К. А. Зарецкий, Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами,
*УМН*, 1965, том 20, выпуск 6, 90–92

*1965 г. ноябрь — декабрь* *т. XX, вып. 6 (126)*
**УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

# ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА ПО НАБОРУ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ВИСЯЧИМИ ВЕРШИНАМИ

К. А. Зарецкий

*Деревом* называется конечный связный неориентированный граф без циклов. Вершина дерева называется *висячей*, если она инцидентна только одному ребру.

В заметке [1] Е. А. Смоленский рассматривал задание дерева набором расстояний между его висячими вершинами и доказал, что если дерево с данным набором расстояний существует, то оно единственно. В настоящей заметке выводится необходимое и достаточное условие существования и дается алгоритм построения этого дерева. Несколько обобщая задачу, скажем, что дерево $G$ соответствует матрице $A$ $n$-го порядка ($n \geqslant 2$), если некоторые его вершины (в том числе все висячие вершины) обозначены $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и каждый элемент $a_{ij}$ матрицы $A$ равен расстоянию между вершинами $x_i$ и $x_j$. Множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим $N$.

Теорема. *Для существования дерева, соответствующего матрице $A$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ удовлетворяла следующим условиям:*

I. *Матрица симметрична, все элементы ее главной диагонали — нули, все остальные элементы — натуральные числа.*

II. *Для всяких $i, j, k \in N$ число $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}$* — четное (ср. [1]).

III. *Если $i, j, k, l \in N$, то среди трех чисел $a_{ij}+a_{kl}$, $a_{ik}+a_{jl}$, $a_{il}+a_{jk}$ два числа равны между собой и не меньше третьего.*

Замечание 1. Легко проверить, что при $l=j$ условие III превращается в следующее (ср. [1]):

$$\forall_{i,\, j,\, k \in N}\, a_{ij}+a_{jk}-a_{ik} \geqslant 0. \tag{1}$$

Замечание 2. Практически условие II достаточно проверить для $k=1$ и всех $i, j \in N$. Действительно, если все числа $a_{ij}+a_{j1}-a_{i1}$ четные, то при любых $i, j, k \in N$ числа $a_{ij}+a_{jk}+a_{ik}=(a_{ij}+a_{j1}-a_{i1})+(a_{jk}+a_{k1}-a_{j1})-(a_{ik}+a_{k1}-a_{i1})$ четны.

Доказательство необходимости. Пусть $G$ — дерево, соответствующее матрице $A$. Выполнение условия I очевидно. Так как $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}$ равно удвоенному расстоянию от вершины $x_j$ до цепи, соединяющей вершины $x_i$ и $x_k$, то условие II выполнено. Далее, если $x_i, x_j, x_k, x_l$ — различные висячие вершины дерева $G$, то попарно соединяющие их цепи могут иметь только одно из трех расположений, данных на рисунке.

В случае *a*) будет $a_{ik}+a_{jl}=a_{il}+a_{jk}>a_{ij}+a_{kl}$.

В случае *b*) будет $a_{ij}+a_{kl}=a_{il}+a_{jk}>a_{ik}+a_{jl}$.

В случае *c*) будет $a_{ij}+a_{kl}=a_{ik}+a_{jl}=a_{il}+a_{jk}$.

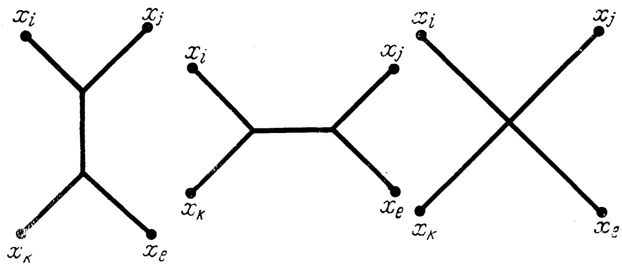
Следовательно, условие III выполнено (проверка условия III в случае частично совпадающих или невисячих вершин $x_i, x_j, x_k, x_l$ не представляет труда).

Доказательство достаточности. Пусть матрица $A$ удовлетворяет условиям I, II, III. Случай $n=2$ тривиален, поэтому будем считать, что $n \geqslant 3$. Для каждого $j \in N$ обозначим через $P_j$ множество всех чисел $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}$, где $i, k \in N \setminus \{j\}$.

Наименьший элемент множества $P_j$ (четный, ввиду условия II) обозначим $2c_j$. Из формулы (1) следует, что $\forall_{j\in N} c_j \geqslant 0$. Положим

$$b_{ij}=a_{ij}-c_i-c_j \qquad (i,\ j\in N,\ i\neq j) \tag{2}$$

и $b_{ii}=0$ $(i\in N)$. Очевидно, что матрица $B=\|b_{ij}\|$ симметрична. Обозначим через $f(A)$ симметричную матрицу, полученную из $B$ отождествлением одинаковых столбцов (и строк).




a) b) c)

Докажем, что матрица $f(A)$ удовлетворяет условию III. Пусть $i,\ j,\ k,\ l\in N$. Если все индексы $i,\ j,\ k,\ l$ попарно различны, то по формуле (2) $b_{ij}+b_{kl}=a_{ij}+a_{kl}-(c_i+c_j+c_k+c_l)$, $b_{ik}+b_{jl}=a_{ik}+a_{jl}-(c_i+c_j+c_k+c_l)$, $b_{il}+b_{jk}=a_{il}+a_{jk}-(c_i+c_j+c_k+c_l)$. Поэтому из выполнения условия III для матрицы $A$ следует, при попарно различных $i,\ j,\ k,\ l$, выполнение условия III для матрицы $B$ (и для матрицы $f(A)$). Если два из индексов $i,\ j,\ k,\ l$ совпадают (скажем, $l=j$), то условие III превращается в неравенство (1). Докажем, что

$$\forall_{i,\ j,\ k} b_{ij}+b_{jk}-b_{ik}\geqslant 0. \tag{3}$$

Если $i=j$ или $k=j$, то соотношение (3) очевидно. Если же $i,k\in N\setminus\{j\}$, то $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}\in P_j$, и потому $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}\geqslant 2c_j$, откуда $b_{ij}+b_{jk}-b_{ik}=(a_{ij}-c_i-c_j)+(a_{jk}-c_j-c_k)-(a_{ik}-c_i-c_k)=a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}-2c_j\geqslant 0$. Следовательно, матрица $B$ (а потому и матрица $f(A)$) удовлетворяет условию III.

Легко проверить, пользуясь формулой (2), что из выполнения условия II для матрицы $A$ вытекает выполнение этого условия для матриц $B$ и $f(A)$.

Далее, докажем, что все элементы матрицы $f(A)$ неотрицательны, т. е. что

$$\forall_{ij\in N} b_{ij}\geqslant 0. \tag{4}$$

Пусть $i,\ j,\ k\in N$ попарно различны. Так как $a_{ji}+a_{ik}-a_{jk}\in P_i$, $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}\in P_j$, то $a_{ji}+a_{ik}-a_{jk}\geqslant 2c_i$, $a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}\geqslant 2c_j$, откуда $b_{ij}=a_{ij}-c_i-c_j\geqslant a_{ij}-\frac{1}{2}(a_{ji}+a_{ik}-a_{jk})-\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{jk}-a_{ik})=0$. Очевидно, что все элементы главной диагонали матрицы $f(A)$ равны нулю. Докажем, что все остальные элементы этой матрицы отличны от нуля. Для этого достаточно доказать, что $\forall_{i,\ j\in N}(b_{ij}=0\rightarrow\forall_{k\in N} b_{ik}=b_{jk})$. Пусть $i,\ j,\ k\in N$, $i\neq j$, $b_{ij}=0$. Тогда, по формуле (3), $b_{jk}\geqslant b_{ik}$. Меняя ролями индексы $i$ и $j$, получим $b_{ik}\geqslant b_{jk}$. Следовательно, $b_{ik}=b_{jk}$. Итак, мы доказали, что матрица $f(A)$ удовлетворяет условиям I, II, III.

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение:

$$\forall_{i,\ j\in N}\left(i\neq j\rightarrow\exists_{k\in N\setminus\{i,\ j\}} c_j=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{jk}-a_{ik})\right). \tag{5}$$

Пусть $i,\ j\in N$, $i\neq j$. По определению числа $c_j$,

$$\exists_{k,\ l\in N\setminus\{j\}} c_j=\frac{1}{2}(a_{lj}+a_{jk}-a_{lk}). \tag{6}$$

Так как $a_{lj}+a_{ji}-a_{li}\in P_j$, то $a_{lj}+a_{ji}-a_{li}\geqslant 2c_j=a_{lj}+a_{jk}-a_{lk}$, т. е. $a_{ij}+a_{lk}\geqslant a_{il}+a_{jk}$. Ввиду условия III, это значит, что $a_{ij}+a_{lk}=a_{ik}+a_{lj}$, т. е. что

$$a_{ij}-a_{ik}=a_{lj}-a_{lk}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует (5).

Докажем, что
$$\exists_{k,\, l\in N}\,(k \neq l \wedge b_{kl}=0). \tag{8}$$
Возьмем произвольные $i,\ j_1 \in N,\ i \neq j_1$. Применяя несколько раз формулу (5), получим сначала такой индекс $j_2 \in N \setminus \{i,\ j_1\}$, что $c_{j_1}=\frac{1}{2}(a_{ij_1}+a_{j_1j_2}-a_{ij_2})$, затем такой индекс $j_3 \in N \setminus \{i,\ j_2\}$, что $c_{j_2}=\frac{1}{2}(a_{ij_2}+a_{j_2j_3}-a_{ij_3})$, и т. д. Ввиду конечности множества $N$, найдутся такие номера $\alpha$, $\beta$, что $\alpha<\beta$ и $j_\alpha=j_\beta$. Суммируя почленно равенства $c_{j_\nu}=\frac{1}{2}(a_{ij_\nu}+a_{j_\nu j_{\nu+1}}-a_{ij_{\nu+1}})$ при $\nu=\alpha,\ \alpha+1,\ \ldots,\ \beta-1$ и произведя упрощения, получим
$$\sum_{\nu=\alpha}^{\beta-1} c_{j_\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=\alpha}^{\beta-1} a_{j_\nu j_{\nu+1}},$$
т. е.
$$\sum_{\nu=\alpha}^{\beta-1}(a_{j_\nu j_{\nu+1}}-c_{j_\nu}-c_{j_{\nu+1}})=0 \quad \text{или} \quad \sum_{\nu=\alpha}^{\beta-1} b_{j_\nu j_{\nu+1}}=0.$$
Отсюда и из формулы (4) следует (8).

Для того чтобы доказать существование дерева, соответствующего матрице $A$, опишем алгоритмы построения такого дерева. Для матрицы $A_1=A$ строим матрицу $A_2=f(A_1)$, затем матрицу $A_3=f(A_2)$ и т. д. Мы будем получать матрицы все более низкого порядка (благодаря формуле (8)), удовлетворяющие условиям I, II, III (по доказанному). Процесс построения матриц прекратится, когда получим матрицу $A_m$ порядка ниже третьего. Если порядок матрицы $A_m$ есть 1, то ее единственному элементу сопоставим вершину одновершинного графа. Если порядок матрицы $A_m$ равен 2, т. е. $A_m=\begin{Vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{Vmatrix}$, то матрице $A_m$ соответствует дерево—элементарная цепь длины $a$. Висячие вершины этого дерева ставятся в соответствие столбцам (или строкам) матрицы $A_m$. Будем последовательно строить деревья, соответствующие матрицам $A_{m-1},\ A_{m-2},\ \ldots,\ A_1$. Допустим, что мы уже построили дерево $G_s$, соответствующее матрице $A_s\ (s\geqslant 2)$. Тогда дерево $G_{s-1}$ соответствующее матрице $A_{s-1}$, строится следующим образом. Пусть $j$—номер некоторого столбца матрицы $A_s$, $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_r$—номера всех тех столбцов матрицы $A_{s-1}$, при отождествлении которых получен $j$-й столбец матрицы $A_s$. Из вершины $x_j$ графа $G_s$ проводим $r$ цепей длины $c_{j_1}$, $c_{j_2},\ \ldots,\ c_{j_r}$ (числа $c_{j_\nu}$ берутся для матрицы $A_{s-1}$) и концы этих цепей обозначим соответственно $x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_r}$. Если длина цепи оказалась равна нулю, то соответствующий номер присваивается вершине $x_j$. В противном случае вершина $x_j$ лишается номера. Так проделаем для всех столбцов матрицы $A_s$ и обозначим полученное дерево $G_{s-1}$. Из самого построения дерева $G_{s-1}$ следует, что всем столбцам (и строкам) матрицы $A_{s-1}$ соответствуют вершины дерева $G_{s-1}$ (среди них все висячие вершины). Расстояние между вершинами $x_k$ и $x_l$ дерева $G_{s-1}$ равно, по построению, $b_{kl}+c_k+c_l$, где $b_{kl}$—элемент матрицы $A_s$, а $c_k$ и $c_l$ взяты для матрицы $A_{s-1}$. По формуле (2) это расстояние равно $a_{kl}$ (элементу матрицы $A_{s-1}$). Следовательно, дерево $G_{s-1}$ соответствует матрице $A_{s-1}$. Продолжая такие построения, дойдем до дерева $G_1=G$, соответствующего матрице $A_1=A$.

Замечание 3. Из алгоритма следует, что висячими будут все те и только те вершины $x_j$ дерева $G$, для которых $c_j>0$. Поэтому из [1] вытекает единственность дерева, соответствующего матрице $A$ (при выполнении условий I, II, III).

Поступило в редакцию 27 мая 1964 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Смоленский, Об одном способе линейной записи графов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2, № 2 (1962), 371—372.