О. М. Фоменко, О количестве представлений чисел некоторыми тернарными квадратичными формами,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 154, 154–162

О.М.Фоменко

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

В настоящей работе выводятся точные формулы для количества представлений натуральных чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами, принадлежащими многоклассным родам. При этом коэффициенты Фурье соответствующих параболических форм в силу известных результатов Вальдшпуржера [I] и Таннелла [2] выражаются через значения L-функций Хассе - Вейля некоторых эллиптических кривых в центре критической полосы.

Основой всех дальнейших рассмотрений является параболическая форма $q(z)$ веса I, известная еще Якоби:

$$q(z) = \eta(8z)\eta(16z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2} =$$

$$= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^n q^{(4m+1)^2+8n^2} = (\Theta(z)-\Theta(4z))(\Theta(32z)-\tfrac{1}{2}\Theta(8z)), \quad (\mathrm{I})$$

где $\eta(z)$ - эта-функция Дедекинда,

$$\Theta(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2}, \qquad q = e^{2\pi i z} .$$

По поводу (I) см. [2], [3].

Таннелл доказал, что $q(z)$ - единственная нормализованная новая форма веса I, ступени I28 и характера χ_{-2}. Используя форму q, получим параболические формы $f_{2\alpha}(z)$ веса 3/2. Именно, пусть

$$f_{2\alpha}(z) = q(z)\cdot\Theta(2^\alpha z) = \qquad (2)$$

$$= \sum_{(m,n,k)\in\mathbb{Z}^3} (-1)^n q^{(4m+1)^2+8n^2+2^\alpha k^2} = \sum_{(m,n,k)\in\mathbb{Z}^3} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2+2^\alpha k^2} .$$

Пусть $[a;b,c] = ax^2+by^2+cz^2$, $\Theta([a,b,c];z)$ - соответствующий форме $[a,b,c]$ тэта-ряд, $E([a,b,c];z)$ - ассоциированный с этим тэта-рядом ряд Эйзенштейна. Рассматривая лишь случаи α = 0,I,2,3,4,5,6, после несложных вычислений получим следующие формулы:

$$\Theta([1,2,32];z) = E([1,2,32];z) + f_2(z), \qquad (3)$$

$$\Theta([1,4,32];z) = E([1,4,32];z) + f_4(z), \qquad (4)$$

$$\Theta([1,1,32];z) = E([1,1,32];z) + f_4(z) + f_1(z), \qquad (5)$$

$$\Theta([1,8,32];z) = E([1,8,32];z) + f_8(z), \qquad (6)$$

$$\Theta([1,16,32];z) = E([1,16,32];z) + f_{16}(z), \qquad (7)$$

$$\Theta([1,32,32];z) = E([1,32,32];z) + \frac{1}{2}f_8(z) + f_{32}(z), \qquad (8)$$

$$\Theta([1,32,64];z) = E([1,32,64];z) + f_{64}(z) + \frac{1}{2}f^{(0)}(z), \qquad (9)$$

причем $f^{(0)}(z)$ - "особая" параболическая форма (см.ниже). Докажем (3). Остальные формулы получаются сходным образом. Из (I) следует, что

$$\Theta([1,2,32];z) = \frac{1}{2}\Theta([1,2,8];z) + \Theta([1,2,16];2z) - $$
$$- \frac{1}{2}\Theta([1,2,4];2z) + f_2(z).$$

Формы $[1,2,8]$, $[1,2,16]$, $[1,2,4]$ принадлежат одноклассным родам ([4]). Следовательно,

$$\Theta([1,2,8];z) = E([1,2,8];z), \quad \Theta([1,2,16];z) = E([1,2,16];z),$$
$$\Theta([1,2,4];z) = E([1,2,4];z).$$

Но

$$\frac{1}{2}E([1,2,8];z) + E([1,2,16];2z) - \frac{1}{2}E([1,2,4];2z) = E([1,2,32];z),$$

и формула (3) доказана.

Отметим, что при доказательстве (9) мы использовали результат Г.А.Ломадзе [5] :

$$\Theta([1,8,64];z) = E([1,8,64];z) + f^{(0)}(z),$$

где $f^{(0)}(z)$ - "особая" параболическая форма веса 3/2, т.е. тэта-ряд квадратичной формы от одной переменной. Коэффициенты Фурье ряда Эйзенштейна $E([a,b,c];z)$ в явном виде вычислил Г.А.Ломадзе в работе [6]. В сочетании с этим результатом формулы (2) - (9)

дают точные формулы для количества представлений натуральных чисел соответствующими квадратичными формами. Так, из (3) следует точная формула

$$r([1,2,32];n) = e_2(n) + a(n),$$

где $r([1,2,32];n)$ - количество представлений n формой $[1,2,32]$, $e_2(n)$ - n-ый коэффициент Фурье ряда Эйзенштейна $E([1,2,32];z)$, $a(n)$ - n-ый коэффициент Фурье параболической формы $f_2(z)$. То же верно и в других случаях.

Ниже мы будем рассматривать лишь $\alpha = 0,1,2,3,4,5$.

Недавние результаты Вальдшпуржера [1] позволяют более глубоко изучить коэффициенты Фурье параболических форм в (3)-(8).

Пусть $S_{3/2}(128, 1)$ - пространство параболических форм веса 3/2, ступени 128 и характера 1 и $S_{3/2}(128, \chi_8)$ - пространство параболических форм веса 3/2, ступени 128 и характера χ_8. Имеем

$$f_2(z),\ f_8(z),\ f_{32}(z) \in S_{3/2}(128,1),$$

$$f_1(z),\ f_4(z),\ f_{16}(z) \in S_{3/2}(128,\chi_8).$$

Рассмотрим "особые" параболические формы

$$f_1^{(0)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n}\right) n q^{2n^2}, \tag{10}$$

$$f_{32}^{(0)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n}\right) n q^{n^2}. \tag{11}$$

Пусть

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n; \tag{12}$$

легко видеть, что $a(n)=0$, если $n \neq 8k+1, 8k+3$; имеем

$$f_8(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a'(n) q^n,$$

причем $a'(n) = a(n)$, если $n = 8k+1$; $a'(n)=0$, если $n \neq 8k+1$.

Пусть

$$f_4(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n; \tag{13}$$

легко видеть, что $b(n)=0$, если $n\neq 8k+1,\ 8k+5$; имеем

$$f_{16}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b'(n)\, q^n ,$$

причем $b'(n)=b(n)$, если $n=8k+1$; $b'(n)=0$, если $n\neq 8k+1$.

Имеем: $\dim S_{3/2}(128,1)=\dim S_{3/2}(128,\chi_8)=3$ ([7]). Из элементарных вычислений следует, что $f_2(z), f_8(z)$ - собственные функции всех операторов Гекке $T(p^2)$, $p\geqslant 2$ - простое, и что $\{f_2(z), f_8(z), f_{32}(z)\}$ - базис пространства $S_{3/2}(128,1)$. Аналогично получаем, что $f_4(z), f_{16}(z)$ - собственные функции всех операторов Гекке $T(p^2)$ и что $\{f_1^{(0)}(z), f_4(z), f_{16}(z)\}$ - базис пространства $S_{3/2}(128,\chi_8)$.

Легко видеть, что

$$f_1(z) = f_4(z) + 2 f_1^{(0)}(z),$$

$$f_{32}(z) = \tfrac{1}{2} f_8(z) + \tfrac{1}{2} f_{32}^{(0)}(z).$$

Тем самым формулы (5),(8) могут быть записаны в следующем виде:

$$\Theta([1,1,32];z) = E([1,1,32];z) + 2f_4(z) + 2f_1^{(0)}(z), \quad (5')$$

$$\Theta([1,32,32];z) = E([1,32,32];z) + f_8(z) + \tfrac{1}{2} f_{32}^{(0)}(z). \quad (8')$$

Другой вариант формулы (8) вывел Л.А.Коган [8].

Известно, что существует единственная нормализованная новая параболическая форма $\phi(z)=\eta^2(8z)\cdot\eta^2(4z)$ веса 2, ступени 32, тривиального характера I. Ее коэффициенты Фурье вычислил А.Н. Андрианов [9]. Имеем

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\, q^n ; \qquad s(n)=0 , \text{ если } n\not\equiv 1 \pmod 4). \quad (14)$$

Как показал А.Н.Андрианов,

$$s(p) = -\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x^2-1)}{p}\right),\ p\equiv 1 \pmod 4;\ s(p)=0,\ p\not\equiv 1 \pmod 4.$$

Из теории Гекке следует, что

$$\mathrm{Mellin}(\phi) = L(\phi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\, n^{-s} = \prod_{p>2}\left(1-s(p)p^{-s}+p^{1-2s}\right)^{-1}.$$

Таннелл [2] изучил действие подъема Шимуры ($Shim.$) на формы $f_{2\alpha}(z)$, α = I,2,3,4. Оказалось, что

$$\mathrm{Shim.}(f_{2\alpha}(z)) = \Phi(z), \quad \alpha = 1,2,3,4 .$$

Что касается "особых" параболических форм, в частности, $f_1^{(0)}(z)$, $f_{32}^{(0)}(z)$, то, как известно, подъем Шимуры переводит их в ряды Эйзенштейна.

Рассмотрим эллиптическую кривую с комплексным умножением

$$E^d: \; y^2 = x^3 - d^2 x ,$$

где $d>0$ бесквадратно. Пусть $L(E^d,s)$ - L-функция Хассе-Вейля кривой E^d . Имеем $L(E^1,s) = \mathrm{Mellin}(\Phi), L(E^d,s) = \mathrm{Mellin}(\Phi \otimes \chi_D)$, где $\chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ - квадратичный характер Дирихле, соответствующий мнимому квадратичному полю $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ дискриминанта D .

Обратимся к форме $f_2(z)$ (см. (I2)); достаточно рассматривать лишь $n \equiv 1,3 \pmod 8$. Специализируя общие результаты Вальдшпуржера [I], Таннелл [2] вывел следующую формулу: для $d>0$ бесквадратного нечетного имеем

$$a^2(d) = \frac{4}{\beta} d^{1/2} L(E^d,1) , \tag{I5}$$

где

$$\beta = \int_1^\infty dx/(x^3-x)^{1/2} = 2,62205\ldots$$

Имеем ($D=-d$, если $-d \equiv 1 \pmod 4$; $D=-4d$, если $-d \equiv 3 \pmod 4$)

$$L(E^d,s) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\chi_D(n)\, n^{-s} =$$

$$= \prod_{p \nmid 2d} (1 - s(p)\chi_D(p)\, p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}, \quad \mathrm{Re}\, s > \tfrac{3}{2} ;$$

в частности,

$$L(E^d,1) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\,\chi_D(n)\, n^{-1} , \tag{I6}$$

причем $s(n)$ выражается через символы Лежандра (см. выше).

Обратимся теперь к форме $f_4(z)$ (см. (I3)); достаточно рассматривать лишь $n \equiv 1,5 \pmod 8$. Пусть $d>0$ - бесквадратное нечетное число. Таннелл показал, что

$$b^2(d) = \frac{2}{\beta} (2d)^{1/2} L(E^{2d},1) . \tag{I7}$$

Имеем

$$L(E^{2d},s) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\chi_D(n)n^{-s} =$$

$$= \prod_{p\nmid 2d} (1-s(p)\chi_D(p)p^{-s}+p^{1-2s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > \tfrac{3}{2};$$

в частности,

$$L(E^{2d},1) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\chi_D(n)n^{-1}. \tag{18}$$

Отметим также, что $L(E^d,1)$, d бесквадратно, можно представить в виде конечного выражения в терминах $\wp$-функции Вейерштрасса с периодами β, $i\beta$ (см. [10]).

По теореме 1.9 работы Шимуры [11] $a(n^2t)$, где t бесквадратно, выражается через $a(t)$. То же верно для $b(n^2t)$.

Параболические формы $f_2(z)$, $f_4(z)$ играют важную роль в решении известной проблемы характеризации конгруэнтных чисел, принадлежащем Таннеллу [2]. Целое положительное число $n\in\mathbb{N}$ называется конгруэнтным, если оно является площадью прямоугольного треугольника с рациональными сторонами. Конгруэнтные числа рассматривались еще арабскими учеными (10 век) и Фибоначчи (1220). Без ограничения общности можно считать, что $n = d$ есть бесквадратное целое число.

Приведем следующую таблицу результатов:

d - конгруэнтное число $\Longleftrightarrow$ группа $E^d(\mathbb{Q})$ бесконечна

$$\underset{(\text{Б.-Св.-Д.})}{\overset{(\text{К.-У.})}{\rightleftarrows}} \quad L(E^d,1) = 0 \quad \overset{(\text{Т.})}{\Longleftrightarrow} \quad a(d) + b(d/2) = 0.$$

Результат $\Longleftrightarrow$ является общеизвестным (см. [12]), результат $\overset{(\text{К.-У.})}{\Longrightarrow}$ является частным случаем знаменитой теоремы Коутса-Уайлза [13], утверждение $\underset{(\text{Б.-Св.-Д.})}{\Longleftarrow}$ составляет частный случай гипотезы Берча-Свиннертона-Дайера [10], результат $\overset{(\text{Т.})}{\Longleftrightarrow}$ принадлежит Таннеллу [2]. Таким образом, решение Таннелла проблемы о конгруэнтных числах в одну сторону является пока условным.

Из результатов Таннелла и гипотезы Берча-Свиннертона-Дайера следует еще одно условное представление $a^2(d)$, $b^2(d)$. Именно, пусть d - бесквадратное конгруэнтное число, тогда

$$a^2(d) = \tau^2(d)\cdot|Ш(E^d)|, \; d \text{ нечетно};$$

$$b^2(d/2) = \tau^2(d/2)\cdot|Ш(E^d)|, \; d \text{ четно};$$

$\tau(d)$ - количество положительных делителей d, $|Ш(E^d)|$ - порядок группы Шафаревича-Тейта кривой E^d (предполагается, в частности, конечность этой группы).

Для бесквадратного d, $d \to \infty$, рассмотрим асимптотическое поведение $L(E^d, 1)$. Прежде всего отметим, что из результатов Таннелла следует $L(E^d,1) \geqslant 0$. Методами, разработанными в теории L-рядов Дирихле, легко показать (см., например, [I4]), что

$$L(E^d, 1) \ll d^{1/2} \log^2 d. \tag{I9}$$

Предполагается справедливость оценки

$$L(E^d, 1) \ll d^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, и даже (см. [I5]) оценки

$$L(E^d, 1) \ll d^{c(\log d \cdot \log\log d)^{-1/2}},$$

где $c > 0$ - константа.

Свертка Ранкина позволяет получить следующие результаты о поведении интересующих нас величин в среднем. Имеем

$$\sum_{d \leqslant X} L(E^d, 1) \asymp X, \tag{20}$$

где суммирование идет по нечетным бесквадратным d, причем можно ограничиться неконгруэнтными числами; аналогичное равенство верно для четных бесквадратных d. В предположении справедливости гипотезы Берча-Свиннертона-Дайера имеем условный вариант формулы (20):

$$\sum_{d \leqslant X} \tau^2(d) \, |Ш(E^d)| \asymp X^{3/2}, \tag{2I}$$

где суммирование идет по нечетным бесквадратным неконгруэнтным d; аналогичное равенство верно для четных бесквадратных неконгруэнтных d.

В заключение отметим, что формы [I,2,32] и [I,8,32] содержатся в списке Джонса и Полла [I6] всех положительных примитивных тернарных диагональных регулярных квадратичных форм, принадлежащих многоклассным родам. Тэта-ряды некоторых других форм из этого списка исследовал Г.А.Ломадзе [5]; параболические формы, входящие в тэта-ряды, рассмотренные Г.А.Ломадзе, являются "особыми".

Литература

1. W a l d s p u r g e r J.-L. Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids semi-entier. - J.math. pures et appl., 1981, t.60, N 4, p.375-384.
2. T u n n e l l J.B. A classical diophantine problem and modular forms of weight 3/2. - Invent.math., 1983, vol.72, N 2, p.323-334.
3. M o r e n o C.J. The higher reciprocity laws: an example. - J.Number Theory, 1980, vol.12, N 1, p.57-70.
4. B r a n d t H., I n t r a u O. Tabellen reduzierter positiver ternärer quadratischer Formen. - Abh.Sächs.Akad. der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., 1958, Bd 45, N 4, 261 S.
5. Л о м а д з е Г.А. Формулы для числа представлений чисел некоторыми регулярными и полурегулярными тернарными квадратичными формами, принадлежащими двухклассным родам. - Acta arithm., 1978, vol.34, N 2, p.131-162.
6. Л о м а д з е Г.А. О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами.I,II. - Acta arithm., 1971, vol.19, N 3, p.267-305; N 4, p.387-407.
7. C o h e n H., O e s t e r l é J. Dimension des espaces de formes modulaires. - Lect.Notes Math., 1977, vol.627, p.69-78.
8. К о г а н Л.А. О представлении целых чисел положительно определенными квадратичными формами. Ташкент, 1971, 188 с.
9. А н д р и а н о в А.Н. Представление чисел некоторыми квадратичными формами в связи с теорией эллиптических кривых. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1965, т.29, № 1, с.227-238.
10. B i r c h B.J., S w i n n e r t o n - D y e r H.P.F. Notes on elliptic curves. II. - J. reine und angew. Math., 1965, vol.218, p.79-108.
11. S h i m u r a G. On modular forms of half-integral weight. - Ann.Math., 1973, vol.97, N 3, p.440-481.
12. K o b l i t z N. Introduction to elliptic curves and modular forms. Springer, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1984, 248 p.
13. C o a t e s J., W i l e s A. On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. - Invent.math., 1977, vol.39, N 3, p.223-251.

14. Голубева Е.П., Фоменко О.М. Значения рядов Дирихле, ассоциированных с модулярными формами, в точках $s = 1/2$, I. – В кн.: Автоморфные функции и теория чисел. 2. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1984, т.134, с.117–137.
15. Lang S. Conjectured diophantine estimates on elliptic curves. – Prog. in Mathematics, 1983, vol.35, p.155–171.
16. Jones B.W., Pall G. Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms. – Acta math., 1939, vol.70, p.165–191.