A. M. Sebel'din, Summability of the ring of endomorphisms of vector groups,
Algebra Logika, 1998, Volume 37, Number 1, 88–100

Алгебра и логика, 37, N 1 (1998), 88—100

УДК 512.541.52

СУММИРУЕМОСТЬ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ ВЕКТОРНЫХ ГРУПП

А. М. СЕБЕЛЬДИН

Назовем кольцо эндоморфизмов $E(G)$ некоторой абелевой группы G *суммируемым*, если ее группа автоморфизмов $A(G)$ аддитивно порождает его $\langle A(G)\rangle = E(G)$. В [1] поставлена следующая задача (проблема 31): Для каких абелевых групп G кольцо $E(G)$ суммируемо? Эта задача решена положительно для некоторых классов примарных ($p \neq 2$) абелевых групп [2, 3], для вполне разложимых абелевых групп без кручения в [4], см. также [5, 6].

В настоящей работе эта задача рассматривается для некоторого достаточно широкого класса абелевых групп (см. теор. 5). Как приложение теоремы 5 получаем ответ на поставленную задачу в языке типов для векторных абелевых групп, мощность редуцированной части которых не превосходит первого кардинала ненулевой меры (теор. 11).

Эндоморфизм φ абелевой группы G назовем *суммируемым*, если он представим в виде конечной суммы ее автоморфизмов, а минимальное число автоморфизмов, в сумму которых он разлагается, обозначим через $c(\varphi)$. Кольцо $E(G)$ назовем *свободно суммируемым*, если существует такое натуральное (минимальное обозначим через $c(E(G))$) число, что каждый его эндоморфизм представим в виде суммы любого большего либо равного $c(E(G))$ числа автоморфизмов. Множество натуральных чисел $\{1,2,3,\ldots,n\}$ обозначим через $\overline{n}$. Если $g = (g_{s,j})$ — матрица, где $g_{s,j} \in G_{s,j}$, $\{G_{s,j}\}_{s,j\in J}$ — некоторое семейство абелевых групп, J — вполне упорядоченное множество индексов, то матрицу $(x_{s,j})$, где $x_{s,j} = g_{s,j}$

при $s < j$ и $x_{s,j} = 0$ при $s \geq j$, обозначим через $g^{(+)}$, а матрицу $(x_{s,j})$, где $x_{s,j} = g_{s,j}$ при $s > j$ и $x_{s,j} = 0$ при $s \leq j$, — через $g^{(-)}$. Диагональную матрицу, составленную из элементов $g_{j,j}$ $(j \in J)$, обозначим через $D[g_{j,j}, J]$, матрицу с единственным ненулевым элементом $g_{s,j}$ — через $M[g_{s,j}]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого суммируемого эндоморфизма φ абелевой группы G и натурального $k \in \mathbf{N}$ существует разложение $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n(k)}$, где $n(k) = c(\varphi) + 2k$, $\varphi_j \in A(G)$, $j = 1, 2, \ldots, n(k)$.

Действительно, достаточно заметить равенство $\varphi = \varphi + k(\varepsilon - \varepsilon)$, где ε — тождественный автоморфизм группы G, $k \in \mathbf{N}$.

Абелеву группу G назовем *S-однородной*, если $G = \oplus_{i \in I} G_i$, где $G_i \cong G_j$ для любых $i, j \in I$ и $|I| > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если G — S-однородная абелева группа, то кольцо $E(G)$ свободно суммируемо, причем $c(E(G)) \leq 6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что группа G имеет разложение $G = \oplus_{t \in \overline{n}} G_t$, где $G_t \cong G_r$ для любых $t, r \in \overline{n}$, $n \neq 1$. Известно [7], что кольцо эндоморфизмов $E(G)$ изоморфно кольцу $M(G)$ матриц $F = (f_{t,r})$ порядка n с элементами $f_{t,r} \in \mathrm{Hom}(G_t, G_r)$, $t, r \in \overline{n}$. Пусть χ — изоморфизм кольца $E(G)$ на кольцо $M(G)$, $\varepsilon_{t,t+1}$ — изоморфизмы групп G_t на группы G_{t+1}, $t \in \overline{n-1}$. Полагаем $\varepsilon_{t,r} = \varepsilon_{t,t+1}\varepsilon_{t+1,t+2} \ldots \varepsilon_{r-1,r}$ при $t < r$ и $\varepsilon_{t,r} = \varepsilon_{r,t}^{-1}$ при $t > r$. Обозначим через $\varepsilon_{t,t}$ тождественные автоморфизмы групп G_t, $t \in \overline{n}$.

Пусть f — произвольный эндоморфизм группы G и $\chi(f) = F = (f_{t,r})$, $F \in M(G)$. Рассмотрим следующие матрицы кольца $M(G)$:

$$F_0 = M[\varepsilon_{1,2}] + M[\varepsilon_{2,3}] + \ldots + M[\varepsilon_{n-1,n}] + M[\varepsilon_{n,1}],$$

$$F_1 = F_0 + D[\varepsilon_{t,t}, \overline{n}] - M[\varepsilon_{1,2}], F_2 = F^{(+)} + D[\varepsilon_{t,t}, \overline{n}], F_3 = F^{(-)} - D[\varepsilon_{t,t}, \overline{n}],$$

$$F_4 = F_0 - M[f_{1,1}], F_5 = F_4 + D[f_{t,t}, \overline{n}], F_6 = -F_1, F_7 = F_1 - F_0.$$

Строим обратные матрицы $F_1^{-1} = (y_{t,r}^{(1)}), \ldots, F_5^{-1} = (y_{t,r}^{(5)})$, где

$$y_{t,t}^{(1)} = y_{t,t}^{(2)} = -y_{t,t}^{(3)} = \varepsilon_{t,t} \text{ при } 1 \leq t \leq n,$$

$$y_{t,1}^{(1)} = (-1)^{n-t+1}\varepsilon_{t,1} \text{ при } 2 \leq t \leq n,$$

$$
\begin{aligned}
y^{(1)}_{t,t+1} &= -\varepsilon_{t,t+1} \text{ при } 2 \le t \le n-1,\\
y^{(1)}_{t,n} &= (-1)^{n-t}\varepsilon_{t,n} \text{ при } 2 \le t \le n-1,\\
y^{(2)}_{t,r} &= -\left(\sum_{t\le m<r} y^{(2)}_{t,m} f_{m,r}\right) \text{ при } t < r,\\
y^{(3)}_{t,r} &= \sum_{r\le m<t} f_{t,m} y^{(3)}_{m,r} \text{ при } t > r,\\
y^{(4)}_{t+1,t} &= y^{(5)}_{t+1,t} = \varepsilon_{t+1,t} \text{ при } 1 \le t < n,\\
y^{(4)}_{1,n} &= y^{(5)}_{1,n} = \varepsilon_{1,n}, y^{(4)}_{2,n} = \varepsilon_{2,1} f_{1,1} \varepsilon_{1,n},\\
y^{(5)}_{1,r} &= (-1)^{n+r}\varepsilon_{1,n} f_{n,n}\varepsilon_{n,n-1} f_{n-1,n-1}\varepsilon_{n-1,n-2}\cdots\\
&\quad \ldots f_{r+1,r+1}\varepsilon_{r+1,r} \text{ при } 1 \le r < n,\\
y^{(5)}_{t,r} &= (-1)^{t+r+1}\varepsilon_{t,t-1} f_{t-1,t-1}\varepsilon_{t-1,t-2} f_{t-2,t-2}\cdot\ldots\\
&\quad \ldots\cdot \varepsilon_{r+1,r} \text{ при } r < t \le n,\\
y^{(s)}_{t,r} &= 0 \text{ в остальных случаях } (s = 1,2,3,4,5).
\end{aligned}
$$

Далее, $F_0^{-1} = M[\varepsilon_{2,1}] + M[\varepsilon_{3,2}] + \ldots + M[\varepsilon_{n,n-1}] + M[\varepsilon_{1,n}]$, $F_7^{-1} = D[\varepsilon_{t,t}, \overline{n}] + M[\varepsilon_{1,2}]$. Имеют место равенства $f_s = \chi^{-1}(F_s) \in A(G)$ $(s = 0,1,2,\ldots,7)$ и $f = f_1 + \ldots + f_6$. Поскольку $f_1 = f_0 + f_7$, то из разложения $f = \sum_{q=1}^{6} f_q$ получаем разложение $f = \sum_{q=1}^{c} f_q$ для любого $c \ge 6$. □

Пусть $\mathcal{X} = \{G_{\xi,\lambda}\}_{\xi,\lambda\in\Xi}$ — некоторое семейство абелевых групп $G_{\xi,\lambda}$ и Ξ — произвольное бесконечное множество индексов. Обозначим через ξ_0 первый ординал (порядковое число) мощности $|\xi_0| = |\Xi|$. Без ограничения общности считаем, что Ξ — множество всех ординалов ξ меньших ξ_0. Через $M(\mathcal{X})$ обозначим множество всех конечнострочных матриц (матрицу называем *конечнострочной*, если каждая ее строка содержит лишь конечное число ненулевых элементов) вида: $g = (g_{\xi,\lambda})$, где $g_{\xi,\lambda} \in G_{\xi,\lambda}$, $\xi, \lambda \in \Xi$. Для каждой матрицы $g \in M(\mathcal{X})$ построим разбиение множества Ξ на конечные подмножества $\Xi = \bigcup\limits_{\delta\in\Delta} \Xi(\delta)$, где Δ — отрезок множества Ξ, а $\Xi(\delta)$ — подмножества множества Ξ, построенные с помощью трансфинитной индукции. Полагаем $\Xi(0) = 0$. Пусть $\Xi(\nu)$ при $\nu < \delta$ построены, $\nu, \delta \in \Delta$. Тогда обозначим:

$$\Xi^*(\delta) = \bigcup_{\nu<\delta} \Xi(\nu),$$

$$\Xi'(\delta) = \{\xi \in \Xi \mid g_{\lambda,\xi} \neq 0 \text{ при некотором } \lambda \in \Xi^*(\delta), \xi \notin \Xi^*(\delta)\}.$$

Пусть $\xi(\delta)$ — первый ординал из Ξ, не принадлежащий $\Xi^*(\delta)$. Строим множества $\Xi(\delta)$, полагая $\Xi(\delta) = \xi(\delta)$, если $\Xi'(\delta) = \varnothing$, и $\Xi(\delta) = \Xi'(\delta)$, если $\Xi'(\delta) \neq \varnothing$.

Заметим, что при предельном δ

$$\Xi'(\delta) = \varnothing, \tag{1}$$

и при непредельном δ

$$\Xi'(\delta) = \{\xi \in \Xi \mid g_{\lambda,\xi} \neq 0 \text{ при } \lambda \in \Xi(\delta - 1), \xi \notin \Xi^*(\delta)\}. \tag{2}$$

В самом деле, пусть δ предельное и $g_{\lambda,\xi} \neq 0$, где $\lambda \in \Xi^*(\delta)$, $\xi \notin \Xi^*(\delta)$. Тогда $\lambda \in \Xi(\nu) \subseteq \Xi^*(\nu+1)$ при некотором $\nu < \delta$ и, очевидно, $\xi \notin \Xi^*(\nu+1)$. Отсюда $\xi \in \Xi'(\nu+1) = \Xi(\nu+1) \subset \Xi^*(\delta)$. Противоречие.

Пусть теперь δ непредельное и $g_{\lambda,\xi} \neq 0$ при $\lambda \in \Xi(\nu)$, $\nu < \delta - 1$, $\xi \notin \Xi^*(\delta)$. Тогда $\lambda \in \Xi^*(\nu+1), \xi \notin \Xi^*(\nu+1)$ и, таким образом, $\xi \in \Xi'(\nu+1) = \Xi(\nu+1) \subseteq \Xi^*(\delta)$. В силу справедливости равенств (1), (2) и конечности строк матрицы $g = (g_{\lambda,\xi})$, получаем

$$|\,\Xi(\delta)\,| < \aleph_0 \tag{3}$$

для любого $\delta \in \Delta$. Положим $U_{\delta,\nu} = (g_{\lambda,\xi})$, где $\lambda \in \Xi(\delta)$, $\xi \in \Xi(\nu)$ $(\delta, \nu \in \Delta)$, $U(g) = (U_{\delta,\nu})$ $(\delta, \nu \in \Delta)$. Матрица $U(g)$ получается из матрицы g одновременной перестановкой строк и столбцов с одинаковыми номерами (такие матрицы будем называть *эквивалентными*), причем все строки матрицы $U(g)$ также конечны. Если рассматривать матрицы $\{U_{\delta,\nu}\}_{\delta,\nu\in\Delta}$ (они согласно (3) конечного размера) как элементы матрицы $U(g)$, то получаем квазинижнетреугольную, т.е. $U_{\delta,\nu} = 0$ при $\nu > \delta + 1$, конечнострочную (см. (1), (2), (3)) обобщенную матрицу. Таким образом, доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любой матрицы $g \in M(\mathcal{X})$ существует такое разбиение индексного множества Ξ, что полученная с помощью этого разбиения эквивалентная матрица $U(g)$ имеет конечнострочную квазинижнетреугольную обобщенную матрицу.* □

Если $M^*(\mathcal{X})$ — множество матриц $(g_{\xi,\lambda})_{\xi,\lambda\in\Xi}$ с конечными столбцами, то получаем двойственное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любой матрицы $g \in M^*(\mathcal{X})$ существует такое разбиение индексного множества Ξ, что полученная с помощью этого разбиения эквивалентная матрица $U(g)$ имеет квазиверхнетреугольную обобщенную матрицу с конечными столбцами.* □

Обозначим через $\mathcal{A}_\oplus$ класс всех таких абелевых групп G, кольца эндоморфизмов которых изоморфны кольцу конечнострочных матриц $M(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X} = \{\mathrm{Hom}(G_\xi, G_\lambda)\}_{\xi,\lambda\in\Xi}$ или $\mathcal{X} = \{\mathrm{Hom}(G_\lambda, G_\xi)\}_{\xi,\lambda\in\Xi}$, а группы G_ξ — прямые слагаемые группы G, которые можно менять местами, определяя таким образом одновременную перестановку соответствующих строк и столбцов.

ТЕОРЕМА 5. *Если для любого эндоморфизма η группы G из $\mathcal{A}_\oplus$ соответствующий ему эндоморфизм $\eta_{\xi\xi}$ группы $G_\xi(\xi \in \Xi)$ есть сумма $n = n(\eta)$ $(n \geq 3)$ автоморфизмов, то и η обладает этим свойством и, следовательно, $\langle A(G)\rangle = E(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ρ изоморфизм кольца эндоморфизмов группы G кольца $E(G)$ на кольцо $M(\mathcal{X})$, причем матрицу $\rho(\eta)$ будем обозначать также через η.

Покажем, что любой эндоморфизм η группы G есть сумма $n = n(\eta)$ ее автоморфизмов.

Рассмотрим вначале случай, когда Ξ — конечное множество, η — эндоморфизм группы G, $\rho(\eta) = \eta = (\eta_{\xi,\lambda})$, n — такое, что

$$\eta_{\xi,\xi} = \sum_{s\in\overline{n}} \psi_{\xi,\xi}^{(s)}, \text{ где } \psi_{\xi,\xi}^{(s)} \in A(G_\xi),\ s \in \overline{n},\ \xi \in \Xi.$$

Рассмотрим следующие матрицы кольца $M(\mathcal{X})$:

$$\eta_1 = \eta^{(-)} + D[\psi_{\xi,\xi}^{(1)}, \Xi],\ \eta_2 = \eta^{(+)} + D[\psi_{\xi,\xi}^{(2)}, \Xi],$$

$$\eta_s = D[\psi_{\xi,\xi}^{(s)}, \Xi] \text{ при } 3 \leq s \leq n.$$

Как и в предложении 2, обратные матрицы $\eta_s^{-1}(s \in \overline{n})$ легко находятся и $\eta_s^{-1} \in M(\mathcal{X})$. Следовательно, $\rho^{-1}(\eta_s) \in A(G)(s \in \overline{n})$ и $\eta = \sum_{s\in\overline{n}} \rho^{-1}(\eta_s)$.

Пусть теперь Ξ — бесконечное множество, η — эндоморфизм группы G, $\rho(\eta) = \eta = (\eta_{\xi,\lambda})$, n — такое, что

$$\eta_{\xi,\xi} = \sum_{s\in\overline{n}} \psi^{(s)}_{\xi,\xi}, \text{ где } \psi^{(s)}_{\xi,\xi} \in A(G_\xi),\ s \in \overline{n},\ \xi \in \Xi.$$

Учитывая предложение 3, без ограничения общности можно считать, что обобщенная матрица

$$\eta = (U_{\delta,\nu})_{\delta,\nu\in\Delta}, U_{\delta,\nu} = (\eta_{\lambda,\xi}), \text{ где } \lambda \in \Xi(\delta),\ \xi \in \Xi(\nu)\ (\delta,\nu \in \Delta),$$

является квазинижнетреугольной конечнострочной матрицей.

Пусть δ — ординал из Δ, тогда [8, гл. 7, § 3, теор. 1] $\delta = \xi(\delta)+k(\delta)$, где $\xi(\delta)$ — предельный, а $k(\delta)$ — конечный ординалы. Рассмотрим следующие матрицы кольца $M(\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned}
\eta_s &= (X^{(s)}_{\delta,\nu}), \text{ где } s \in \overline{n},\ \delta,\nu \in \Delta,\\
X^{(1)}_{\delta,\delta} &= U^{(-)}_{\delta,\delta} + D[\psi^{(1)}_{\xi,\xi}, \Xi(\delta)],\ X^{(2)}_{\delta,\delta} = U^{(+)}_{\delta,\delta} + D[\psi^{(2)}_{\xi,\xi}, \Xi(\delta)],\\
X^{(s)}_{\delta,\delta} &= D[\psi^{(s)}_{\xi,\xi}, \Xi(\delta)] \text{ при } 3 \le s \le n,\ X^{(1)}_{\delta,\nu} = U_{\delta,\nu} \text{ при } \delta > \nu,\\
X^{(1)}_{\delta,\nu} &= X^{(2)}_{\nu,\delta} = X^{(3)}_{\nu,\delta} = 0 \text{ при } \delta < \nu,\\
X^{(2)}_{\delta,\nu} &= U_{\delta,\nu} \text{ при } k(\delta) \text{ четном, } \delta < \nu,\\
X^{(2)}_{\delta,\nu} &= 0 \text{ при } k(\delta) \text{ нечетном, } \delta < \nu,\\
X^{(3)}_{\delta,\nu} &= U_{\delta,\nu} \text{ при } k(\delta) \text{ нечетном, } \delta < \nu,\\
X^{(3)}_{\delta,\nu} &= 0 \text{ при } k(\delta) \text{ четном, } \delta < \nu,\\
X^{(s)}_{\delta,\nu} &= 0 \text{ при } \delta \ne \nu,\ 4 \le s \le n.
\end{aligned}$$

Имеем $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$. Построим обратную матрицу $\eta_1^{-1} = (Y^{(1)}_{\delta,\nu})$, где

$$Y^{(1)}_{\delta,\delta} = (X^{(1)}_{\delta,\delta})^{-1},\ Y^{(1)}_{\delta,\nu} = 0 \text{ при } \delta < \nu,$$

$$Y^{(1)}_{\delta,\nu} = -Y^{(1)}_{\delta,\delta}\left(\sum_{\nu\le\beta<\delta} U_{\delta,\beta}Y^{(1)}_{\beta,\nu}\right) \text{ при } \delta > \nu.$$

Покажем, что обобщенные строки матрицы η_1^{-1} конечны. Действительно, для конечных ординалов $\delta \in \Delta$ это очевидно. Предположим, что для $\beta < \delta$ обобщенные строки $\{Y^{(1)}_{\beta,\nu}\}_{\nu\in\Delta}$ конечны. Используя конечность обобщенных строк $\{U_{\delta,\nu}\}_{\nu\in\Delta}$ и $\{Y^{(1)}_{\beta,\nu}\}_{\nu\in\Delta}$ $(\beta < \delta)$, видим, что обобщенная строка

$\{Y^{(1)}_{\delta,\nu}\}_{\nu\in\Delta}$ конечна. Следовательно, $\eta_1^{-1}\in M(\mathcal{X})$. Строим обратные матрицы: $\eta_s^{-1}=(Y^{(s)}_{\nu,\delta})$, где $Y^{(s)}_{\delta,\delta}=(X^{(s)}_{\delta,\delta})^{-1}$, $Y^{(s)}_{\delta,\nu}=-Y^{(s)}_{\delta,\delta}X^{(s)}_{\delta,\nu}Y^{(s)}_{\nu,\nu}$ при $\delta\neq\nu$ $(2\leq s\leq n)$. Очевидно, что $\eta_s^{-1}\in M(\mathcal{X})$ и, следовательно, $\rho^{-1}(\eta_s)\in A(G)$ $(s\in\overline{n})$. Итак, имеем $\eta=\sum\limits_{s\in\overline{n}}\rho^{-1}(\eta_s)$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если кольца $E(G_\xi)$ свободно суммируемы и существует максимальное $c(E(G_\xi))$, $\xi\in\Xi$, то кольцо эндоморфизмов группы G из $\mathcal{A}_\oplus$ также свободно суммируемо, в частности (предл. 2), если группы G_ξ являются S-однородными.

Обозначим через $\mathcal{A}_H$ класс всех таких абелевых групп G, разложимых в прямую сумму $G=\oplus_{\xi\in\Xi}G_\xi$, что

$$\mathrm{Hom}(G_\xi,G)\cong\oplus_{\lambda\in\Xi}\mathrm{Hom}(G_\xi,G_\lambda). \tag{4}$$

Заметим [9], что S-однородные группы из класса $\mathcal{A}_H$ есть в точности так называемые *самомалые* (*self-small*) *группы*, которые в настоящее время активно изучаются. Покажем, что $\mathcal{A}_H\subseteq\mathcal{A}_\oplus$. Действительно, согласно [7, теор. 55.1] кольцо эндоморфизмов $E(G)$ изоморфно кольцу всех строчно сходящихся матриц $U=(\eta_{\xi,\lambda})$, $\eta_{\xi,\lambda}\in\mathrm{Hom}(G_\xi,G_\lambda)$, $\xi,\lambda\in\Xi$. Матрица $U=(\eta_{\xi,\lambda})$ называется *строчно сходящейся*, если для любого фиксированного элемента h_ξ из G имеем $\eta_{\xi,\lambda}(h_\xi)=0$ почти для всех λ из Ξ. Так как в нашем случае выполнено (4), то матрицы $U=(\eta_{\xi,\lambda})$ конечнострочные. Таким образом, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. *Если для любого эндоморфизма η абелевой группы $G\in\mathcal{A}_H$ существует такое натуральное число $n=n(\eta)$ $(n\geq 3)$, что каждый соответствующий ему эндоморфизм $\eta_{\xi\xi}$ группы $G_\xi(\xi\in\Xi)$ есть сумма n ее автоморфизмов, то $\langle A(G)\rangle=E(G)$.* □

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если кольцо эндоморфизмов вполне характеристического прямого слагаемого абелевой группы свободно суммируемо, то ее кольцо эндоморфизмов суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемо кольцо эндоморфизмов дополнительного прямого слагаемого.

Действительно, пусть $G=G_1\oplus G_2$, $\mathrm{Hom}(G_1,G_2)=0$ и кольцо $E(G_1)$ свободно суммируемо. Если кольцо $E(G_2)$ суммируемо, то согласно замечанию 1 и следствию 7 кольцо $E(G)$ также суммируемо. Обратно, если

$E(G)$ суммируемо, то так как $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = 0$, любой автоморфизм группы G индуцирует на G_1 и G_2 также автоморфизмы. Поэтому кольцо $E(G_2)$ суммируемо.

Обозначим через $\mathcal{A}_\Pi$ класс всех абелевых групп G, разложимых в прямое произведение своих подгрупп G_i: $G = \Pi_{i\in I} G_i$, причем $\mathrm{Hom}(G, G_i) \cong \oplus_{j\in I}\mathrm{Hom}(G_j, G_i)$ для любого $i \in I$.

ТЕОРЕМА 9. *Кольцо эндоморфизмов группы $G = \Pi_{i\in I} G_i$ класса $\mathcal{A}_\Pi$ изоморфно кольцу $K(G)$ всех матриц с конечным числом отличных от нуля элементов в каждой строке вида (η_{ij}), где $\eta_{ij} \in \mathrm{Hom}(G_j, G_i)$ $(i, j \in I)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in E(G)$, $g_i \in G_i$ $(i \in I)$ и

$$\eta(g_i) = \langle \ldots, g_{ij}, \ldots \rangle_{j\in I} (g_{ij} \in G_j).$$

Полагаем $\eta_{ji}(g_i) = g_{ij}$. Тогда $\eta_{ji} \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)(i, j \in I)$. Так как для любого $j_0 \in I$ имеем $\mathrm{Hom}(G, G_{j_0}) \cong \oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(G_i, G_{j_0})$, гомоморфизмы $\eta_{j_0 i}$ отличны от нуля лишь для конечного числа индексов i из I. Обратно, пусть (η_{ij}) — матрица с конечным числом m_i элементов, отличных от нуля, в каждой i-й строке и $\eta_{ij} \in \mathrm{Hom}(G_j, G_i)$ $(i, j \in I)$. Если $g = \langle \ldots, g_i, \ldots \rangle \in G$, то полагаем

$$\eta(g) = \left\langle \ldots, \sum_{j=1}^{m_i} \eta_{ij}(g_j), \ldots \right\rangle_{i\in I}.$$

Тогда произведение матриц указанного вида является матрицей такого же вида и установленное соответствие является изоморфизмом колец $E(G)$ и $K(G)$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Мы показали, что класс $\mathcal{A}_\Pi$ содержится в классе $\mathcal{A}_\oplus$ и, следовательно, для него верна теорема 5.

Напомним, что под *векторной группой* мы понимаем абелеву группу без кручения, разложимую в прямое произведение групп ранга 1:

$$G = \prod_{i\in I} G_i = \prod_{\tau\in\Omega(G)} G^{(\tau)},$$

где $G^{(\tau)} = \prod_{i\in I(\tau)} G_i$, $I(\tau) = \{i \in I \mid \tau(G_i) = \tau\}$, $\Omega(G)$ — множество всех различных типов групп G_i ранга 1 $(r(G_i) = 1,\ i \in I)$. Пусть

$\Omega'(G) = \{\tau \in \Omega(G) \mid |I(\tau)| = 1\}$. Через $\mathcal{F}_{RV}$ обозначим класс всех редуцированных векторных групп, мощность которых не превосходит первого кардинала ненулевой меры, через $\mathcal{F}_V$ — класс групп без кручения с редуцированной частью из $\mathcal{F}_{RV}$. Класс $\mathcal{F}_{RV}$ является подклассом класса $\mathcal{A}_\Pi$ (см. [7]). Пусть $\mathbf{Q}^{(\tau)}$ — абелева группа без кручения ранга 1 типа τ. Полагаем $N(\tau) = \max\limits_{\varphi \in E(\mathbf{Q}^{(\tau)})} c(\varphi)$ (если существует бесконечное множество различных $c(\varphi)$, $\varphi \in E(\mathbf{Q}^{(\tau)})$, то полагаем $N(\tau) = \infty$). Пусть

$$\begin{aligned}
\Omega_1(G) &= \{\tau \in \Omega'(G) \mid 2\mathbf{Q}^{(\tau)} \neq \mathbf{Q}^{(\tau)}\},\\
\Omega_2(G) &= \{\tau \in \Omega'(G) \mid N(\tau) = \infty\},\\
\Omega_3(G) &= \{\tau \in \Omega'(G) \mid N(\tau) < \infty\}.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 11. *Если $G \in \mathcal{F}_V$, то $E(G) = \langle A(G)\rangle$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *мощность множества $\Omega_1(G)$ не превосходит единицы;*

2) *$\Omega_2(G)$ — конечное множество;*

3) *среди чисел $N(\tau)(\tau \in \Omega_3(G))$ существует максимальное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия 1—3 выполнены для группы G тогда и только тогда, когда они выполнены для ее редуцированной части, то, учитывая замечание 8, без ограничения общности считаем, что группа G редуцированная, т.е. $G \in \mathcal{F}_{RV}$.

Пусть условия 1—3 выполнены. Зафиксируем некоторое целое число $s \geq 3$. Построим новое разложение группы G следующим образом: если $|I(\tau)| \geq \aleph_0$, то разбиваем множество индексов $I(\tau)$ на бесконечное множество конечных множеств, состоящих из s различных индексов множества $I(\tau)$ каждое. Тогда имеем $G = \prod\limits_{\tau \in \Omega^*} H^{(\tau)}$, где $H^{(\tau)} = G^{(\tau)}$ при $|I(\tau)| < \aleph_0$ и $H^{(\tau)}$ — однородная типа τ вполне разложимая группа ранга s при $|I(\tau)| \geq \aleph_0$, Ω^* — некоторое множество типов групп G_i, содержащее $\Omega(G)$.

Пусть Φ — кольцо конечнострочных матриц, изоморфное кольцу $E(G)$ (см. теор. 9). Рассмотрим обобщенные матрицы

$$(\varphi_{\tau,\tau'})(\tau, \tau' \in \Omega^*), \varphi_{\tau,\tau'} \in \mathrm{Hom}(H^{(\tau')}, H^{(\tau)}), \tau, \tau' \in \Omega^*,$$

соответствующие полученному разложению группы G. Так как $r(H^{(\tau)}) < \aleph_0$ и, следовательно,

$$\mathrm{Hom}\left(\prod_{\tau\in\Omega^*} H^{(\tau)}, H^{(\tau')}\right) \cong \bigoplus_{\tau\in\Omega^*} \mathrm{Hom}(H^{(\tau)}, H^{(\tau')})$$

для любого $\tau' \in \Omega^*$, то обобщенные строки $(\varphi_{\tau,\tau'})_{\tau'\in\Omega^*}$ также конечны.

Пусть ϑ — изоморфизм колец $E(G)$ и Φ, φ — эндоморфизм группы G, $\vartheta(\varphi) = (\varphi_{\tau,\tau'})$, где $\varphi_{\tau,\tau'} \in \mathrm{Hom}(H^{(\tau')}, H^{(\tau)})$, $\tau, \tau' \in \Omega^*$. Положим $N_1 = \max\limits_{\tau\in\Omega_3} N(\tau)$, $N_2 = N_2(\varphi) = \max\limits_{\tau\in\Omega_2} c(\varphi_{\tau,\tau})$, $N_3 = \max(6, N_1, N_2)$. Предположим, что множество $\Omega_1(G)$ непусто, тогда, согласно условию 1, имеем $|\Omega_1(G)| = 1$. Пусть $\tau_0 \in \Omega_1(G)$. Согласно замечанию 1, существует такое натуральное m, что $n(m) = c(\varphi_{\tau_0,\tau_0}) + 2m \geq N_3$ и эндоморфизм φ_{τ_0,τ_0} группы $H^{(\tau_0)}$ ранга 1 есть сумма $n(m)$ ее автоморфизмов. Полагая $N = n(m)$ при $\Omega_1(G) \neq \varnothing$ и $N = N_3$ при $\Omega_1(G) = \varnothing$, в силу предложения 2 и [4] получаем, что каждый эндоморфизм $\varphi_{\tau,\tau}$ группы $H^{(\tau)}(\tau \in \Omega^*)$ есть сумма N автоморфизмов групп $H^{(\tau)}$. Используя теорему 5, получаем суммируемость кольца $E(G)$.

Обратно, пусть $E(G) = \langle A(G)\rangle$. Рассмотрим каноническое разложение $G = \prod\limits_{\tau\in\Omega(G)} G^{(\tau)}$ группы G и обобщенные матрицы $(\varphi_{\tau,\tau'})$, $\tau, \tau' \in \Omega(G)$, кольца $\Phi = \vartheta(E(G))$, соответствующие этому разложению. Пусть φ — произвольный эндоморфизм группы G. Положим $\vartheta(\varphi) = (\varphi_{\tau,\tau'})$, где $\varphi_{\tau,\tau'} \in \mathrm{Hom}(G^{(\tau')}, G^{(\tau)})$, $\tau, \tau' \in \Omega(G)$. Зафиксируем два призвольно выбранных типа $\tau \neq \tau'$ из $\Omega(G)$ и покажем, что если $\mathrm{Hom}(G^{(\tau)}, G^{(\tau')}) \neq 0$, то $\mathrm{Hom}(G^{(\tau')}, G^{(\tau)}) = 0$.

Действительно, пусть $\mathrm{Hom}(G^{(\tau)}, G^{(\tau')}) \neq 0$. Тогда $0 \neq \mathrm{Hom}(G^{(\tau)}, G^{(\tau')}) \cong \mathrm{Hom}(\prod\limits_{i\in I(\tau)} G_i, \prod\limits_{j\in I(\tau')} G_j) \cong \prod\limits_{j\in I(\tau')} \mathrm{Hom}(\prod\limits_{i\in I(\tau)} G_i, G_j) \cong \prod\limits_{j\in I(\tau')} \bigoplus\limits_{i\in I(\tau)} \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$. Следовательно, $\tau < \tau'$. Поэтому $\mathrm{Hom}(G^{(\tau')}, G^{(\tau)}) = 0$.

Покажем теперь, что если $\varphi \in A(G)$, то $\varphi_{\tau,\tau} \in A(G^{(\tau)})$ для любого τ из $\Omega(G)$. Действительно, пусть $(\overline{\varphi}_{\tau,\tau'})$ — матрица кольца Φ, обратная

матрице $\vartheta(\varphi) = (\varphi_{\tau,\tau'})$. Тогда для любого $\tau \in \Omega(G)$ имеем

$$\varepsilon_{\tau,\tau} = \sum_{\tau' \in \Omega(G)} \varphi_{\tau,\tau'} \overline{\varphi}_{\tau',\tau},$$

где $\varepsilon_{\tau,\tau}$ — тождественный автоморфизм группы $G^{(\tau)}$. Однако $\varphi_{\tau,\tau'} \overline{\varphi}_{\tau',\tau} = 0$ при $\tau \neq \tau'$, следовательно, $\varphi_{\tau,\tau}^{-1} = \overline{\varphi}_{\tau,\tau}$ для любого $\tau \in \Omega(G)$.

Пусть теперь эндоморфизм φ группы G есть сумма $N = N(\varphi)$ ее автоморфизмов:

$$\varphi = \sum_{s \in \overline{H}} \psi^{(s)}, \psi^{(s)} \in A(G), \vartheta(\psi^{(s)}) = (\psi_{\tau,\tau'}^{(s)}),\ \tau, \tau' \in \Omega(G).$$

Тогда для любого τ из $\Omega(G)$ имеем $\varphi_{\tau,\tau} = \sum_{s \in \overline{N}} \psi_{\tau,\tau}^{(s)} \in A(G^{(\tau)})$. Предположим, что $|\Omega_1(G)| > 1$ и $\tau^{(1)}, \tau^{(2)} \in \Omega_1(G)$. Тогда, согласно [4], существуют эндоморфизмы $\varphi^{(1)} \in E(G^{(\tau^{(1)})})$, $\varphi^{(2)} \in E(G^{(\tau^{(2)})})$, которые нельзя представить одновременно в виде суммы одного и того же числа автоморфизмов. Поэтому эндоморфизм $\vartheta^{-1}[(X_{\tau,\tau'}^{(1)})]$ группы G, где

$$\begin{aligned} X_{\tau,\tau'}^{(1)} &= \varphi^{(1)} \text{ при } \tau = \tau' = \tau^{(1)}, \\ X_{\tau,\tau'}^{(1)} &= \varphi^{(2)} \text{ при } \tau = \tau' = \tau^{(2)}, \\ X_{\tau,\tau'}^{(1)} &= 0 \text{ в остальных случаях,} \end{aligned}$$

не является суммой ее автоморфизмов.

Предположим теперь, что $|\Omega_2(G)| \geq \aleph_0$. Тогда существует бесконечная последовательность чисел $c(\varphi_1) < c(\varphi_2) < \ldots < c(\varphi_k) < \ldots$, где $\varphi_k \in E(G^{(\tau_k)})$, $\tau_k \in \Omega_2(G)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим матрицу $(X_{\tau,\tau'}^{(2)})$ кольца Φ, где $X_{\tau,\tau'}^{(2)} = \varphi_k$ при $\tau = \tau' = \tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $X_{\tau,\tau'}^{(2)} = 0$ в остальных случаях. Ясно, что эндоморфизм $\vartheta^{-1}[(X_{\tau,\tau'}^{(2)})]$ группы G не является суммой ее автоморфизмов.

Если нарушено условие 3, то существует бесконечная последовательность чисел $c(\overline{\varphi}_1) = N(\overline{\tau}_1) < c(\overline{\varphi}_2) = N(\overline{\tau}_2) < \ldots < c(\overline{\varphi}_k) = N(\overline{\tau}_k) < \ldots$, где $\varphi_k \in E(G^{(\tau_k)})$, $\tau_k \in \Omega_2(G)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и $\overline{\varphi}_k \in E(G^{(\overline{\tau}_k)})$, $\tau_k \in \Omega_3(G)$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $(X_{\tau,\tau'}^{(3)})$ — матрица кольца Φ, где $X_{\tau,\tau'}^{(3)} = \overline{\varphi}_k$ при $\tau = \tau' = \overline{\tau}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $X_{\tau,\tau'}^{(3)} = 0$ в остальных случаях. Очевидно,

эндоморфизм $\vartheta^{-1}[(X^{(3)}_{\tau,\tau'})]$ группы G не представим в виде суммы ее автоморфизмов. □

Из доказанной теоремы и замечания 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 12. *Если G — такая группа из $\mathcal{F}_V$, что $\Omega'(G) = \varnothing$, то $E(G)$ свободно суммируемо.* □

Для абелевой группы G и типа τ положим соответственно $P(G) = \{p \mid pG = G\}$ и $P(\tau) = P(\mathbf{Q}^{(\tau)})$. Пусть γ — изоморфизм кольца $E(\mathbf{Q}^{(\tau)})$ на кольцо $\mathbf{Q}[P(\tau)]$ всех тех рациональных чисел a/b $((a,b) = 1)$, знаменатели которых делятся лишь на простые числа p из $P(\tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 13. *Если G — почти делимая группа из $\mathcal{F}_V$ и $|\Omega_1(G)| \leq 1$, то $\langle A(G)\rangle = E(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $N(\tau) \leq d$, где d — некоторое натуральное число, общее для всех τ из $\Omega(G)$. Пусть φ — произвольный эндоморфизм группы $\mathbf{Q}^{(\tau)}$ $(\tau \in \Omega(G))$ и $\gamma(\varphi) = a/b, a/b \in \mathbf{Q}[P(\tau)]$. Без ограничения общности считаем, что a — положительное целое число. Согласно ([10, теор. 6.2.1) имеем $a = \sum_{t\in\overline{n}} p_t$, где $n \leq c_0, p_t \in P$, а c_0 — некоторая постоянная не зависящая от a. Тогда

$$\varphi = \gamma^{-1}(a/b) = \sum_{t\in\overline{n}} \gamma^{-1}(p_t/b).$$

Если $p_t \in P(\tau)$, то $\gamma^{-1}(p_t/b) \in A(\mathbf{Q}^{(\tau)})$; если же $p_t \notin P(\tau)$, то $\gamma^{-1}(p_t/b) = p_t\gamma^{-1}(1/b)$, где $\gamma^{-1}(1/b) \in A(\mathbf{Q}^{(\tau)})$. Очевидно, что

$$N(\tau) \leq c_0 \max_{p\notin P(\tau)} p \leq c_0 \max_{p\notin P(G)} p = d,$$

где число d уже не зависит от типа $\tau \in \Omega(G)$. Все условия теоремы выполнены $(|\Omega_1(G)| \leq 1$, $\Omega_2(G) = \varnothing$, $\max N(\tau) \leq d$ для $\tau \in \Omega_3(G))$, следовательно, $\langle A(G)\rangle = E(G)$. □

Автор выражает благодарность Л. А. Бокутю и В. К. Харченко за внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Fuchs*, Recent results and problems on abelian groups, Topic in abelian groups, Chicago, 1963.
2. *P. Hill*, Endomorphism rings generated by units, Trans. Am. Math. Soc., 141 (1969), 99—105.
3. *F. Castagna*, Sums of a primary abelian group, Pac. J. Math., 27, N3 (1968), 463—473.
4. *А. М. Себельдин*, Суммы автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения, Изв. вузов, Математика, **153**, N2 (1975), 85—92.
5. *П. А. Крылов*, Суммы автоморфизмов абелевых групп, Изв. вузов, Математика, **167**, N4 (1976), 56—66.
6. *D. Arnold*, Finite rank torsion free abelian group and rings, New York-Heidelberg-Berlin, Springer, 1982.
7. *L. Fuchs*, Abelian groups, Budapest, 1958.
8. *К. Куратовский, А. Мостовский*, Теория множеств, М., Мир, 1970.
9. *А. В. Михалёв, А. П. Мишина*, Бесконечные абелевы группы: методы и результаты, Фундаментальная и прикладная математика, 1, N 2 (1995), 319—375.
10. *А. Гельфонд, Ю. Линник*, Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., Физматгиз, 1962.

Адрес автора:

СЕБЕЛЬДИН Анатолий Михайлович,
РОССИЯ,
603155, Нижний Новгород,
ул. Ковалихинская, д. 30, кв. 11,
дом. тел.: 8-8312-361344.
e-mail: aseb@apur.nnov.su

Поступило 16 мая 1995 г.