П. Г. Юров, Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа, *Изв. вузов. Матем.*, 1966, номер 2, 158–163

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1966 МАТЕМАТИКА № 2 (51)

УДК 517.544

П. Г. Юров

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается следующая краевая однородная задача Римана. В области D — плоскости с разрезом по лучу $L=[a, \infty]$ вещественной оси ($1 \leqslant a < \infty$) — найти аналитическую функцию $\Phi(z)$, предельные значения которой на L связаны линейным соотношением

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\, \Phi^{-}(t) \qquad (a<t<\infty), \tag{1}$$

где $G(t)$ — функция, заданная в промежутке $[a, \infty)$, причем $\ln|G(t)| \in H(\mu)$, $a \leqslant t \leqslant \infty$, то есть удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ:

$$\Big|\ln|G(t_2)|-\ln|G(t_1)|\Big|<A\left|\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right|^{\mu} \quad (0<\mu \leqslant 1), \tag{2}$$

$$\arg G(t)=\varphi(t) \ln^{\alpha} t \quad (\alpha>0), \tag{3}$$

$$\varphi(t) \in H(\lambda) \ (a \leqslant t \leqslant \infty, \ \varphi(\infty)=b>0, \ 0<\lambda \leqslant 1), \tag{4}$$

в начальной точке контура

$$-2\pi<\arg G(a) \leqslant 0. \tag{5}$$

Краевая задача Римана с конечным индексом при весьма общих предположениях относительно коэффициента $G(t)$ и контура L исследована Ф. Д. Гаховым и его учениками [1]. В последнее время приходят к задачам, имеющим бесконечный индекс. Краевую задачу с бесконечным индексом степенного порядка изучал Н. В. Говоров; ей посвящены его работы [2], [3], в которых и дано определение бесконечного индекса. Сформулированная выше задача (1) имеет, в связи с (3) и (4), бесконечный положительный индекс логарифмического типа.

§ 1. В дальнейшем надо знать поведение в окрестности точки $\tau=0$ интеграла типа Коши

$$\Omega(\tau)=\frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{s} \frac{\ln^{\alpha} \frac{1}{u}}{u-\tau}\, du. \tag{6}$$

Лемма. *При любом $\alpha>0$ интеграл (6) в окрестности $\tau=0$ допускает представление $\Omega(\tau)=\omega(\tau)+O(1)$, где*

$$\omega(\tau)=\frac{(\ln 1/\tau)^{1+\alpha}}{2\pi i(1+\alpha)}+\frac{(\ln 1/\tau)^{\alpha}}{2}+$$

$$+\sum_{n=2}^{p+1} B_n \frac{(2\pi i)^{n-1}}{} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{n!}(\ln 1/\tau)^{\alpha+1-n},$$

B_n — *числа Бернулли* ([6], стр. 258), $p=[\alpha]$ ($[\alpha]$ — *целая часть* α), *причем ветвь* $\ln 1/\tau$ *непрерывна в области* $(|\tau|<1)\cap(0<\arg\tau<2\pi)$ *и* $(\ln 1/u)>0$, $(\ln 1/u)^\alpha>0$ *на верхнем берегу разреза* $0<u<1$.

Заметим, что случай натурального α (при более общих предположениях относительно контура) рассмотрен в [4].

Доказательство. Будем считать, что в (6) $s=e^{-2\pi(1+\delta)}$, где $\delta>0$. Пусть $\omega(\tau)=\sum\limits_{n=0}^{p+1} c_n(\ln 1/\tau)^{\alpha-n+1}$, и c_n выбираются так, чтобы выполнялось равенство $\omega^+(t)-\omega^-(t)=(\ln 1/t)^\alpha+\sigma(t)$, где $\sigma(t)\to 0$ при $t\to 0$. Непосредственно находим $c_0=[2\pi i(1+\alpha)]^{-1}$, $c_1=0{,}5$. Далее, полагая $c_k=B_k\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+2)}{k!}(2\pi i)^{k-1}$ $(k=2,3,\ldots,p+1)$, приходим к системе линейных уравнений $(k=2,3,\ldots,p+1)$

$$\frac{B_k}{k!\,1!}-\frac{B_{k-1}}{(k-1)!\,2!}+\ldots+\frac{(-1)^k B_2}{2!\,(k-1)!}+\frac{(-1)^k B_1}{1!\,k!}+\frac{(-1)^k}{(k+1)!}=0.$$

Единственным решением этой системы является последовательность чисел Бернулли: $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_3=0$, $B_4=-1/30$ и т. д. до B_{p+1}. Итак, числа c_n определены. Теперь легко найдем

$$\sigma(t)=M_\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{m,\alpha}\left[2\pi i(\ln 1/t)^{-1}\right]^{m+1-\{\alpha\}},\quad \text{где}\quad M_\alpha=(2\pi i)^\alpha\alpha(\alpha-1)\ldots\{\alpha\},$$

$$\gamma_{m,\alpha}=(1-\{\alpha\})\ldots(m-\{\alpha\})\sum_{k=0}^{p+1}\frac{(-1)^{p+1-k}}{(m+p+2-k)!}\frac{B_k}{k!}\ \text{и}\ \{\alpha\}\ \text{— дробная часть}\ \alpha.$$

Очевидно, $|\gamma_{m,\alpha}|<\dfrac{A_\alpha}{m+1}$ $(A_\alpha=\mathrm{const})$. Убедимся в ограниченности особого интеграла

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^s\frac{\sigma(u)}{u-t}\,du\qquad(0<t\leqslant s/2).$$

Будем считать, что α — нецелое, так как при α целом $\sigma(t)\equiv 0$. Оценим $|\sigma(u)-\sigma(t)|$, $0\leqslant u\leqslant s$. Пусть сначала $0\leqslant u\leqslant 0{,}5t$. Тогда $|(\ln 1/u)^{-m-1+\{\alpha\}}-(\ln 1/t)^{-m-1+\{\alpha\}}|<2(\ln 1/t)^{-m-1+\{\alpha\}}$ и $|\sigma(u)-\sigma(t)|<$

$$<2|M_\alpha|A_\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+1}\left(\frac{2\pi}{\ln 1/t}\right)^{m+1-\{\alpha\}}<2|M_\alpha|A_\alpha\left(\frac{2\pi}{\ln 1/t}\right)^{2-\{\alpha\}}\frac{1}{1-2\pi/(\ln 1/t)}<$$

$<C_\alpha|\ln|u-t||^{\{\alpha\}-2}$ (C_α — постоянная). Пусть, далее, $0{,}5t\leqslant u\leqslant 1{,}5t$. Тогда, применяя теорему Лагранжа, придем к оценке

$$|\sigma(u)-\sigma(t)|\leqslant\frac{|M_\alpha|A_\alpha}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|u-t|}{\xi_m}\left(\frac{2\pi}{\ln 1/\xi_m}\right)^{m+2-\{\alpha\}}\qquad(0{,}5t<\xi_m<1{,}5t),$$

откуда, учитывая, что функция $|u-t|\,|\ln|u-t||^{2-\{\alpha\}}$ монотонна при $0{,}5t\leqslant u\leqslant t$ и $t\leqslant u\leqslant 1{,}5t$, легко получить $|\sigma(u)-\sigma(t)|<$ $<C'_\alpha|\ln|u-t||^{\{\alpha\}-2}$ $(C'_\alpha=\mathrm{const})$. Наконец, при $1{,}5t\leqslant u\leqslant s$, исходя из неравенства

$$|(\ln 1/u)^{-m-1+\{\alpha\}}-(\ln 1/t)^{-m-1+\{\alpha\}}|<2(\ln 1/u)^{-m-1+\{\alpha\}}$$

и оценивая сумму соответствующей геометрической прогрессии, придем к оценке:

$$|\sigma(u)-\sigma(t)| \leqslant C''_\alpha |\ln|u-t||^{\langle\alpha\rangle-2} \quad (C''_\alpha = \text{const}).$$

Из полученных неравенств и следует ([1], стр. 60) ограниченность $\psi(t)$ при $0 < t \leqslant s/2$.

Рассмотрим теперь функцию $\Omega(\tau)-\omega(\tau)+\psi(\tau)$ $(\tau \in D)$, где

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^s \frac{\sigma(u)}{u-\tau}\,du.$$

Используя результаты [5] (стр. 29, 95) можно показать, что $|\Omega(\tau)| < A_\varepsilon |\tau|^{-\varepsilon}$ при любом $0<\varepsilon<1$ $(A_\varepsilon = \text{const})$. Но тогда $|\Omega(\tau)-\omega(\tau)+\psi(\tau)| < A'_\varepsilon|\tau|^{-\varepsilon}$ в достаточно малой окрестности $\tau=0$, например, в круге $|\tau| \leqslant s/2$ $(A'_\varepsilon = \text{const})$. Применяя формулы Сохоцкого, установим, что при $0<t\leqslant s/2$

$$[\Omega(t)-\omega(t)+\psi(t)]^+ = [\Omega(t)-\omega(t)+\psi(t)]^-.$$

Следовательно, аналитическая в окрестности $\tau=0$ функция $\Omega(\tau)-\omega(\tau)+\psi(\tau)$ имеет в точке $\tau=0$ устранимую особенность. Поэтому $\Omega(\tau)=\omega(\tau)+O(1)$, $\tau \in D$, $|\tau| \leqslant s/2$, и лемма доказана.

§ 2. Перейдем к построению канонической функции.

Определение. Каноническая функция задачи (1) есть такое ограниченное в $D+L$ ее решение $X(z)$, которое не имеет нулей ни в области D, ни на контуре L, кроме, может быть, его концов, и при этом $|X(z)| > C|z-a|^\nu$ в окрестности $z=a$ $(C>0$ — постоянная, $0\leqslant\nu<1)$, $X(0)=1$.

Теорема 1. *Каноническая функция задачи* (1) *определяется формулой*

$$X(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_a^\infty \frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,dx\right\}. \tag{7}$$

Доказательство. Аналитичность $X(z)$ в D вытекает из свойств интеграла типа Коши ([5], стр. 46, 47). Исследуем теперь подробнее интеграл

$$h(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_a^\infty \frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,dx.$$

Плотность его, в силу соотношений (2)—(4), удовлетворяет условию Гёльдера при $a \leqslant x \leqslant \infty$. Значит, на каждом отрезке $a < t_0 \leqslant t \leqslant T < \infty$ контура L предельные значения $h(z)$ ограничены; поэтому остается рассмотреть поведение $h(z)$ лишь в окрестности $z=a$ и $z=\infty$. Вблизи $z=a$ имеем ([1], стр. 73)

$$\operatorname{Re} h(z) = -\arg G(a)\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\ln|z-a| + O(1). \tag{8}$$

Следовательно, на основании (5), $X(z)$ при малых $|z-a|$ ограничена. Вводя новые переменные $u=1/x$, $\tau=1/z$, получим

$$h\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{1/a}\frac{\ln|G(1/u)|}{u-\tau}\,du - \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/a}\frac{\varphi(1/u)(\ln 1/u)^\alpha}{u-\tau}\,du.$$

Но последний интеграл можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{1/a}\frac{\varphi(1/u)-\varphi(\infty)}{u-\tau}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^\alpha du+\frac{\varphi(\infty)}{2\pi}\int\limits_0^{s}\frac{\ln^\alpha\frac{1}{u}}{u-\tau}\,du+\frac{\varphi(\infty)}{2\pi}\int\limits_s^{1/a}\frac{\ln^\alpha\frac{1}{u}}{u-\tau}\,du;$$

здесь первое и третье слагаемые ограничены вблизи $\tau=0$, второе же есть $ib\Omega(\tau)$ (§ 1), где $b=\varphi(\infty)$. Привлекая лемму, найдем, что при $z\to\infty$

$$h(z)=-(2\pi i)^{-1}\cdot\ln|G(\infty)|\cdot\ln z-ib\omega(1/z)+O(1). \tag{9}$$

Таким образом, в окрестности $z=\infty$

$$\begin{gathered}X(z)=O(1)\exp\left\{-\frac{b(\ln z)^{1+\alpha}}{2\pi(1+\alpha)}-\frac{ib\ln^\alpha z}{2}-\right.\\ \left.-ib\sum_{n=2}^{p+1}B_n\frac{(2\pi i)^{n-1}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{n!}(\ln z)^{\alpha-n+1}\right\}.\end{gathered} \tag{10}$$

Из изложенного следует, что $X(z)$ ограничена на всей плоскости и не обращается в нуль в точках, отличных от $z=a$ и $z=\infty$, поскольку во всех таких точках $h(z)\neq\infty$. Далее из формул Сохоцкого имеем $X^+(t)=G(t)X^-(t)$ $(a<t<\infty)$, то есть для $X(z)$ оказывается верным условие (1). Наконец, неравенство

$$|X(z)>C|z-a|^\nu\quad(0\leqslant\nu<1), \tag{11}$$

где $C>0$ — постоянная, $\nu=-\dfrac{\arg G(a)}{2\pi}$, вытекает при малых $|z-a|$ из (5) и (8). Равенство $X(0)=1$ очевидно. Теорема доказана. Единственность канонической функции обоснована в § 5.

§ 3. Выясним форму общего решения задачи (1). Будем сначала искать решение задачи (1) в классе E всех (как ограниченных, так и неограниченных в $D+L$) функций, регулярных в области D, непрерывных вплоть до L, кроме, может быть, концов L, и ограниченных в окрестности $z=a$.

Теорема 2. *Задача* (1) *в классе E имеет бесконечное множество решений, и общее решение ее выражается формулой*

$$\Phi(z)=F(z)X(z)\equiv F(z)\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int\limits_a^\infty\frac{\ln G(x)}{x(x-z)}dx\right\},$$

в которой $F(z)$ — произвольная целая функция.

Доказательство. Действительно, пусть $F(z)$ — произвольная целая функция. Тогда, очевидно, функция $\Phi(z)=F(z)X(z)$ удовлетворяет условию (1) и ограничена вблизи $z=a$. Значит, $\Phi(z)\in E$.

Пусть теперь, обратно, $\Phi(z)\in E$. Тогда $F(z)=\Phi(z)/X(z)$ регулярна в D и $F^+(t)=F^-(t)$ $(t\in L)$. Кроме того, в окрестности $z=a$, согласно (11), $|F(z)|<|\Phi(z)|C^{-1}|z-a|^{-\nu}\leqslant C_1|z-a|^{-\nu}$ $(0\leqslant\nu<1)$. Таким образом, $F(z)$ — целая функция. Теорема доказана.

§ 4. Установим признаки, позволяющие выделить класс ограниченных на всей плоскости решений задачи (1).

Определение. Назовем целую функцию $F_0(z)$ принадлежащей классу G, если соответствующее решение задачи (1) $\Phi(z)=F_0(z)X(z)$ ограничено в $D+L$.

Теорема 3. *Для того чтобы целая функция $F(z)$ принадлежала классу G, необходимо и достаточно выполнения условий:*

1) $F(z)$ *имеет нулевой порядок роста* (*в смысле* [6], *стр.* 499); 2) *для достаточно больших значений* t, $t \in L$,

$$\ln|F(t)| - \frac{b(\ln t)^{1+\alpha}}{2\pi(1+\alpha)} -$$

$$- b\sum_{n=1}^{n_0}(-1)^n B_{2n}\frac{(2\pi)^{2n-1}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}(\ln t)^{\alpha-2n+1} \leqslant C_F, \qquad (12)$$

где $C_F < \infty$ — *константа*, $n_0 = \left[\frac{[\alpha]+1}{2}\right]$.

Необходимость. Пусть $\Phi(z) = F(z)\cdot X(z)$ — ограниченное решение задачи (1). Из (10) следует, что равномерно по φ

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|X(re^{i\varphi})|}{(\ln r)^{1+\alpha}} = -\frac{b}{2\pi(1+\alpha)}\ \left(=b_0\right).$$

Но из этого соотношения и неравенства $|\Phi(z)| < C_F$ имеем

$$\max_{|z|=r}\ln|F(z)| \leqslant \ln C_F - (b_0+\varepsilon)(\ln r)^{1+\alpha} \text{ при } r > r_0(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

и 1) доказано. Условие 2) доказывается аналогично.

Достаточность. Пусть при достаточно больших $t > 0$ верно неравенство (12). Тогда, отправляясь от (10), находим $\ln|\Phi^{\pm}(t)| \leqslant C_F$ для всех $t \in L$. Но, по условию, порядок роста $F(z)$, а, значит, и $\Phi(z)$, равен нулю. Применяя теорему Фрагмена—Линделёфа ([6], стр. 472), видим, что $|\Phi(z)| \leqslant C_F$ всюду в области $D+L$, что и требовалось доказать.

§ 5. В случае конечного индекса $\varkappa > 0$ однородная задача Римана имеет $\varkappa+1$ ограниченных линейно-независимых решений, и для выделения частного решения надо задать $\varkappa+1$ условий ([1], стр. 114). Рассмотрим подобный вопрос для данного случая.

Пусть

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\text{ раз}},\ z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \quad (z_n\to\infty) \qquad (13)$$

— последовательность комплексных чисел $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ Число $\nu_0 = \inf\{\nu\}$, где $\nu > 0$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty}(1/|z_n|^{\nu}) < \infty$, называется показателем сходимости последовательности (13).

Теорема 4. *Общее решение задачи* (1) *в классе всех ограниченных в* $D+L$ *функций выражается формулой*

$$\Phi(z) = Cz^k\prod_{n=1}^{m_0}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_a^{\infty}\frac{\ln G(x)}{x(x-z)}dx\right\} \quad (m_0 \leqslant \infty),$$

в которой показатель сходимости последовательности $\{z_n\}$ *равен нулю; при условии, что на* L *выполняется асимптотическое неравенство*

$$\ln t^k\left|\prod_{n=1}^{m_0}\left(1-\frac{t}{z_n}\right)\right| - \frac{b(\ln t)^{1+\alpha}}{2\pi(1+\alpha)} -$$

$$- b\sum_{j=1}^{n_0}(-1)^j B_{2j}\frac{(2\pi)^{2j-1}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-2j+2)}{(2j)!}(\ln t)^{\alpha-2j+1} \leqslant C_F.$$

Эта теорема совпадает, в сущности, с теоремой 3, так как порядок роста $F(z)$ равен показателю сходимости последовательности (13) ее нулей ([6], стр. 523).

Следствие 1. Два ограниченных решения $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ задачи (1) с общими нулями одинаковой кратности отличаются разве лишь постоянным множителем.

Следствие 2. Каноническая функция задачи (1), удовлетворяющая условию $X(0)=1$, единственна.

Это утверждение становится очевидным, если учесть, что вблизи $z=a$ справедливо (11).

Следствие 3. Задача (1) имеет бесконечное множество линейно независимых решений.

§ 6. В § 4 изложены условия принадлежности целой функции $F(z)$ классу G. Приведем здесь другую характеристику для $F(z)$, менее совершенную, но более удобную на практике.

Теорема 5. *Для того чтобы целая функция* $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *принадлежала классу* G, *достаточно соблюдения неравенства*

$$\left[\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\ln 1/|c_n|}{\ln n}-1\right)\right]^{-1}<1+\alpha. \tag{14}$$

Доказательство. В работе [7] установлено соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln\ln r}=\left[\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\ln 1/|c_n|}{\ln n}-1\right)\right]^{-1},$$

где $M_F(r)=\max\limits_{|z|=r}|F(z)|$. Пусть (14) справедливо. Тогда для достаточно малого $\varepsilon>0$ выполняется оценка

$$\ln M_F(r)<(\ln r)^{1+\alpha-\varepsilon} \quad \text{при} \quad r>r_0(\varepsilon). \tag{15}$$

Теперь, используя (15) и (10), обнаружим, что $|\Phi(z)|=|F(z)X(z)|<$ $<\mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

В заключение выражаю признательность Н. В. Говорову, ознакомившему меня со своими работами, и А. А. Гольдбергу, указавшему статью [7].

г. Новочеркасск

Поступило
28 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.

2. Н. В. Говоров. Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом. ИАН БССР, серия физ.-техн. наук, № 1, стр. 12—17, 1964.

3. Н. В. Говоров. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом. ДАН СССР, т. 154, № 6, стр. 1247—1249, 1964.

4. И. М. Мельник. Исключительный случай краевой задачи Римана. Тр. Тбилисск. математ. ин-та АН ГрССР, т. 24, стр. 149—162, 1957.

5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.

6. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

7. A. Schönhage. Über das Wachstum zusammengesetzter Funktionen. Math. Z., B. 73, H. 1, S. 22—44, 1960.