$ на E^m.

В силу оценки (20) и непрерывности по сдвигу пространства $b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$ при $1 \leqslant p, \theta < \infty$ получим при $|x'| \to 0$

$$\| \Phi(x^{(m)}, x') - \Phi(x^{(m)}, 0) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \| f(y^{(m)}, y' + x') - f(y^{(m)}, y') \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)} \to 0. \tag{25}$$

При $\theta = 1$ и $p = \infty$ имеем при $|x'| \to 0$

$$\| \Phi(x^{(m)}, x') - \Phi(x^{(m)}, 0) \|_{L_\infty(E^m)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \int \frac{t^{l_i - k_i} |F_i(y^{(m)}, y' + x', t) - F_i(y^{(m)}, y', t)|\, dy\, dt}{[\rho(y) + t^{1/\varkappa_i}]^{|\varkappa| + \varkappa_i(l_i - k_i)}} \to 0, \tag{26}$$

так как интегралы

$$\int_0^{\infty} \int \frac{t^{l_i - k_i} |F_i(y, t)|\, dy\, dt}{[\rho(y) + t^{1/\varkappa_i}]^{|\varkappa| + \varkappa_i(l_i - k_i)}}$$

конечны на основании неравенства (20).

Из определения функции $\Phi(x)$ и из (24)—(26) следует, что $\Phi(x^{(m)}, 0)$ есть след $D^{\nu}(f - P_{\sigma-1})$ на E^m.

Неравенство (22) устанавливается с помощью представления (15), обобщенного неравенства Минковского, неравенства Гёльдера с показателями q, $pq/(q-p)$, p' и обычного неравенства Гёльдера.

Заметим, что для данной функции $f \in b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < \theta \leqslant \infty$, существует не более одного многочлена вида

$$P_{\sigma-1}(x) = \sum_{\alpha \leqslant \sigma-1} c_\alpha x^\alpha, \qquad c_\alpha = 0 \text{ при } (\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - \frac{|\varkappa|}{p},$$

для которого конечны левые части (21), (22). В самом деле, если предположить, что существуют два таких многочлена $P_{\sigma-1}(x)$ и $P^*_{\sigma-1}(x)$, то для любого вектора ν удовлетворяющего условиям $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ и $\nu \leqslant \sigma - 1$ можно указать такое $q = q(\nu) \in [p, \infty)$, что выполняется включение

$$D^{\nu}[P_{\sigma-1}(x) - P^*_{\sigma-1}(x)] \in L_{q(\nu)}(E^n),$$

а это возможно лишь в случае равенства коэффициентов этих многочленов $c_\alpha = c^*_\alpha$ при всех $\alpha \leqslant \sigma - 1$.

Для полноты изложения приведем теорему для пространства $L^l_p(E^n)$, содержащую в себе неравенство (1) (см. [5, с. 224]).

Теорема (О. В. Бесов). *Пусть* $f \in L^l_p(E^n)$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) = 0$, *и либо* $m = n$, $1 < p \leqslant q < \infty$, *либо* $m < n$, $1 < p < q < \infty$, *либо* $p = 1, q = \infty$. *Пусть еще* $P_{l-1} = P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16)—(18). *Тогда существует след* $D^{\nu}f|_{E^m}$ *и выполняется неравенство*

$$\| D^{\nu}(f - P_{l-1}) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \| f \|_{L^l_p(E^n)}. \tag{27}$$

Если $\varepsilon_m < 0$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то при любом* $\varepsilon > 0$

$$\| D^{\nu}(f_\varepsilon - P_{l-1}) \|_{L_q(E^m)} \leqslant c\varepsilon^{\varepsilon_m} \| f \|_{L^l_p(E^n)}, \tag{28}$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* ε.

Для данной функции $f \in L^l_p(E^n)$, $1 < p < \infty$, существует не более одного многочлена вида

$$P_{l-1}(x) = \sum_{\alpha \leqslant l-1} c_\alpha x^\alpha, \qquad c_\alpha = 0 \text{ при } (\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - \frac{|\varkappa|}{p},$$

для которого конечны левые части (27), (28).

Замечание 1. Пусть функция $f \in L^l_p(E^n)$ (соответственно $f \in b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$) и $f \in L_q(E^n)$, $1 \leqslant q < \infty$. Тогда многочлен $P_{l-1}(x; f)$ из (16)—(18) (соответственно $P_{\sigma-1}(x; f)$ из (11), (12), (14)) тождественно равен нулю. Это утверждение остается верным и при $q = \infty$, если дополнительно потребовать $1 - |\varkappa|/p \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant \infty$ (соответственно $1 < \theta \leqslant \infty$) и $1 - |\varkappa|/p > 0$ при $p = 1$ (соответственно $\theta = 1$).

Доказательство замечания вытекает из определения коэффициентов многочленов $P_{l-1}(x; f)$, $P_{\sigma-1}(x; f)$ и неравенства

$$|D^{\nu}f_h(x)| \leqslant h^{-\frac{|\varkappa|}{q} - (\nu, \varkappa)} \| f \|_{L_q(E^n)}.$$

Лемма 6. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \tilde{\theta} \leqslant \infty$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - \mu > 0, r_j = l_j \varepsilon_m$, $\bar{s}_j + \tilde{K}_j > r_j > \tilde{K}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, $F \in L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$,

$$g_{i,j}(x, t) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{\delta_i + \mu + \tilde{k}_j \varkappa_j}} \Delta_j^{s_j}(t) \iint \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} T_i\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) F(x + y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

где $T_i(y, t) \in C_0^\infty(E^{n+1})$ *и сосредоточены в кубе* $\{0 < y_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ 0 < t < 1\}$, $l_i > k_i - 1$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i \varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\| t^{-\frac{1}{\tilde{\theta}} - r_j + \tilde{k}_j} g_{i,j}(x^{(m)}, x', t) \|_{L_{q,\tilde{\theta}}(E_+^{m+1})} \leqslant c \| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})},$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* x'.

Доказательство. Применяя обобщенное неравенство Минковского, пользуясь оценками

$$\| \Delta_j^{s_j}(t) f \|_{L_q(E^m)} \leqslant \| f \|_{L_q(E^m)}, \tag{29}$$

$$\| \Delta_j^{s_j}(t) f \|_{L_q(E^m)} \leqslant t^{s_j} \| D_j^{s_j} f \|_{L_q(E^m)}, \tag{30}$$

перенося дифференцирование на ядро, получим

$$\| g_{i,j}(x, t) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \int_0^{t^{l_j}} \frac{dv}{v^{\delta_i + \mu + \tilde{k}_j \varkappa_j}} \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} \times$$

$$\times \Big\| \int_{0 < y_i < v^{\varkappa_i}} |F(x + y, \tau)|\, dy \Big\|_{L_q(E^m)} d\tau +$$

$$+ \int_{t^{l_j}}^\infty \frac{t^{\tilde{s}_j} dv}{v^{\delta_i + \mu + \tilde{k}_j \varkappa_j + s_j \varkappa_j}} \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} \Big\| \int_{0 < y_i < v^{\varkappa_i}} |F(x + y, \tau)|\, dy \Big\|_{L_q(E^m)} d\tau. \tag{31}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера для трех функций $F^{p/q}$, $F^{(q-p)/q}$, 1 с показателями q, $pq/(q - p)$, p', найдем

$$\Big\| \int_{0 < y_i < v^{\varkappa_i}} |F(x + y, \tau)|\, dy \Big\|_{L_q(E^m)} \leqslant v^{\frac{|\varkappa|}{p'} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}} \| F(y, \tau) \|_{L_p(E^n)}. \tag{32}$$

Для дальнейшей оценки нам потребуются неравенства Харди. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $\lambda = 1/p' + 1/q$. Тогда

$$\Big\| x^{-\beta} \int_0^x f(t)\, dt \Big\|_{L_q(E_+^1)} \leqslant \| x^{-\beta+\lambda} f(x) \|_{L_p(E_+^1)}, \qquad \beta > \frac{1}{q}, \tag{33}$$

$$\Big\| x^{-\beta} \int_x^\infty f(t)\, dt \Big\|_{L_q(E_+^1)} \leqslant \| x^{-\beta+\lambda} f(x) \|_{L_p(E_+^1)}, \qquad \beta < \frac{1}{q}. \tag{34}$$

Пользуясь оценками (31), (32) и делая замену переменной $\tilde{t} = t^{l_j}$, применяя неравенства Харди, делая замену переменной $\tilde{t} = t^{\varkappa_i}$, применяя нера-

венство Харди (33), получим

$$\| t^{-\frac{1}{\tilde\theta}-r_j+\tilde k_j} g_{i,j}(x,t)\|_{L_{q,\tilde\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-(r_j-\tilde k_j)\varkappa_j-\frac{1}{\tilde\theta}} \int_0^t v^{-2+\varepsilon_m+k_i\varkappa_i-\tilde k_j\varkappa_j-\varkappa_i}\, dv \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)}\, d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} +$$

$$+ \left\| t^{-(r_j-\tilde k_j)\varkappa_j-\frac{1}{\tilde\theta}+\tilde s_j\varkappa_j} \int_t^\infty v^{-2+\varepsilon_m+k_i\varkappa_i-\tilde k_j\varkappa_j-\varkappa_i-\tilde s_j\varkappa_j} dv \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \|F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)}\, d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-1+k_i\varkappa_i-\varkappa_i-\frac{1}{\tilde\theta}} \int_0^{t^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)}\, d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-1+k_i-l_i-\frac{1}{\tilde\theta}} \int_0^t \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)}\, d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} \leqslant \| F\|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \tilde\theta \leqslant \infty$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) > 0$, $r = (r_1 \ldots, r_m)$, $\tilde\sigma = (\tilde\sigma_1, \ldots, \tilde\sigma_m)$, $r_j = l_j\varepsilon_m$, $\tilde\sigma_j = \tilde s_j + \tilde k_j > r_j > \tilde k_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. *Пусть еще* $P_{\sigma-1}(x; f)$ — *многочлен из* (11), (12), (14). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$, *и выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{\sigma-1})\|_{b_{q,\tilde\theta}^{r(\tilde\sigma)}(E^m)} \leqslant \| f\|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \tag{35}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$1 - \frac{|\varkappa|}{p} - \tilde S_j\varkappa_j < \tilde K_j\varkappa_j + (\nu, \varkappa) < 1, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Поэтому в силу (15) справедливо представление

$$\Delta_j^{\tilde s_j}(t) D_j^{\tilde k_j} D^\nu [f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)] =$$

$$= (-1)^{|\nu|+\tilde k_j} \int_0^\infty \sum_{i=1}^n v^{-\delta_i-(\nu,\varkappa)-\tilde k_j\varkappa_j} \Delta_j^{\tilde s_j}(t) \iint \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} D_j^{\tilde k_j} T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$

$$\times F_i(x+y, \tau)\, dy\, d\tau\, dv, \tag{36}$$

где $F_i(y,\tau) = \Delta_i^{s_i}\left(\frac{\tau}{s_i}\right) D_i^{k_i} f(y) \Big/ \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i}$, $\qquad \delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i\varkappa_i$.

Обозначим правую часть равенства (36) через $\Phi_j(x, t)$. С помощью леммы 6 для любого $j = 1, \ldots, m$ получим

$$\| t^{-\frac{1}{\tilde\theta}-r_j+\tilde K_j} \Phi_j(x^{(m)}, x', t)\|_{L_{q,\tilde\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant \| f\|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \tag{37}$$

Так как $\Delta_j^{\tilde s_j}(t) D_j^{\tilde k_j} D^\nu (f - P_{\sigma-1}) = \Phi_j(x, t)$ для любого фиксированного t при почти всех $x \in E^n$, то при $m = n$ из (37) следует неравенство (35).

Пусть $m < n$ и $f^*(x) = f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)$. Для функции f^* на основании (10) для любого фиксированного t при почти всех $x \in E^n$ имеет место пред-

ставление

$$\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\, D_j^{\tilde{k}_j} D^\nu f^*(x) = \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\, D_j^{\tilde{k}_j} D^\nu f_h^*(x) +$$
$$+ (-1)^{|\nu|+\tilde{k}_j} \sum_{i=1}^{n} \int_0^h v^{-\delta_i-(\nu,\varkappa)-\tilde{k}_j\varkappa_j} \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t) \iint \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} D_j^{\tilde{k}_j} T_i^{(\nu)} \times$$
$$\times \left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) F_i(x+y, \tau)\, dy\, d\tau\, dv, \tag{38}$$

где $F_i(y, \tau)$ и δ_i такие же, как и в (36), ν, $\tilde{k}_j$ и $\tilde{s}_j$ удовлетворяют условиям теоремы.

Обозначим правую часть равенства (38) через $\Psi_j(x, t)$. Функция f^* принадлежит локально на E^n пространству $B^l_{p,\theta}$. Отсюда следует, что существуют следы $D^\nu f^*|_{E^m}$, $D_j^{\tilde{k}_j} D^\nu f^*|_{E^m}$, причем

$$\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\, D_j^{\tilde{k}_j}[D^\nu f^*|_{E^m}] = \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\, [D_j^{\tilde{k}_j} D^\nu f^*|_{E^m}] = \Psi_j(x^{(m)}, 0, t). \tag{39}$$

В силу неравенства (37) и (39) для завершения доказательства теоремы при $m < n$ достаточно показать, что для любого фиксированного $t > 0$

$$\Phi_j(x^{(m)}, 0, t) = \Psi_j(x^{(m)}, 0, t) \text{ при почти всех } x^{(m)} \in E^m. \tag{40}$$

С помощью леммы 6 при $\tilde{\theta} = \infty$ можно показать, что для q, удовлетворяющего условиям теоремы, и любого $t > 0$ при $|x'| \to 0$

$$\|\Phi_j(x^{(m)}, x', t) - \Phi_j(x^{(m)}, 0, t)\|_{L_q(E^m)} \to 0, \qquad 1 \leqslant q < \infty, \tag{41}$$

$$|\Phi_j(x^{(m)}, x', t) - \Phi_j(x^{(m)}, 0, t)| \to 0, \qquad q = \infty, \qquad x^{(m)} \in E^m. \tag{42}$$

Так как функция f^* принадлежит локально на E^n пространству $B^l_{p,\theta}$, то отсюда будет следовать, что для q, удовлетворяющего условиям теоремы, и любого $t > 0$ при $|x'| \to 0$

$$\|\Psi_j(x^{(m)}, x', t) - \Psi_j(x^{(m)}, 0, t)\|_{L_q(E^m_R)} \to 0, \qquad 1 \leqslant q < \infty, \tag{43}$$

для любого $R > 0$,

$$|\Psi_j(x^{(m)}, x', t) - \Psi_j(x^{(m)}, 0, t)| \to 0, \qquad q = \infty, \qquad x^{(m)} \in E^m. \tag{44}$$

Замечая, что $\Phi_j(x^{(m)}, x', t) = \Psi_j(x^{(m)}, x', t)$ для любого фиксированного $t > 0$ при почти всех $x \in E^n$, с помощью соотношений (41)—(44) легко получить (40). Теорема доказана.

Замечание 2. Пусть $\tilde{\sigma}_i = \tilde{s}_i + \tilde{k}_i \geqslant \sigma_i > l_i > \tilde{k}_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда из теоремы 2 следует, что на функциях пространства $b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, эквивалентны все полунормы вида (5)—(6) при различных $\tilde{s}_i, \tilde{k}_i$. Поэтому в полунормах (5)—(6) можно считать, что $k_i = 0$, $\sigma_i = s_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Отметим также, что при $\tilde{\sigma}_i = \tilde{s}_i + \tilde{k}_i > l_i > \tilde{k}_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ на функциях пространства $b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, удовлетворяющих условиям замечания 1, эквивалентны все полунормы вида (5)—(6) при различных $\tilde{s}_i, \tilde{k}_i, \tilde{\sigma}_i$.

Лемма 7. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant m < n$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - \mu > 0$, $r_j = l_j \varepsilon_m$, $\tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j =$

$= 1, \ldots, m)$, $f \in L_p(E^n)$,

$$g_j(x,t) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{|\varkappa|+\mu+\tilde{k}_j\varkappa_j}} \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t) \int \Phi\left(\frac{y}{v^\varkappa}\right) f(x+y)\,dy,$$

где $\Phi(y) \in C_0^\infty(E^n)$ *и сосредоточена в кубе* $\{0 < \delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ *Тогда*

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - r_j + \tilde{k}_j} g_j(x^{(m)}, x', t) \|_{L_{q,\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant c \| f \|_{L_p(E^n)},$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* x'.

Доказательство. Рассуждая аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 6, получим

$$\| g_j(x,t) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \int_0^{t^{l_j}} \frac{dv}{v^{1-\varepsilon_m+\tilde{k}_j\varkappa_j+\frac{\varkappa_n}{p'}+\varepsilon\varkappa_n}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n +$$

$$+ \int_{t^{l_j}}^\infty \frac{t^{\tilde{s}_j} dv}{v^{1-\varepsilon_m+\tilde{k}_j\varkappa_j+\frac{\varkappa_n}{p'}+\varepsilon\varkappa_n+\tilde{s}_j\varkappa_j}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n, \qquad \varepsilon > 0. \tag{45}$$

Пользуясь оценкой (45) и делая замену переменной $\tilde{t} = t^{l_j}$, применяя неравенства Харди (33), (34), делая замену переменной $\tilde{t} = t^{\varkappa_n}$, применяя неравенство Харди (33), получим

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - r_j + \tilde{k}_j} g_j(x,t) \|_{L_{q,\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-(r_j-\tilde{k}_j)\varkappa_j - \frac{1}{\theta}} \int_0^t v^{-1+\varepsilon_m-\tilde{k}_j\varkappa_j-\frac{\varkappa_n}{p'}-\varepsilon\varkappa_n} dv \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{v^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \right\|_{L_\theta(E_+^1)} +$$

$$+ \left\| t^{-(r_j-\tilde{k}_j)\varkappa_j - \frac{1}{\theta} + \tilde{s}_j\varkappa_j} \int_t^\infty v^{-1+\varepsilon_m-\tilde{k}_j\varkappa_j-\frac{\varkappa_n}{p'}-\varepsilon\varkappa_n-\tilde{s}_j\varkappa_j} dv \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{v\varkappa_n} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \right\|_{L_\theta(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-\frac{1}{\theta} - \frac{\varkappa_n}{p'} - \varepsilon\varkappa_n} \int_0^{t^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \right\|_{L_\theta(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p'} - \varepsilon} \int_0^t y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \right\|_{L_\theta(E_+^1)} \leqslant \| f \|_{L_p(E^n)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant m < n$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) > 0$, $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_m)$, $r_j = l_j\varepsilon_m$, $\tilde{\sigma}_j = \tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. *Пусть еще* $P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16)—(18). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$, *и*

выполняется неравенство

$$\| D^{\nu}(f - P_{l-1})\|_{b^{r(\tilde{\sigma})}_{\tilde{q},\,\theta}(E^m)} \leqslant \| f \|_{L^l_p(E^n)}. \tag{46}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Вместо леммы 6 и интегральных представлений (15), (10) нужно воспользоваться леммой 7 и интегральными представлениями (19), (9).

Пусть $1 < p < q \leqslant \infty$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\lambda = 1/p' + 1/q$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ (при $q = \theta = \infty$ возможно и $p = 1$; при $q = \theta = \infty$, $p = 1$ возможно и $\beta = 0$), $f \in L_p(E^1)$,

$$K_1(y,t) = \begin{cases} |y|^{-\lambda+\beta\gamma}|t|^{-\frac{1}{\theta}-\beta}, & |y|^{\gamma} \leqslant |t|, \\ 0, & |y|^{\gamma} > |t|; \end{cases}$$

$$K_2(y,t) = \begin{cases} |y|^{-\lambda-\beta\gamma}|t|^{-\frac{1}{\theta}+\beta}, & |y|^{\gamma} > |t|, \\ 0, & |y|^{\gamma} \leqslant |t|. \end{cases}$$

Тогда (см. [5, с. 39])

$$\left\| \int f(y) K_i(y-x,t)\,dt \right\|_{L_{q,\theta}(E^2)} \leqslant \| f \|_{L_p(E^n)}, \qquad i = 1, 2. \tag{47}$$

Лемма 8. *Пусть* $1 < p < q \leqslant \infty$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$ (*при* $q = \theta = \infty$ *возможно и* $p = 1$), $\varepsilon_n = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa|}{q} - \mu > 0$, $r_j = l_j\varepsilon_n$, $\tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $f \in L_p(E^n)$,

$$g_j(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^{|\varkappa|+\mu+\tilde{k}_j\varkappa_j}} \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t) \int \Phi\left(\frac{y}{v^{\varkappa}}\right) f(x+y)\,dy,$$

где $\Phi(y) \in C_0^{\infty}(E^n)$ *и сосредоточена в кубе* $\{0 < \delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$. *Тогда*

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-r_j+\tilde{k}_j} g_j(x^{(m)}, x', t) \|_{L_{q,\theta}(E^{n+1}_+)} \leqslant c \| f \|_{L_p(E^n)}, \tag{48}$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* x'.

Доказательство. Поступая, как и при оценке (45), с помощью перемены порядка интегрирования будем иметь

$$\| g_j(x,t) \|_{L_q(E^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^{t^{l_j}} \int_{\delta v^{\varkappa_n} < y_n < v^{\varkappa_n}} \frac{\| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n\,dv}{v^{1-\varepsilon_n+\lambda\varkappa_n+\tilde{k}_j\varkappa_j}} \right\|_{L_q(E^1)} +$$

$$+ t^{\tilde{s}_j} \left\| \int_{t^{l_j}}^{\infty} \int_{\delta v^{\varkappa_n} < y_n < v^{\varkappa_n}} \frac{\| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n\,dv}{v^{1-\varepsilon_n+\lambda\varkappa_n+(\tilde{k}_j+\tilde{s}_j)\varkappa_j}} \right\|_{L_q(E^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{|y_n| < t^{l_j\varkappa_n}} \frac{\| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n}{|y_n|^{\lambda-\delta l_n}} \int_0^{t^{l_j}} \frac{dv}{v^{1-(r_j-\tilde{k}_j)\varkappa_j+\delta}} \right\|_{L_q(E^1)} +$$

$$+ t^{\tilde{s}_j} \left\| \int_0^{\infty} \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n \int_{\max\{y_n^{l_n},\, t^{l_j}\}}^{\infty} \frac{dv}{v^{1+\lambda\varkappa_n+(\tilde{k}_j+\tilde{s}_j-r_j)\varkappa_j}} \right\|_{L_q(E^1)}, \tag{49}$$

где $\lambda = 1/p' + 1/q$, $0 < \tilde{\delta} < (r_j - \tilde{k}_j)\varkappa_j$. Отсюда, предварительно проинтегрировав по v в каждом слагаемом последней части (49), получим

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - r_j + \tilde{k}_j} g_j(x, t) \|_{L_{q,\theta}(E_+^{n+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| \int\limits_{|y_n|^{l_n \varkappa_j} < |t|} |y_n|^{-\lambda + \tilde{\delta} l_n} |t|^{-\frac{1}{\theta} - \tilde{\delta} l_j} \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \Big\|_{L_{q,\theta}(E^2)} +$$

$$+ \Big\| \int |t|^{-\frac{1}{\theta} + \tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j} [|y_n|^{l_n} + |t|^{l_j}]^{-\lambda \varkappa_n - (\tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j)\varkappa_j} \times$$

$$\times \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \Big\|_{L_{q,\theta}(E^2)}. \tag{50}$$

Полагая $\mu_j = \tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j$ и замечая, что

$$\frac{|t|^{-\frac{1}{\theta} + \mu_j}}{[|y_n|^{l_n} + |t|^{l_j}]^{\lambda \varkappa_n + \mu_j \varkappa_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} |y_n|^{-\lambda + \delta_1 l_n \varkappa_j} |t|^{-\frac{1}{\theta} - \delta_1}, & |y_n|^{l_n \varkappa_j} \leqslant |t|, \quad 0 < \delta_1 \leqslant \varkappa_n l_j \lambda, \\ |y_n|^{-\lambda - \delta_2 l_n \varkappa_j} |t|^{-\frac{1}{\theta} + \delta_2}, & |y_n|^{l_n \varkappa_j} > |t|, \quad 0 < \delta_2 \leqslant \tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j, \end{cases}$$

на основании оценки (50) с помощью оценки (47) (при $q = \theta = \infty$, $p = 1$ полагаем $\delta_1 = 0$) получаем неравенство (48).

Теорема 4. *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < q \leqslant \infty$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$ (*при* $q = \theta = \infty$ *возможно и* $p = 1$), $\varepsilon_n = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa|}{q} - (\nu, \varkappa) > 0$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $r_j = l_j \varepsilon_n$, $\tilde{\sigma}_j = \tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ ($j = 1, \ldots, n$). *Пусть еще* $P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16)—(18). *Тогда выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{l-1}) \|_{b_{q,\theta}^{r(\tilde{\sigma})}(E^n)} \leqslant \| f \|_{L_p^l(E^n)}. \tag{51}$$

Для доказательства этой теоремы надо воспользоваться представлением (19) и оценить с помощью леммы 8 каждый из интегралов его правой части.

Замечание 3. Если $\nu_j + \tilde{\sigma}_j \geqslant \sigma_j$ или $\nu_j + \tilde{\sigma}_j \geqslant l_j$ ($j = 1, \ldots, m$), то многочлены $P_{\sigma-1}(x; f)$ или $P_{l-1}(x; f)$ в неравенствах (35) или (46), (51) можно не писать, так как они исчезают при взятии соответствующих производных и конечных разностей в левых частях этих неравенств.

Пусть функция φ локально суммируемая на E^{n-1}. Рассмотрим в полупространстве E_+^n функцию

$$F_s(x) = x_n^{-|\bar{\lambda}| + s} \int \Omega\left(\frac{\bar{y}}{x_n^{\bar{\lambda}}}\right) \varphi(\bar{x} + \bar{y})\, d\bar{y} = R_s[\varphi], \tag{52}$$

где s — неотрицательное целое число, $\bar{y} = y^{(n-1)}$, $\bar{\lambda} = \lambda^{(n-1)}$, $\lambda_j > 0$ ($j = 1, \ldots, n-1$),

$$\Omega(\bar{y}) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}} \left[\frac{y_j^{\beta_j - 1}}{(\beta_j - 1)!} \int\limits_0^{y_j} K_j(t)\, dt \right],$$

где $K_j(t) = [a_j(t)]^2$, функции $a_j(t) \in C_0^\infty(E^1)$ и сосредоточены на интервале $0 < \delta < t < 1$, β_j — достаточно большие натуральные числа,

$$\int K_j(t)\,dt = 1.$$

Лемма 9. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon = 1 - \frac{s}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0$, $s \geqslant 0$ *целое*, $\varphi \in b_p^{r(\bar\sigma)}(E^{n-1})$, $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $r_j = \varepsilon l_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $\bar\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. *Тогда для функции* $F_s(x)$ (52) *при* $\lambda_j = l_n \varkappa_j$ *имеет место неравенство*

$$\| F_s \|_{b_p^{l(\sigma)}(E_+^n)} \ll \| \varphi \|_{b_p^{r(\bar\sigma)}(E^{n-1})}. \tag{53}$$

Доказательство. В силу замечания 2 для получения неравенства (53) достаточно оценить

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(t) F_s \|^p_{L_p(E_+^n)}\, dt}{t^{1+pl_j}} \right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty \frac{\| \Delta_n^k(t)\, D_n^s F_s \|^p_{L_p(E_+^n)}\, dt}{t^{1+p(l_n - s)}} \right)^{1/p} = \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{1/p} + A_n^{1/p}, \tag{54}$$

где $k + s = \sigma_n$.

Имеем

$$A_j = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+pl_j}} \int_0^{t^{1/\lambda_j}} \| \Delta_j^{\sigma_j}(t) F_s \|^p_{L_p(E^{n-1})}\, dx_n + \\ + \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+pl_j}} \int_{t^{1/\lambda_j}}^\infty \| \Delta_j^{\sigma_j}(t) F_s \|^p_{L_p(E^{n-1})}\, dx_n = J_1 + J_2. \tag{55}$$

С помощью обобщенного неравенства Минковского получим

$$J_1 \ll \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(t)\, \varphi(\bar x) \|^p_{L_p(E^{n-1})}\, dt}{t^{1+pl_j}} \int_0^{t^{1/\lambda_j}} x_n^{sp}\, dx_n \ll \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(t)\, \varphi(\bar x) \|^p_{L_p(E^{n-1})}\, dt}{t^{1+pr_j}}. \tag{56}$$

Далее (см. [3]),

$$D_j^{\sigma_j} F_s(\bar x, x_n) = \\ = \frac{(-1)^{\sigma_j}}{x_n^{\sigma_j \lambda_j - s}} \int \varphi(\bar x + x_n^{\bar\lambda} \bar y) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left(\frac{y_i^{\beta_i - 1}}{(\beta_i - 1)!} \int_0^{y_i} K_i(t)\, dt \right) \times \\ \times \frac{d^{\sigma_j}}{dy_j^{\sigma_j}} \left[\frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}} \left(\frac{y_j^{\beta_j - 1}}{(\beta_j - 1)!} \int_0^{y_j} K_j(t)\, dt \right) \right] d\bar y = \\ = \frac{1}{x_n^{|\bar\lambda| - s + (\sigma_j + 1)\lambda_j}} \iint T_j \left(\frac{\bar y}{x_n^{\bar\lambda}}, \frac{\tau}{x_n^{\lambda_j}} \right) \Delta_j^{\sigma_j} \left(\frac{\tau}{\sigma_j} \right) \varphi(\bar x + \bar y)\, d\bar y\, d\tau, \tag{57}$$

где $T_j(\bar y, \tau)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая на E^n функция, сосредоточенная в кубе $\{0 < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1,\ 0 < \tau < 1\}$.

Пользуясь равенством (57), оценкой (30), обобщенным неравенством Минковского и неравенством Гёльдера, меняя порядок интегрирования и интегрируя по t и x_n, получим

$$J_2 \ll \int_0^\infty \frac{t^{\sigma_j p} dt}{t^{1+pl_j}} \int_{t^{1/\lambda_j}}^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(\sigma_j\lambda_j-s)p}} \int_0^{x_n^{\lambda_j}} \left\| \Delta_j^{\sigma_j}\left(\frac{\tau}{\sigma_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left\| \Delta_j^{\sigma_j}\left(\frac{\tau}{\sigma_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau \int_{\tau^{1/\lambda_j}}^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(\sigma_j\lambda_j-s)p}} \int_0^{x_n^{\lambda_j}} \frac{dt}{t^{1+(l_j-\sigma_j)p}} \ll$$

$$\ll \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(\tau)\varphi(\bar{x})\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau}{\tau^{1+pr_j}}. \tag{58}$$

Покажем теперь, как оценивается последнее слагаемое в (54). Интеграл A_n разбиваем на два:

$$A_n = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+p(l_n-s)}} \int_0^t \| \Delta_n^k(t) D_n^s F_s\|^p_{L_p(E^{n-1})} dx_n +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+p(l_n-s)}} \int_t^\infty \| \Delta_n^k(t) D_n^s F_s\|^p_{L_p(E^{n-1})} dx_n = J_3 + J_4. \tag{59}$$

При оценке J_3 воспользуемся тем, что

$$D_n^s F_s(\bar{x}, x_n) = s!\,\varphi(\bar{x}) + \int_0^{x_n} D_\zeta^{s+1} F_s(\bar{x}, \zeta)\, d\zeta$$

для почти всех $\bar{x} \in E^{n-1}$. Отсюда следует, что

$$|\Delta_n^k(t) D_n^s F_s(\bar{x}, x_n)| \ll \int_0^{(k+1)t} |D_\zeta^{s+1} F_s(\bar{x}, \zeta)|\, d\zeta. \tag{60}$$

Непосредственным подсчетом показывается, что

$$D_\zeta^s F_s(\bar{x}, \zeta) = \sum_\nu \frac{c_\nu}{\zeta^{(\nu, \bar{\lambda})}} \int \varphi(\bar{x} + \bar{y}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left[\frac{y_i^{\beta_i-1+\nu_i}}{(\beta_i-1)!} K_i^{(\nu_i-1)}\left(\frac{y_i}{\zeta^{\lambda_i}}\right)\right] d\bar{y}, \tag{61}$$

где суммирование ведется по всем векторам $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1})$, координаты ν_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ которых независимо друг от друга принимают значения $0, 1, \ldots, s$; c_ν — некоторые постоянные. При $\nu_i = 0$ выражение, стоящее под знаком произведения в (61), надо заменить на

$$\frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left[\frac{y_i^{\beta_i-1}}{(\beta_i-1)!} \int_0^{y_i/\zeta^{\lambda_i}} K_i(t)\, dt\right].$$

Поступая, как и при выводе равенства (57), получим

$$D_\zeta^{s+1} F_s(\bar{x}, \zeta) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_\nu \frac{c_{\nu, j}}{\zeta^{1+\lambda_j}} \int \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left[\frac{y_i^{\beta_i-1}}{(\beta_i-1)!}\left(\frac{y_i}{\zeta^{\lambda_i}}\right)^{\nu_i} K_i^{(\nu_i-1)}\left(\frac{y_i}{\zeta^{\lambda_i}}\right)\right] \times$$

$$\times \frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}}\left[\frac{y_j^{\beta_j}}{(\beta_j-1)!}\frac{d}{dy_j/\zeta^{\lambda_j}}\left(\left(\frac{y_j}{\zeta^{\lambda_j}}\right)^{\nu_j}K_j^{(\nu_j-1)}\left(\frac{y_j}{\zeta^{\lambda_j}}\right)\right)\right]\varphi(\bar{x}+\bar{y})\,d\bar{y}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\nu}\frac{1}{\zeta^{1+|\bar{\lambda}|+\lambda_j}}\iint T_{\nu,j}\left(\frac{\bar{y}}{\zeta^{\bar{\lambda}}},\frac{\tau}{\zeta^{\lambda_j}}\right)\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x}+\bar{y})d\bar{y}\,d\tau, \qquad (62)$$

где $T_{\nu,j}(\bar{y},\tau)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные в кубе $\{0<x_i<1,\ i=1,\ldots,n-1,\ 0<\tau<1\}$, $c_{\nu,j}=-\lambda_j c_\nu$.

Пользуясь неравенством (60), равенством (62) и обобщенным неравенством Минковского, интегрируя по x_n и применяя неравенство Гёльдера для функций

$$\xi^{-(1+\lambda_j-\delta)1/p'},\quad \zeta^{-(1+\lambda_j)\frac{1}{p}-\frac{\delta}{p'}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|_{L_p(E^{n-1})},$$

$\delta>0$ (достаточно малое), меняя порядок интегрирования и интегрируя по ζ и t, считая, что $\beta_j\geqslant\sigma_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$, получим

$$J_3\ll\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+p(l_n-s)}}\int_0^t\left[\int_0^{(k+1)t}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|_{L_p(E^{n-1})}d\tau\right]^p dx_n\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{p(l_n-s)}}\left(\int_0^{(k+1)t}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j-\delta}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}d\tau\right)^{p/p'}\int_0^{(k+1)t}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j+\delta(p-1)}}\times$$

$$\times\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\ll\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\times$$

$$\times\int_{\tau^{1/\lambda_j}/(k+1)}^\infty\frac{dt}{t^{p(l_n-s)-\delta(p-1)}}\int_{\tau^{1/\lambda_j}}^\infty\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j+\delta(p-1)}}\ll\|\varphi\|^p_{b_p^{r(\bar{\sigma})}(E^{n-1})}. \qquad (63)$$

С помощью дифференцирования равенства (62) по ζ получим, что

$$|D_\zeta^{s+k}F_s(\bar{x},\zeta)|\ll\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\zeta^{k+|\bar{\lambda}|+\lambda_j}}\iint\limits_{\substack{0<y_i<\zeta^{\lambda_i}\\0<\tau<\zeta^{\lambda_j}}}\left|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x}+\bar{y})\right|d\bar{y}\,d\tau. \qquad (64)$$

Замечая, что

$$|\Delta_n^k(t)D_n^sF_s(\bar{x},\zeta)|\leqslant t^{k-1}\int_{x_n}^{x_n+kt}|D_\zeta^{s+k}F_s(\bar{x},\zeta)|\,d\zeta,$$

пользуясь оценкой (64) и обобщенным неравенством Минковского, применяя неравенство Гёльдера, меняя порядок интегрирования и интегрируя последовательно по ζ, t и x_n, найдем

$$J_4\ll\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{t^{(k-1)p}dt}{t^{1+p(l_n-s)}}\int_t^\infty\left[\int_{x_n}^{x_n+kt}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+\lambda_j}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|_{L_p(E^{n-1})}d\tau\right]^p dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty \frac{t^{(k-1)p}dt}{t^{1+p(l_n-s)}}\int_t^\infty dx_n\Big(\int_{x_n}^{x_n+kt}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+\lambda_j}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}d\tau\Big)^{p/p'}\int_{x_n}^{x_n+kt}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+\lambda_j}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar x)\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar x)\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\int_{\tau^{1/\lambda_j/(k+1)}}^\infty\frac{dx_n}{x_n^{kp+\lambda_j}}\int_0^{x_n}\frac{dt}{t^{2+p(l_n-s-k)}}\int_{x_n}^{x_n+kt}d\zeta\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|^p_{b_p^{\bar r}(\bar\sigma)(E^{n-1})}. \tag{65}$$

В силу (54) — (56), (58), (59), (63) и (65) получаем требуемую оценку (53).

Лемма 10. *Пусть* $1\leqslant p<\infty$, $l=(l_1,\ldots,l_n)$, $l_i>0$ *целые* $(i=1,\ldots,n)$, $\varepsilon=1-\frac{s}{l_n}-\frac{1}{pl_n}>0$, $s\geqslant 0$ *целое*, $\varphi\in b_p^{r(\bar l)}(E^{n-1})$, $r=(r_1,\ldots,r_{n-1})$, $r_j=\varepsilon l_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$, $\bar l=(l_1,\ldots,l_{n-1})$. *Тогда для функции* $F_s(x)$ (52) *при* $\lambda_j=l_n\varkappa_j$ *имеет место неравенство*

$$\|F_s\|_{L_p^l(E_+^n)}\leqslant\|\varphi\|_{b_p^{r(\bar l)}(E^{n-1})}. \tag{66}$$

Доказательство. С помощью (57), обобщенного неравенства Минковского и неравенства Гёльдера, перемены порядка интегрирования и интегрирования по x_n, для любого $j=1,\ldots,n-1$ получим

$$\|D_j^{l_j}F_s\|^p_{L_p(E_+^n)}\leqslant\int_0^\infty\frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(l_n-s)p}}\int_0^{x_n^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{l_j}\left(\frac{\tau}{l_j}\right)\varphi(\bar x)\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau=$$

$$=\int_0^\infty\left\|\Delta_j^{l_j}\left(\frac{\tau}{l_j}\right)\varphi(\bar x)\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\int_{\tau^{1/\lambda_j}}^\infty\frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(l_n-s)p}}\leqslant\int_0^\infty\frac{\|\Delta_j^{l_j}(\tau)\varphi(\bar x)\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau}{\tau^{1+pr_j}}. \tag{67}$$

В силу условий леммы $l_n\geqslant s+1$. Поэтому (см. (62)) имеем

$$|D_n^{l_n}F_s|=|D_n^{l_n-s}(D_n^sF_s)|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{x_n^{l_n-s+|\bar\lambda|+\lambda_j}}\iint\limits_{\substack{0<y_i<x_n^{\lambda_i}\\0<\tau<x_n^{\lambda_j}}}\left|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar x+\bar y)\right|d\bar y\,d\tau.$$

Отсюда, поступая, как и при оценке (67), и считая, что $\beta_j\geqslant l_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$, находим

$$\|D_n^{l_n}F_s\|^p_{L_p(E_+^n)}\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(l_n-s)p}}\int_0^{x_n^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar x)\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{\|\Delta_j^{\beta_j}(\tau)\varphi(\bar x)\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau}{\tau^{1+pr_j}}\leqslant\|\varphi\|^p_{b_p^{r(\bar l)}(E^{n-1})}. \tag{68}$$

В силу (67), (68) получаем требуемую оценку (66).

Теорема 5. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $l=(l_1,\ldots,l_n)$, $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\sigma_i>l_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$, $\varepsilon_s=1-\frac{s}{l_n}-\frac{1}{pl_n}>0$, $\varphi_s\in b_p^{r^{[s]}(\bar\sigma)}(E^{n-1})$, $r^{[s]}=(r_1^{[s]},\ldots,r_{n-1}^{[s]})$, $r_j^{[s]}=l_j\varepsilon_s$ $(s=0,1,\ldots,S,\ j=1,\ldots$

$\ldots, n-1)$, $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. *Тогда существует функция* $F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ *такая, что* $D_n^s F|_{E^{n-1}} = \varphi_s$ *и*

$$\|F\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \ll \sum_{s=0}^{S} \|\varphi_s\|_{b_p^{r[s](\bar{\sigma})}(E^{n-1})}. \tag{69}$$

Доказательство. Так как пространство $b_p^{l(\sigma)}(E_+^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, допускает линейное ограниченное распространение с E_+^n на E^n (см. [4]), то искомое продолжение достаточно осуществить в полупространство $x_n > 0$.

Рассмотрим интегральные операторы $R_s[\varphi]$, $s = 0, 1, \ldots, S$ (52). Для почти каждого $\bar{x} \in E^{n-1}$ имеем

$$\lim_{x_n \to +0} D_n^\mu R_s[\varphi] = \begin{cases} 0, & \mu < s, \\ s!\,\varphi(\bar{x}), & \mu = s. \end{cases} \tag{70}$$

Пользуясь теоремой 2 и леммой 9 (см. также замечание 3), получим

$$\|D_n^k R_s[\varphi_s]\|_{b_p^{r[k](\bar{\sigma})}(E^{n-1})} \ll \|R_s[\varphi_s]\|_{b_p^{l(\sigma)}(E_+^n)} \ll \|\varphi_s\|_{b_p^{r[s](\bar{\sigma})}(E^{n-1})},$$
$$s, k = 0, 1, \ldots, S. \tag{71}$$

В качестве искомой может быть взята функция

$$F = \sum_{k=0}^{S} \frac{1}{k!} R_k[\psi_k], \qquad \psi_k = \varphi_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} D_n^k R_i[\psi_i]|_{E^{n-1}}. \tag{72}$$

Учитывая (70), нетрудно видеть, что

$$D_n^s F|_{E^{n-1}} = \varphi_s, \qquad s = 0, 1, \ldots, S.$$

С помощью леммы 9 и неравенств (71) для функции F устанавливается неравенство (69), что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_s = 1 - \frac{s}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0$, $\varphi_s \in b_p^{r[s](\bar{l})}(E^{n-1})$, $r^{[s]} = (r_1^{[s]}, \ldots, r_{n-1}^{[s]})$, $r_j^{[s]} = l_j \varepsilon_s$ $(s = 0, 1, \ldots, S,\ j = 1, \ldots, n-1)$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_{n-1})$. *Тогда существует функция* $F \in L_p^l(E^n)$ *такая, что* $D_n^s F|_{E^{n-1}} = \varphi_s$ *и*

$$\|F\|_{L_p^l(E^n)} \ll \sum_{s=0}^{S} \|\varphi_s\|_{b_p^{r[s](\bar{l})}(E^{n-1})}. \tag{73}$$

Доказательство. Требуемое продолжение достаточно осуществить в полупространство $x_n > 0$, так как пространство $L_p^l(E_+^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, допускает линейное ограниченное распространение с E_+^n на E^n. В качестве искомой может быть взята функция (72). Неравенство (73) следует из леммы 10 и теоремы 3.

В формулировках приводимых ниже теорем будем считать, что $1 \leqslant m < n$, $\varepsilon_m^{[\nu]} = 1 - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\nu_j}{l_j} - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{l_j}$, $N = \{\nu \geqslant 0\colon\ \varepsilon_m^{[\nu]} > 0,\ \nu_1 = \ldots = \nu_m = 0\}$.

С помощью последовательного применения $n - m$ раз теоремы 5 (теоремы 6) доказываются следующие две теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\tilde{\sigma})}(E^m)$, $r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]})$, $r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]}$ $(\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. *Тогда существует функция* $F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde{\sigma})}(E^m)}.$$

Теорема 8. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\tilde{l})}(E^m)$,

$$r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]}),\ r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]} \qquad (\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m),$$
$$\tilde{l} = (l_1, \ldots, l_m).$$

Тогда существует функция $F \in L_p^l(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F\|_{L_p^l(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde{l})}(E^m)}.$$

Теорема 9. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)$, $r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]})$, $\sigma^{[\nu]} = (\sigma_1^{[\nu]}, \ldots, \sigma_m^{[\nu]})$, $\sigma_j^{[\nu]} > r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]}$ $(\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m)$, $P_{\sigma^{[\nu]}-1} = P_{\sigma^{[\nu]}-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu)$ — *многочлены из* (11), (12) *и* (14),

$$P(x) = \sum_{\nu \in N} \frac{x^\nu}{\nu!} P_{\sigma^{[\nu]}-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu). \tag{74}$$

Тогда существует функция $F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F - P\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)}. \tag{75}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 для функций $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)$ справедливы неравенства

$$\|\varphi_\nu - P_{\sigma^{[\nu]}-1}\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde{\sigma})}(E^m)} \leqslant \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)}, \qquad \tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m). \tag{76}$$

Далее, на основании теоремы 7 существует функция $\tilde{F} \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ такая, что $D^\nu \tilde{F}|_{E^m} = \varphi_\nu - P_{\sigma^{[\nu]}-1}$ и

$$\|\tilde{F}\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu - P_{\sigma^{[\nu]}-1}\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde{\sigma})}(E^m)}. \tag{77}$$

Полагая $F(x) = \tilde{F}(x) + P(x)$ и замечая, что $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$, с помощью неравенств (76) — (77) получим требуемую оценку (75).

Теорема 10. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)$, $r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]})$, $\sigma^{[\nu]} = (\sigma_1^{[\nu]}, \ldots, \sigma_m^{[\nu]})$, $\sigma_j^{[\nu]} > r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]}$ $(\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m)$, $P(x)$ — *многочлен* (74). *Тогда существует функция* $F \in L_p^l(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F - P\|_{L_p^l(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9. Вместо теоремы 7 надо воспользоваться теоремой 8.

Доказательство вышеприведенных теорем вложения для пространств $L_p^l(E^n)$ при $1 < p < \infty$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ при $1 < \rho, \theta < \infty$ можно провести дру-

гим способом. Этот способ базируется на известных теоремах вложения для пространств $W_p^l(E^n)$, $B_{p,\theta}^l(E^n)$ и следующих теоремах.

Теорема (О. В. Бесов [1]). *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < \infty$, $P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16) — (18) *и* $f^*(x) = f(x) - P_{l-1}(x; f)$. *Тогда существует последовательность* $\varphi_k \in C_0^\infty(E^n)$ *такая, что для любого* $R > 0$ *при* $k \to \infty$

$$\| \varphi_k - f^* \|_{L_p(|x|<R)} + \| \varphi_k - f^* \|_{L_p^l(E^n)} \to 0.$$

Теорема 11. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 < p$, $\theta < \infty$, $P_{\sigma-1}(x; f)$ — *многочлен из* (11), (12), (14) *и* $f^*(x) = f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)$. *Тогда существует последовательность* $\varphi_k \in C_0^\infty(E^n)$ *такая, что для любого* $R > 0$ *при* $k \to \infty$

$$\| \varphi_k - f^* \|_{L_p(|x|<R)} + \| \varphi_k - f^* \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)} \to 0. \tag{78}$$

Случай $p = \theta$ этой теоремы содержится в аналогичной теореме для весового пространства $b_{p,\alpha}^{l(\sigma)}(E^n)$ [6]. Доказательство в общем случае проводится по тому же плану, что и при $p = \theta$. Поэтому не проводя его целиком, остановимся лишь на доказательстве одной вспомогательной леммы, так как в доказательстве ее частного случая при $p = \theta$ в работе [6] имеется ошибка.

Лемма 11. *Всякий одночлен* x^α *аппроксимируется функциями* $C_0^\infty(E^n)$ *с любой точностью в норме*

$$\| f \|_{L_p(|x|<R)} + \| f \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}, \qquad R > 0, \tag{79}$$

если выполняется одно из условий: a) $(\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - |\varkappa|/p$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < \theta \leqslant \infty$; b) $(\alpha, \varkappa) < 1 - |\varkappa|/p$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Доказательство. Пусть $r = \sqrt[m]{x_1^{ml_1} + \ldots + x_n^{ml_n}}$, $m > \max\limits_i \frac{\sigma_i}{l_i}$, m четное, и $\psi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного $t \in E^1$, причем $\psi(t) = 1$, $t < 1/2$, $\psi(t) = 0$, $t > 1$.

Покажем, что при $\eta \to +\infty$ норма (79) разности

$$g_\eta(x) = x^\alpha - x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)$$

стремится к нулю. Этим лемма будет доказана.

Заметим, что в условиях леммы $l_i > \alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и для достаточно больших η $\|g_\eta\|_{L_p(|x|<R)} = 0$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - l_i + \alpha_i} \Delta_i^{\sigma_i - \alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})} \to 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{80}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\sigma_i = l_i + \delta_i$, $0 < \delta_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Положим $\varepsilon = 1 - (\alpha, \varkappa) - |\varkappa|/p$. В условиях леммы $\varepsilon \geqslant 0$. Отметим, что

$$\Delta_i^{\sigma_i - \alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) = \Delta_i^{\sigma_i - \alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} \left[x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right) \right].$$

Далее (см. [5, с. 227]), имеем при $\eta > 2$

$$\left| D_i^{\mu_i} \left[x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right) \right] \right| \leqslant \frac{c\,|x^\alpha|}{r^{\mu_i \varkappa_i} \ln \eta}, \qquad \alpha_i < \mu_i \leqslant \sigma_i. \tag{81}$$

Пользуясь оценкой (30), неравенством (81) и свойствами функции $\psi(t)$, переходя к обобщенным сферическим координатам (см. [5, с. 54]), получим при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(0<t<\eta^{\varkappa_i/2})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln\eta} \left(\int_0^{\eta^{\varkappa_i/2}} \frac{dt}{t^{1-\theta(\sigma_i-l_i)}} \right)^{1/\theta} \left\| \frac{x^\alpha}{r^{\sigma_i\varkappa_i}} \right\|_{L_p(\sqrt{\eta}<r<\eta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln\eta} \eta^{\frac{\varkappa_i(\sigma_i-l_i)}{2}} \left(\int_{\sqrt{\eta}}^{\eta} \frac{dr}{r^{\sigma_i\varkappa_i p-(\alpha,\varkappa)p-|\varkappa|+1}} \right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2}\ln\eta} \to 0. \tag{82}$$

Замечая, что при $\eta > 2$

$$\left| D_i^{\alpha_i} \left[x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln\eta}\right) \right] \right| \leqslant c \left| \frac{x^\alpha}{x_i^{\alpha_i}} \right|,$$

с помощью перехода к обобщенным сферическим координатам найдем при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(t>\eta^{2\varkappa_i})} \leqslant \frac{1}{\eta^{1-\alpha_i\varkappa_i+\varepsilon}} \to 0. \tag{83}$$

Докажем теперь, что при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2}<t<\eta^{2\varkappa_i})} \to 0.$$

Полагая $E_i^{n-1} = \{\bar{x} : \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}$, выражая конечную разность порядка $\sigma_i - \alpha_i$ от функции $D_i^{\alpha_i}[x^\alpha\psi(\ln r/\ln\eta)]$ через интеграл от производной порядка σ_i функции $x^\alpha\psi(\ln r/\ln\eta)$ и пользуясь неравенством (81), делая замену переменной $\zeta_j = tu_j$ $(j = 1, \ldots, \sigma_i - \alpha_i)$ и применяя обобщенное неравенство Минковского, последовательно оценивая интегралы по $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, сходящиеся в условиях леммы, и делая замену переменной $x_i = t(u_1 + \ldots + u_{\sigma_i-\alpha_i}) y_i$, замечая, что интеграл по $u_1, \ldots, u_{\sigma_i-\alpha_i}$ и интеграл по y_i сходятся в условиях леммы, получим при $\eta \to +\infty$

$$J(\eta) = \| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(x_i>0)} \|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2}<t<\eta^{2\varkappa_i})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln\eta} \left\{ \int_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int_0^\infty \int_{E_i^{n-1}} \left(\int_0^t \ldots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \ldots \int_0^t \frac{|x_1^{\alpha_1} \ldots (x_i+\zeta_1+\ldots+\zeta_{\sigma_i-\alpha_i})^{\alpha_i} \ldots x_n^{\alpha_n}| d\zeta_1 \ldots d\zeta_{\sigma_i-\alpha_i}}{\left(\sqrt[m]{x_1^{ml_1}+\ldots+(x_i+\zeta_1+\ldots+\zeta_{\sigma_i-\alpha_i})^{ml_i}+\ldots+x_n^{ml_n}}\right)^{\sigma_i\varkappa_i}} \right)^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln\eta} \left\{ \int_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\sigma_i)}} \left[\int_0^1 \ldots \int_0^1 du_1 \ldots du_{\sigma_i-\alpha_i} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int_0^\infty \int_{E_i^{n-1}} \frac{|x_1^{\alpha_1} \ldots (x_i+t(u_1+\ldots+u_{\sigma_i-\alpha_i}))^{\alpha_i} \ldots x_n^{\alpha_n}|^p d\bar{x}\, dx_i}{(|x_1|^{l_1}+\ldots+|x_i+t(u_1+\ldots+u_{\sigma_i-\alpha_i})|^{l_i}+\ldots+|x_n|^{l_n})^{\sigma_i\varkappa_i p}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\ll \frac{1}{\ln\eta}\left\{\int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta\varepsilon/\varkappa_i}}\left[\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 \frac{du_1\ldots du_{\sigma_i-\alpha_i}}{(u_1+\ldots+u_{\sigma_i-\alpha_i})^{\delta_i+\varepsilon/\varkappa_i}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_0^\infty \frac{dy_i}{(1+y_i)^{1+\delta_i p+\varepsilon p/\varkappa_i}}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \ll \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2}(\ln\eta)^{1/\theta'}}\to 0. \tag{84}$$

Положим $A=\sigma_i-\alpha_i$. С помощью замены переменной и с учетом (84) получаем, что при $\eta\to+\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i}\| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t)\, D_i^{\alpha_i} g_\eta(x)\|_{L_p(-\infty<x_i<-At)}\|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2}<t<\eta^{2\varkappa_i})} = J(\eta)\to 0. \tag{85}$$

При оценке выражения

$$J(\eta)=\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i}\| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t)\, D_i^{\alpha_i} g_\eta(x)\|_{L_p(-At<x_i<0)}\|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2}<t<\eta^{2\varkappa_i})}$$

при $\alpha_i\geqslant 1$ рассмотрим два случая.

I. Пусть

$$\alpha_i=\begin{cases}\sigma_i-1, & 0<\delta_i<1,\\ \sigma_i-2, & \delta_i=1.\end{cases}$$

Положим $\bar\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\ \alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$. С помощью неравенства Минковского и замены переменной получим

$$J(\eta)\ll\sum_{s=0}^{\alpha_i-1}\left\{\int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}}\frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}}\left[\int\limits_{-At}^{At}\int\limits_{E_i^{n-1}}\left|\bar x^{\bar\alpha}x_i^{\alpha_i-s}D_i^{\alpha_i-s}\psi\left(\frac{\ln r}{\ln\eta}\right)\right|^p d\bar x\,dx_i\right]^{\frac{\theta}{p}}\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+\left\{\int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}}\frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}}\left[\int\limits_{-At}^{0}\int\limits_{E_i^{n-1}}\left|\bar x^{\bar\alpha}\Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t)\,\psi\left(\frac{\ln r}{\ln\eta}\right)\right|^p d\bar x\,dx_i\right]^{\frac{\theta}{p}}\right\}^{\frac{1}{\theta}}=\sum_{s=0}^{\alpha_i-1}J_s(\eta)+J_{\alpha_i}(\eta). \tag{86}$$

Пользуясь неравенством

$$\left|x_i^{\alpha_i-s}D_i^{\alpha_i-s}\psi\left(\frac{\ln r}{\ln\eta}\right)\right|\leqslant\frac{c\,|x_i^{\alpha_i}|}{r^{\alpha_i\varkappa_i}\ln\eta},\qquad s=0,1,\ldots,\alpha_i-1,$$

делая последовательно замену переменной $t=\tau^{\varkappa_i}$ и $x_j=\tau^{\varkappa_j}y_j$ ($j=1,\ldots,n$), замечая, что полученный интеграл по $\bar y$, y_i в рассматриваемых предположениях сходится, имеем при $\eta\to+\infty$

$$J_s(\eta)\ll\frac{1}{\ln\eta}\left\{\int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}}\frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}}\left[\int\limits_{-At}^{At}\int\limits_{E_i^{n-1}}\left|\frac{x^\alpha}{r^{\alpha_i\varkappa_i}}\right|^p d\bar x\,dx_i\right]^{\frac{\theta}{p}}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll\frac{1}{\ln\eta}\left\{\int\limits_{\eta^{1/2}}^{\eta^2}\frac{d\tau}{\tau^{1+\theta\varepsilon}}\left[\int\limits_{-A}^{A}\int\limits_{E_i^{n-1}}\left|\frac{y^\alpha}{r^{\alpha_i\varkappa_i}}\right|^p d\bar y\,dy_i\right]^{\frac{\theta}{p}}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\ll\frac{1}{\eta^{\varepsilon/2}(\ln\eta)^{1/\theta'}}\to 0. \tag{87}$$

Применяя формулу Лагранжа, выполняя последовательно замену переменной $t=\tau^{\varkappa_i}$ и $x_j=\tau^{\varkappa_j}y_j$ ($j=1,\ldots,n$), замечая, что полученный ин-

теграл по $\bar{y}$, y_i в рассматриваемых предположениях сходится, находим при $\eta \to +\infty$

$$J_{\alpha_i}(\eta) \ll$$

$$\ll \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{x}^{\bar{\alpha}} \left[\psi \left(\frac{\ln \sqrt[m]{x_1^{ml_1} + \ldots + (x_i+t)^{ml_i} + \ldots + x_n^{ml_n}}}{\ln \eta} \right) - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)\right]\right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \ll \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{x}^{\bar{\alpha}} \ln \frac{x_1^{ml_1} + \ldots + (x_i+t)^{ml_i} + \ldots + x_n^{ml_n}}{x_1^{ml_1} + \ldots + x_n^{ml_n}} \right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{1/2}}^{\eta^2} \frac{d\tau}{\tau^{1+\theta\varepsilon}} \left[\int\limits_{-A}^{A} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{y}^{\bar{\alpha}} \ln \left(1 + \frac{(1+y_i)^{ml_i} - y_i^{ml_i}}{r^m} \right) \right|^p d\bar{y}\, dy_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} (\ln \eta)^{1/\theta'}} \to 0. \tag{88}$$

II. Пусть

$$\alpha_i < \begin{cases} \sigma_i - 1, & 0 < \delta_i < 1, \\ \sigma_i - 2, & \delta_i = 1. \end{cases}$$

Положим $\tilde{s} = 1$, если $0 < \delta_i < 1$, и $\tilde{s} = 2$, если $\delta_i = 1$. Имеем

$$\mathcal{J}(\eta) \ll \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i-\tilde{s}}(t)\, D_i^{\alpha_i} \left[x^{\alpha} \psi \left(\frac{\ln r}{\ln \eta} \right) \right] \right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Замечая, что $\sigma_i - \tilde{s} > \alpha_i$, и поступая, как и при оценке (84), вводя обозначение $\zeta = u_1 + \ldots + u_{\mu_i}$, $\mu_i = \sigma_i - \alpha_i - \tilde{s}$, получим при $\eta \to +\infty$

$$\mathcal{J}(\eta) \ll \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} \ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t} \left[\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \frac{du_1 \ldots du_{\mu_i}}{(u_1 + \ldots + u_{\mu_i})^{\delta_i - \tilde{s}}} \left(\int\limits_{-A/\zeta}^{A/\zeta} \frac{dy_i}{|1+y_i|^{1+p(\delta_i-\tilde{s})}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} (\ln \eta)^{1/\theta'}} \to 0. \tag{89}$$

Из (86) — (89) следует, что при $\alpha_i \geqslant 1$

$$\mathcal{J}(\eta) \to 0, \quad \eta \to +\infty. \tag{90}$$

Доказательство (90) при $\alpha_i = 0$ аналогично доказательству оценки (88). В силу (82), (83), (84), (85) и (90) получаем (80). Лемма доказана.

Приведем лишь доказательства теоремы 2 при $1 < p$, $\theta < \infty$ и теоремы 9 при $1 < p < \infty$, так как остальные приводимые выше теоремы при указанных дополнительных ограничениях на p и θ доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 2 при $1 < p$, $\theta < \infty$. Пусть $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ и $P_{\sigma-1}(x; f)$ — многочлен из (11), (12), (14). Введем в рассмотрение функцию $f^*(x) = f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)$. Для функции f^* в силу теоремы 11 существует последовательность $\varphi_k \in C_0^\infty(E^n)$ такая, что имеет место (78). Так как $\varphi_k \in B_{p,\theta}^l(E^n)$, то в условиях теоремы (см. [4]) имеем

$$\| D^\nu \varphi_k \|_{b_{q,\tilde{\theta}}^{r(\tilde{\sigma})}(E^m)} \ll \| \varphi_k \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \tag{91}$$

Функция f^* локально на E^n принадлежит пространству $B^l_{p,\theta}$. Отсюда, принимая во внимание (78), заключаем, что в условиях теоремы существует след $D^\nu f^*|_{E^m}$ и для любого $R > 0$ при $k \to \infty$

$$\| D^\nu (\varphi_k - f^*) \|_{b^{r(\tilde\sigma)}_{q,\tilde\theta}(|x^{(m)}|<R)} \ll \| \varphi_k - f^* \|_{L_p(|x|<2R)} + \| \varphi_k - f^* \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)} \to 0. \tag{92}$$

С помощью предельного перехода при $k \to \infty$ в неравенстве (91) в силу (78) и (92) получаем

$$\| D^\nu f^* \|_{b^{r(\tilde\sigma)}_{q,\tilde\theta}(E^m)} \ll \| f^* \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)}.$$

Заменяя в последнем неравенстве функцию f^* на $f - P_{\sigma-1}$, получим

$$\| D^\nu (f - P_{\sigma-1}) \|_{b^{r(\tilde\sigma)}_{q,\tilde\theta}(E^m)} \ll \| f \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 9 при $1 < p < \infty$. Пусть $\varphi_\nu \in b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)$ и $P_{\sigma[\nu]-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu)$ — многочлены из (11), (12), (14), $\nu \in N$. Введем в рассмотрение функции $\varphi_\nu^*(x^{(m)}) = \varphi_\nu(x^{(m)}) - P_{\sigma[\nu]-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu)$. Для функций φ_ν^* в силу теоремы 11 существуют последовательности $\varphi_{k,\nu} \in C_0^\infty(E^m)$ такие, что для любого $R > 0$ при $k \to \infty$

$$\| \varphi_{k,\nu} - \varphi_\nu^* \|_{L_p(|x^{(m)}|<R)} + \| \varphi_{k,\nu} - \varphi_\nu^* \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)} \to 0. \tag{93}$$

Так как $\varphi_{k,\nu} \in B_p^{r[\nu]}(E^m)$, то в условиях теоремы (см. [4, 7]) существуют функции $F_k(x)$ такие, что $D^\nu F_k|_{E^m} = \varphi_{k,\nu}$ и

$$\| F_k \|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \ll \sum_{\nu\in N} \| \varphi_{k,\nu} \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)}. \tag{94}$$

Функции φ_ν^* локально на E^m принадлежат соответственно пространствам $B_p^{r[\nu]}$. Поэтому, принимая во внимание (93), заключаем, что в условиях теоремы существует функция F^* такая, что $D^\nu F^*|_{E^m} = \varphi_\nu^*$ и для любого $R > 0$ при $k \to \infty$

$$\| F_k - F^* \|_{b_p^{l(\sigma)}(|x|<R)} \ll$$
$$\ll \sum_{\nu\in N} \left(\| \varphi_{k,\nu} - \varphi_\nu^* \|_{L_p(|x^{(m)}|<2R)} + \| \varphi_{k,\nu} - \varphi_\nu^* \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)} \right) \to 0. \tag{95}$$

С помощью предельного перехода при $k \to \infty$ в неравенстве (94) в силу (93) и (95) получаем, что $D^\nu F^*|_{E^m} = \varphi_\nu^*$ и

$$\| F^* \|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \ll \sum_{\nu\in N} \| \varphi_\nu^* \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)}.$$

Заменяя в последнем неравенстве функции φ_ν^* на $\varphi_\nu - P_{\sigma[\nu]-1}$ и полагая

$$F(x) = F^*(x) + P(x), \qquad P(x) = \sum_{\nu\in N} \frac{x^\nu}{\nu!} P_{\sigma[\nu]-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu),$$

получим, что $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ и

$$\|F - P\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \ll \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. В установленных выше неравенствах рассматривались функции f, определенные на всем пространстве E^n или E^m. Полученные результаты сохраняются и для тех областей из E^n (или из E^m), для которых возможно распространение функций за пределы области на все пространство с помощью оператора, ограниченного в полунорме из правой части соответствующего неравенства. Классы таких областей выделены в работах [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В.* Поведение дифференцируемых функций в бесконечности и плоскость финитных функций.— Труды МИАН СССР, 1969, 105, с. 3—14.
2. *Успенский С. В.* О дифференциальных свойствах решений квазиэллиптических уравнений в неограниченных областях.— ДАН СССР, 1968, 181, № 3, с. 562—564.
3. *Ильин В. П.* Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^{(l)}(G)$. — Сиб. мат. журн., 1967, 8, № 3, с. 573—586.
4. *Ильин В. П., Солонников В. А.* О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных.— Труды МИАН СССР, 1962, 66, с. 205—226.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Никольский Ю. С.* Поведение на бесконечности функций с заданными в L_p дифференциально-разностными свойствами.— Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 182—198.
7. *Никольский Ю. С.* Теоремы вложения неизотропных весовых пространств дифференцируемых функций.— Труды МИАН СССР, 1976, 140, с. 212—251.
8. *Бесов О. В.* Продолжение функций из L_p^l и W_p^l.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 5—17.
9. *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в $\mathscr{L}_{p,\theta}^l$ и распространение функций.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 18—30.