В. П. Курдюмов, Приближенное решение задачи оптимального управления для линейной неоднородной системы в гильбертовом пространстве, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2010, том 10, выпуск 3, 3–14

DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-3-3-14

МАТЕМАТИКА

УДК 512.66+513.83

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.П. Курдюмов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KurdyumovVP@info.sgu.ru

Для задачи оптимального управления с линейным дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве и квадратичным функционалом получены необходимые и достаточные условия оптимальности управлений и приближенные формулы их разложений в ряд по собственным и присоединенным элементам оператора, входящего в это уравнение.

Ключевые слова: базисность Рисса, резольвента, оптимальное управление, матрица бесконечного порядка.

Approximate Solution of an Optimal Control Problem with Linear Nonhomogeneous Control System in Hilbert Space

V.P. Kurdyumov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KurdyumovVP@info.sgu.ru

For an optimal control problem with a linear differential equation in Hilbert space and quadratic criteria necessary and sufficient conditions of control functions optimality and approximate formulas of the expansions of these functions in eigenfunctions of the control system operator have been obtained.

Key words: Riesz basisness, resolvent, optimal control, infinite matrix.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача

$$\frac{du}{dt} = Lu + f, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{2}$$

$$I(f,\varphi) = \|u(T) - u_0\|^2 + \|f\|^2 + \|g\|^2 \to \min. \tag{3}$$

Здесь $u(t)$ при каждом t принадлежит гильбертову пространству H; L — линейный оператор со всюду плотной в H областью определения D, имеющий лишь конечное число кратных собственных значений. Собственные значения λ_k удовлетворяют требованиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-2} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |e^{\lambda_k T}|^2 < \infty, \tag{4}$$

и ноль не является собственным значением; собственные и присоединенные элементы (с.п.э.) оператора L образуют базис Рисса в H;

НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ

норма резольвенты $(L-\lambda E)^{-1}$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор) в области, полученной из λ-плоскости удалением всех λ_k вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса, при $|\lambda| \to \infty$ растет не быстрее некоторой степени $|\lambda|$; управлением в задаче (1)–(3) являются $f \in K_1$, $\varphi \in K_2$, K_i — выпуклые замкнутые множества из H; u_0 — заданный элемент из H; $\|\cdot\|$ — норма в H.

Задачи, подобные (1)–(3), рассматривались, например, Дж.Э. Аллахвердиевым и Н.К. Аллахвердиевой в [1, 2]. В этих работах при условиях n-кратной полноты с.п.э. операторного пучка $A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^n A - n$, где A_i $(i = 0, \dots, n)$ — линейные вполне непрерывные операторы, и корректности задачи Коши: $u(t) = A_0 u(t) + A_1 \frac{du}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n u}{dt^n} + f(t)$, $u(0) = \varphi_0, \dots, u^{(n-1)}(0) = \varphi_{n-1}$ были получены операторные уравнения для оптимальных управлений $f(t)$, φ_i $(i = 0, \dots, n-1)$, где $f(t) \in M$, $\varphi_i \in M_i$ $(i = 0, \dots, n-1)$; M, M_i $(i = 0, \dots, n-1)$ — выпуклые замкнутые множества. В настоящей работе будут получены приближенные формулы разложений оптимальных управлений задачи (1)–(3) по с.п.э. оператора L для случая, когда $K_1 = K_2 = H$.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение задачи (1)–(3) ищется в гильбертовом пространстве H_1 со скалярным произведением $(z, y)_{H_1} = \int\limits_0^T (z(t), y(t))dt$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве H.

Определение. Функция $u(t)$ называется *решением задачи Коши* (1)–(2) в случае, когда $\varphi \in D$, если 1) $u(t) \in D$ при всех $t \in [0, T]$; 2) $u(t)$ непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению (1) на $(0, T)$ и начальному условию (2).

Определение. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением задачи* (1)–(2) в случае, когда $\varphi \in H$ и может не принадлежать области D, если существует последовательность $u_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ решений задач

$$\frac{du}{dt} = Lu + f_m, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

$$u(0) = v_m, \tag{6}$$

где $f_m \in H$, $v_m \in D$, $\|f_m - f\| \to 0$, $\|v_m - \varphi\| \to 0$ при $m \to \infty$ такая, что $\|u_m(t) - u(t)\| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Для простоты изложения в дальнейшем считаем, что все собственные значения оператора L простые. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных элементов оператора L и $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биортогональная к этой системе. Она также является базисом Рисса в H [3, с. 371, 374].

Теорема 1. *Обобщенное решение задачи* (1)–(2) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}(e^{\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)\varphi_k, \tag{7}$$

где сходимость рядов понимается в H.

Доказательство. Обозначим $u_m(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k^{-1}(e^{\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)\varphi_k$. Имеем $\dfrac{du_m}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}(f, \psi_k)\varphi_k$, $Lu_m(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)\varphi_k$. Легко видеть, что $u_m(t)$ при $t \in (0, T)$ удовлетворяет уравнению (5), где $f_m = \sum\limits_{k=1}^{m} (f, \psi_k)\varphi_k$ и, кроме того, $\|u_m(0) - \varphi\| \to 0$, $\|f_m - f\| \to 0$ при $m \to \infty$. Равномерная сходимость по $t \in [0, T]$ рядов в (7) следует по теореме Бари [3, с. 374] из условий (4) и базисности Рисса систем $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем единственность решения. Пусть $u^i(t)$ $(i = 1, 2)$ — обобщенные решения задачи (1)–(2). Тогда существуют последовательности f_m^i, $u_m^i(0)$ $(m = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2)$, что для решений $u_m^i(t)$ задачи (5)–(6) с элементами f_m^i вместо f_m и $u_m^i(0)$ вместо v_m при $m \to \infty$ имеют место соотношения: $\|f_m^i - f\| \to 0$, $\|u_m^i(0) - \varphi\| \to 0$ и $\|u_m^i(t) - u^i(t)\| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Обозначим $\tilde{u}_m(t) = u_m^1(t) - u_m^2(t)$, $\tilde{u}(t) = u^1(t) - u^2(t)$, $\tilde{f}_m = f_m^1 - f_m^2$. Ясно, что при $m \to \infty$ имеет место $\|\tilde{f}_m\| \to 0$ и $\|\tilde{u}_m(t) - \tilde{u}(t)\| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Так как функции $\tilde{u}_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ непрерывно дифференцируемы, то для всех $m = 1, 2, \ldots$ и фиксированного λ имеем:

$$\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\tilde{u}_m(\tau)d\tau = -\lambda^{-1}\tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}\Big|_0^t + \lambda^{-1}\int\limits_0^t \frac{d\tilde{u}_m(\tau)}{d\tau}e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= -\lambda^{-1}\tilde{u}_m(t)e^{-\lambda t} + \lambda^{-1}\tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}\int\limits_0^t L\tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau + \lambda^{-1}\tilde{f}_m\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}d\tau. \qquad (8)$$

Умножим (8) на λ и, используя замкнутость оператора L, вынесем его из под знака интеграла:

$$\lambda\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\tilde{u}_m(\tau)d\tau = -\tilde{u}_m(t)e^{-\lambda t} + \tilde{u}_m(0) + L\int\limits_0^t \tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau + \lambda^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)\tilde{f}_m.$$

Отсюда

$$(L - \lambda E)\int\limits_0^t \tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau = \tilde{u}_m(t)e^{-\lambda t} - \tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)\tilde{f}_m. \qquad (9)$$

Положим в (9) $t = T$ и умножим на $e^{\lambda T}$, тогда

$$(L - \lambda E)\int\limits_0^T e^{\lambda(T-\tau)}\tilde{u}_m(\tau)d\tau = \tilde{u}_m(T) - e^{\lambda T}\tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}(1 - e^{\lambda T})\tilde{f}_m. \qquad (10)$$

Пусть в точке λ существует $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, тогда (10) имеет вид

$$\int\limits_0^T e^{\lambda\tau}\tilde{u}_m(T - \tau)d\tau = R_\lambda[\tilde{u}_m(T) - e^{\lambda T}\tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}(1 - e^{\lambda T})\tilde{f}_m]. \qquad (11)$$

Перейдем в (11) к пределу при $m \to \infty$, получим тождество

$$R_\lambda\tilde{u}(T) = \int\limits_0^T e^{\lambda\tau}\tilde{u}(T - \tau)d\tau. \qquad (12)$$

Из (12) и требования на рост нормы резольвенты следует, что

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\,\lambda^{-1}\ln\left\|\int\limits_0^T e^{\lambda\tau}\tilde{u}(T - \tau)d\tau\right\| = 0. \qquad (13)$$

Поскольку функция $\tilde{u}(t)$ (как равномерный предел непрерывных функций) непрерывна на $[0, T]$, то $\int\limits_0^T \|\tilde{u}(t)\|dt < \infty$. Отсюда и из (13) по лемме [4, с. 81] следует, что $\tilde{u}(t) = 0$ почти всюду на $[0, T]$. А так как она непрерывна, то $\tilde{u}(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем обобщенные решения задач Коши мы называем решениями этих задач. Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть L^* — оператор, сопряженный оператору L, $v_T \in H$. Решение задачи Коши*

$$\frac{dv}{dt} = -L^*v, \quad t \in [0, T], \qquad (14)$$

$$v(T) = V_T \qquad (15)$$

существует, единственно и имеет вид

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\bar{\lambda}_k(T-t)}(v_T, \varphi_k)\psi_k. \qquad (16)$$

Теорема 3. *Решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно.*

Доказательство. Проверим условия теоремы Вейерштрасса [5, с. 57]. По формуле (7) имеем

$$u(T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f, \psi_k)\varphi_k, \tag{17}$$

где $\mu_k = \lambda_k^{-1}(e^{\lambda_k T} - 1)$. Правую часть (17) рассматриваем как линейный оператор $A(f, \varphi)$ в векторном пространстве $H^2 = H \bigoplus H$. Тогда для функционала (3) имеем:

$$I(f, \varphi) = \|A(f, \varphi) - u_0\|^2 + \|f\|^2 + \|\varphi\|^2 = \|A(f, \varphi) - u_0\|^2 + \left\| \begin{matrix} f \\ \varphi \end{matrix} \right\|_0^2 = I_1 + I_2,$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в H^2. Функционал $I(f, \varphi)$ рассматриваем в H^2. Поскольку I_2 — строго равномерно выпуклый функционал [5, с. 56], а I_1 — выпуклый, то $I(f, \varphi)$ — также строго равномерно выпуклый. Из базисности Рисса систем $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и условий (4) следует ограниченность, а значит, и непрерывность оператора $A(f, \varphi) : H^2 \to H$. Поэтому $I(f, \varphi)$ непрерывен. Теорема доказана.

2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Лемма 1. *Для приращения функционала* (3) *справедлива формула*

$$\begin{aligned} I(f + \Delta f, \varphi + \Delta\varphi) - I(f, \varphi) = -\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f.\Delta f) + \|\Delta f\|^2 - \\ -\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\Delta u(T)\|^2, \end{aligned} \tag{18}$$

где $v(t)$ — решение задачи (14)–(15) *для* $v(T) = -2(u(T) - u_0)$; $u(t)$ *— решение задачи* (1)–(2):

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} (v(T), \mu_k\varphi_k)\psi_k, \tag{19}$$

μ_k *— те же, что и в* (17); $\Delta u(t)$ *— решение задачи* (1)–(2) *с элементами Δf и $\Delta\varphi$ вместо соответственно f и φ; Δf и $\Delta\varphi$ таковы, что* $f + \Delta f \in K_1$, $\varphi + \Delta\psi \in K_2$.

Доказательство. Обозначим через $w(t)$ решение задачи (1)–(2), соответствующее $f + \Delta f$, $\varphi + \Delta\varphi$, тогда $\Delta u(t) = w(t) - u(t)$. Легко находим

$$\begin{aligned} I(f + \Delta f, \varphi + \Delta\varphi) - I(f, \varphi) = \|w(T) - u_0\|^2 + \|f + \Delta f\|^2 + \|\varphi + \Delta\varphi\|^2 - \|u(T) - u_0\|^2 - \|f\|^2 - \|\varphi\|^2 = \\ = 2\mathrm{Re}\,(u(T) - u_0, \Delta u(T)) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(f, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\Delta u(T)\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $v_s(t)$ — решение задачи

$$\frac{dv_s}{dt} = -L^* v_s, \tag{21}$$

$$v_s(T) = \sum_{k=1}^{s} (v_T, \varphi_k)\psi_k, \tag{22}$$

где $v_T = -2(u(T) - u_0)$; и $\Delta u_k(t)$ — задачи

$$\frac{d}{dt}\Delta u_k = L\Delta u_k + \Delta f_k, \tag{23}$$

$$\Delta u_k(0) = \sum_{i=1}^{k} (\Delta\varphi, \psi_i)\varphi_i, \tag{24}$$

где $\Delta f_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (\Delta f, \psi_i)\varphi_i$. Интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\Delta f_k, v_s)dt = \int_0^T \left(L\Delta u_k - \frac{d}{dt}\Delta u_k, v_s\right) dt = \int_0^T \left(\Delta u_k, L^* v_s + \frac{d}{dt} v_s\right) dt - (\Delta u_k(t), v_s(t) \Big|_0^T = \\ = (\Delta u_k(0), v_s(0)) - (\Delta u_k(T), v_s(T)). \end{aligned} \tag{25}$$

Так как при $k \to \infty$ имеют место: $\Delta f_k \to \Delta f$, $\Delta u_k(T) \to \Delta u(T)$, $\Delta u_k(0) \to \Delta\varphi$, то, переходя к пределу в (25) при $k \to \infty$, получим

$$\int_0^T (\Delta f, v_s)dt = (\Delta u(T), v_s(T))) - (\Delta\varphi, v_s(0). \tag{26}$$

Далее, так как при $s \to \infty$ $v_s(t)$ стремится к $v(t)$ — решению задачи (14)–(15); для $v_s(t)$ в силу (16) справедливо $v_s(t) = \sum\limits_{k=1}^{s} e^{\bar{\lambda}_k(T-t)}(v_T, \varphi_k)\psi_k$ и, как нетрудно видеть, $\lim\limits_{s\to\infty}\int\limits_0^T(\Delta f, v_s)dt = \left(\Delta f, \sum\limits_{k=1}^{\infty}(v_T, \mu_k\varphi_k)\psi_k\right)$, то, переходя в (26) к пределу при $s \to \infty$, получим

$$(\Delta f, g) = (\Delta u(T), v_T) - (\Delta\varphi, v(0)). \tag{27}$$

Поскольку $v_T = -2(u(T) - u_0)$, то из (27) следует, что

$$\mathrm{Re}\,\{(\Delta f, g) + 2(\Delta u(T), u(T) - u_0) + (\Delta\varphi, v(0))\} = 0. \tag{28}$$

Вычитая теперь из (20) равенство (28), получим (18). Лемма доказана.

Теорема 4. *Для оптимальности пары* f_0, φ_0 *в задаче* (1)–(3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

$$\min_{\varphi\in K_1}\left\{-\mathrm{Re}\,(g, f) + \|f\|^2\right\} = -\mathrm{Re}\,(g, f_0) + \|f_0\|^2, \tag{29}$$

$$\min_{\varphi\in K_2}\left\{-\mathrm{Re}\,(v(0), f) + \|\varphi\|^2\right\} = -\mathrm{Re}\,(v(0), f_0) + \|\varphi_0\|^2, \tag{30}$$

где $v(0)$ *— решение задачи* (14)–(15) *в точке* $t = 0$ *при* $v(T) = -2(u(T) - u_0)$; $u(t)$ *— решение задачи* (1)–(2) *при* $f = f_0$, $\varphi = \varphi_0$; g *— то же, что и в лемме* 1.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f_0, φ_0 — оптимальная пара, и Δf, $\Delta\varphi$ таковы, что $f = f_0 + \Delta f \in K_1$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \in K_2$. По лемме 1

$$-\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 - \mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\Delta u(T)\|^2 \geq 0, \tag{31}$$

где по теореме 1 $\Delta u(T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda kT}(\Delta\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\Delta f, \psi_k)\varphi_k$. В силу (4) и того, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базисы Рисса, имеет место оценка

$$\|\Delta u(T)\| = C\left(\|\Delta f\| + \|\Delta\varphi\|\right), \tag{32}$$

где постоянная C не зависит от Δf и $\Delta\varphi$. Поэтому из (31) тем более следует, что

$$-\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 - \mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 + C\left(\|\Delta f\| + \|\Delta\varphi\|\right)^2 \geq 0. \tag{33}$$

Возьмём в (33) $\Delta f = 0$, а вместо $\Delta\varphi$ возьмем $\alpha\Delta\varphi$, где $\alpha \in [0, 1]$. Разделим полученное неравенство на α и перейдем к пределу при $\alpha \to +0$, тогда $-\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) \geq 0$, и, тем более, $-\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 \geq 0$. Это и есть соотношение (30). Аналогично доказывается равенство (29).

Достаточность. Пусть для произвольных $f \in K_1$, $\varphi \in K_2$ имеют место неравенства:

$$-\mathrm{Re}\,(g, f) + \|f\|^2 \geq -\mathrm{Re}\,(g, f_0) + \|f_0\|^2, \tag{34}$$

$$-\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi) + \|\varphi\|^2 \geq -\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi_0) + \|\varphi_0\|^2. \tag{35}$$

Обозначим $f - f_0 = \Delta f$, $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$. Так как $\|f\|^2 - \|f_0\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(f_0, \Delta f) + \|\Delta f\|^2$ и $\|\varphi\|^2 - \|\varphi_0\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2$, то неравенства (34), (35) принимают вид

$$-\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f_0, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 \geq 0, \tag{36}$$

$$-\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 \geq 0. \tag{37}$$

Из (36) и (37) сразу следует, что $-\mathrm{Re}\,(g,\Delta f)+2\mathrm{Re}\,(f_0,\Delta f)+\|\Delta f\|^2-\mathrm{Re}\,(v(0),\Delta\varphi)+2\mathrm{Re}\,(\varphi_0,\Delta\varphi)+$ $+\|\Delta\varphi\|^2+\|\Delta u(T)\|^2\geq C$. По лемме 1 отсюда следует, что $I(f,\varphi)\geq I(f_0,\varphi_0)$ для любых $f\in K_1$, $\varphi\in K_2$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для оптимальности пары* f_0,φ_0 *в задаче* (1)–(3) *в случае, когда* $K_1=K_2=H$ *(эту задачу в дальнейшем называем задачей* (1′)–(3′)*) необходимо и достаточно, чтобы пара* f_0,φ_0 *являлась решением системы уравнений*

$$f_0+\sum_{i,j=1}^{\infty}(\varphi_0,\psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i,\mu_j\varphi_j)\psi_j+\sum_{i,j=1}^{\infty}(f_0,\psi_i)(\mu_i\varphi_i,\mu_j\varphi_j)\psi_j=\sum_{j=1}^{\infty}(u_o,\mu_j\varphi_j)\psi_j, \tag{38}$$

$$\varphi_0+\sum_{i,j=1}^{\infty}(\varphi_0,\psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)\psi_j+\sum_{i,j=1}^{\infty}(f_0,\psi_i)(\mu_i\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)\psi_j=\sum_{j=1}^{\infty}(u_o,e^{\lambda_j T}\varphi_j)\psi_j. \tag{39}$$

Доказательство. Так как

$$-\mathrm{Re}\,(g,f)+\|f\|^2=\|f-\tfrac{1}{2}g\|^2-\tfrac{1}{4}\|g\|^2, \tag{40}$$

$$-\mathrm{Re}\,(v(0),\varphi)+\|\varphi\|^2=\|\varphi-\tfrac{1}{2}v(0)\|^2-\tfrac{1}{4}\|v(0)\|^2, \tag{41}$$

то по теореме 4 для оптимальности пары f_0,g_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f_0=\tfrac{1}{2}g, \tag{42}$$

$$\varphi_0=\tfrac{1}{2}v(0). \tag{43}$$

Чтобы получить (38) подставим в (42) выражение для g по формуле (19), затем, заменяя в полученном уравнении $v(T)$ на $-2(u(T)-u_0)$ и $u(T)$ — на представление по формуле (7) в точке $t=t_0$ при $f=f_0$, $\varphi=\varphi_0$, получим (38). Аналогично получается (39). Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\ldots)^T$ *и* $\beta^0=(\beta_1^0,\beta_2^0,\ldots)^T$ *(*T *— знак транспонирования) принадлежат пространству* l_2 *(элементы из* l_2 *считаем столбцами). Для того, чтобы пара* f_0,φ_0, *где*

$$f_0=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^0\varphi_k,\qquad \varphi_0=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^0\varphi_k, \tag{44}$$

являлась решением задачи (1′)–(3′), *необходимо и достаточно, чтобы* α^0,β^0 *являлись решением системы уравнений*

$$(\Gamma+Q)\alpha+R\beta=p, \tag{45}$$

$$\mathcal{D}\alpha+(\Gamma+S)\beta=q, \tag{46}$$

где $\Gamma=(\varphi_i,\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $Q=(\mu_i\varphi_i,\mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $R=(e^{\lambda_i T}\varphi_i,\mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $\mathcal{D}=(\mu_i\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $S=(e^{\lambda_i T}\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$ *— бесконечные матрицы;* $p=(p_1,p_2,\ldots)^T$, $p_i=(u_0,\mu_i\varphi_i)$ $(i=1,2,\ldots)$; $q=(q_1,q_2,\ldots)^T$, $q_i=(u_0,e^{\lambda_i T}\varphi_i)$ $(i=1,2,\ldots)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f_0,φ_0 — решение задачи (1′)–(3′) и имеют место представления (44). И пусть также $f_0=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\xi_j\psi_j$, $\varphi_0=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\eta_j\psi_j$. Тогда

$$f_0=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^0\varphi_i=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\psi_j, \tag{47}$$

$$\varphi_0=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^0\varphi_i=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\psi_j. \tag{48}$$

Умножим (47) скалярно на φ_k $(k=1,2,\ldots)$, тогда

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^0(\varphi_i,\varphi_k). \tag{49}$$

Подставим (49) в (47):

$$f_0 = \sum_{j,i=1}^{\infty} \alpha_i^0(\varphi_i, \varphi_j)\psi_j. \tag{50}$$

Подставим (50) в первое слагаемое слева в (38) и приравняем коэффициенты при ψ_j $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_0, \psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty}(f_0, \psi_i)(\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j) = (u_0, \mu_j\varphi_j). \tag{51}$$

Подставим в (51) представления (44), тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i,k=1}^{\infty} \beta_k^0(\varphi_k, \psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j) + \sum_{i,k=1}^{\infty} \alpha_k^0(\varphi_k, \psi_i)(\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j) = (u_0, \mu_j\varphi_j) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0(e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0(\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j) = (u_0, \mu_j\varphi_j) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{52}$$

Уравнение (52) совпадает с уравнением (45). Аналогично получается уравнение (46).

Достаточность доказывается обратными рассуждениями. Теорема доказана.

Замечание. Из существования единственного решения задачи $(1')$–$(3')$ следует существование единственного решения системы (45)–(46) при $\alpha, \beta \in l_2$.

3. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Для нахождения приближенного решения задачи $(1')$–$(3')$ рассмотрим задачу (1)–(3) для случая, когда $K_1 = K_2 = T^{(n)}$, где $T^{(n)}$ — подпространство, порожденное системой $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, и обозначим эту задачу $P^{(n)}$. Из теоремы 3 следует существование единственного решения задачи $P^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Теорема 7. *Для того, чтобы пара* $f_0^{(n)}$, $\varphi_0^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots)$, *где*

$$f_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k, \qquad \varphi_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)}\varphi_k, \tag{53}$$

являлась решением задачи $P^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы векторы*

$$\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)})^T, \qquad \beta^{(n)} = (\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_n^{(n)})^T \tag{54}$$

являлись решением системы уравнений

$$(\Gamma_n + Q_n)\alpha^{(n)} + R_n\beta^{(n)} = p^{(n)}, \tag{55}$$

$$\mathcal{D}_n\alpha^{(n)} + (\Gamma_n + S_n)\beta^{(n)} = q^{(n)}, \tag{56}$$

где $\Gamma_n = (\varphi_i, \varphi_j)_{j,i=1}^{n}$, $Q_n = (\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^{n}$, $R_n = (e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^{n}$, $\mathcal{D}_n = (\mu_i\varphi_i, e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^{n}$, $S_n = (e^{\lambda_i T}\varphi_i, e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^{n}$, $p^{(n)} = ((u_0, \mu_1\varphi_1), \ldots, (u_0, \mu_n\varphi_n))^T$, $q^{(n)} = ((u_0, e^{\lambda_n T}\varphi_1), \ldots, (u_0, e^{\lambda_n T}\varphi_n))^T$.

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 4 имеем

$$\min_{f \in T^{(n)}} \{-\mathrm{Re}\,(g, f) + \|f\|^2\} = -\mathrm{Re}\,(g, f_0^{(n)}) + \|f_0^{(n)}\|^2, \tag{57}$$

$$\min_{\varphi \in T^{(n)}} \{-\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi) + \|\varphi\|^2\} = -\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi_0^{(n)}) + \|\varphi_0^{(n)}\|^2, \tag{58}$$

где g определен по формуле (19), в которой $v(T) = -2(u(T) - u(0))$; $u(t)$ — решение задачи (1)–(2), соответствующие $f = f_0^{(n)}$, $\varphi = \varphi_0^{(n)}$, $v(0)$ — значение в точке $t = 0$ решения задачи (14)–(15). Так как имеют место равенства (40), (41), то из (57), (58) следует, что $f_0^{(n)}$ является проекцией вектора

$\frac{1}{2}g$ на $T^{(n)}$, а $\varphi_0^{(n)}$ — проекцией вектора $\frac{1}{2}v(0)$ на $T^{(n)}$. По свойству проекций векторы $\frac{1}{2}g - f_0^{(n)}$ и $\frac{1}{2}v(0) - \varphi_0^{(n)}$ ортогональны $T^{(n)}$. Отсюда, учитывая (53), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(\varphi_k, \varphi_j) = \left(\frac{1}{2}g, \varphi_j\right) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)}(\varphi_k, \varphi_j) = \left(\frac{1}{2}v(0), \varphi_j\right) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{60}$$

Покажем, что из (59) следует (55). Так как из (7) и (53) следует, что

$$u(T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}(\varphi_0^{(n)}, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (f_0^{(n)}, \psi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e^{\lambda_k T}\varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \mu_k \varphi_k$$

и $v(T) = -2(u(T) - u_0)$, то по (19)

$$\frac{1}{2}g = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e^{\lambda_k T}(\varphi_k, \mu_i\varphi_i)\psi_i - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(\mu_k\varphi_k, \mu_i\varphi_i)\psi_i + \sum_{i=1}^{\infty}(u_0, \mu_i\varphi_i)\psi_i.$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{2}g, \varphi_j\right) = -\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e^{\lambda_k T}(\varphi_k, \mu_j\varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(\mu_k\varphi_k, \mu_j\varphi_j) + (u_0, \mu_j\varphi_j) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{61}$$

Подставив (61) в (59), получим (55). Аналогично из (60) получается (56). Достаточность доказывается обратными рассуждениями.

Замечание. Из существования единственного решения задачи (1)–(3) следует существование единственного решения системы (55)–(56).

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Введем гильбертово пространство $l_2^2 = l_2 \oplus l_2$. Элементы из l_2^2 обозначим $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, где $\xi, \eta \in l_2$. Если $\theta_i = \begin{pmatrix}\xi^i\\ \eta^i\end{pmatrix} \in l_2^2$ $(i = 1, 2)$, то скалярное произведение в l_2^2 определяем формулой $\langle\theta_1, \theta_2\rangle = (\xi^1, \xi^2)_1 + (\eta^1, \eta^2)_1$, где $(\cdot, \cdot)_1$ есть скалярное произведение в l_2, тогда $\|\theta\|_2^2 = \|\xi\|_1^2 + \|\eta\|_1^2$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в l_2, $\|\cdot\|_2$ — норма в l_2^2.

Лемма 2. *Пусть векторы* $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$ *из* (54) *являются решением системы* (55)–(56). *Обозначим* $\tilde{\alpha}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)^T$, $\tilde{\beta}^{(n)} = (\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)^T$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *— элементы из* l_2. *Тогда последовательность векторов* $\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{(n)}\\ \tilde{\beta}^{(n)}\end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ограничена в* l_2^2.

Доказательство. По теореме 7 векторы $f_0^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k$, $\varphi_0^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)}\varphi_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являются решением задачи $P^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку для всех $n = 1, 2, \ldots$ $J(f_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) \leq$ $\leq J(f_0^{(1)}, \varphi_0^{(1)})$, то $\|f_0^{(n)}\|, \|\varphi_0^{(n)}\| \leq C$, где постоянная C не зависит от n. Отсюда, в частности, следует, что $\|f_0^{(n)}\| = \|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k\| \leq C$. Тогда из пункта 3) в теореме Бари [3, с. 374] получаем $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leq C_1\|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k\|^2 \leq C_1C^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому последовательность $\tilde{\alpha}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена в l_2. Аналогично доказывается ограниченность в l_2 последовательности $\tilde{\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Обозначим через* $\tilde{\Gamma}_n, \tilde{Q}_n, \tilde{R}_n, \tilde{\mathcal{D}}_n, \tilde{S}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *матрицы бесконечного порядка, полученные соответственно из* $\Gamma_n, Q_n, R_n, \mathcal{D}_n, S_n$ *добавлением бесконечного числа нулей в качестве своих элементов в каждую строку и каждый столбец. Тогда операторы* A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *и* A, *действующие из* l_2^2 *в* l_2^2, *определенные формулами* $A_n = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_n\\ \sigma_n\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}$, *где* $\rho_n = (\tilde{\Gamma}_n + \tilde{Q}_n)\xi + \tilde{R}_n\eta$, $\sigma_n = \tilde{\mathcal{D}}_n\xi + (\tilde{\Gamma}_n + \tilde{S}_n)\eta$, $\rho = (\Gamma + Q)\xi + R\eta$, $\sigma = \mathcal{D}\xi + (\Gamma + S)\eta$, *самосопряжены.*

Доказательство. Доказательство проведем лишь для оператора A. Так как $\Gamma = \overline{\Gamma}^T$, $Q = \overline{Q}^T$, $S = \overline{S}^T$, $R = \overline{\mathcal{D}}^T$, то для произвольного $\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix} \in l_2^2$ имеем

$$\left\langle A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\right\rangle = (\rho,\mu)_1 + (\sigma,\nu)_1 = ((\Gamma + Q)\xi + R\eta, \mu)_1 + (\mathcal{D}\xi + (\Gamma + S)\eta, \nu)_1 =$$

$$= (\xi, (\Gamma + Q)\mu + \overline{\mathcal{D}}^T\nu)_1 + (\eta, \overline{R}^T\mu + (\Gamma + S)\nu)_1 = \left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\Gamma + Q)\mu + \overline{\mathcal{D}}^T\nu\\ \overline{R}^T\mu + (\Gamma + S)\nu\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\Gamma + Q)\mu + R\nu\\ \mathcal{D}\mu + (\Gamma + S)\nu\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Последовательность операторов* A_n *поточечно сходится к оператору* A.

Доказательство. Так как для произвольного $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \in l_2^2$

$$(A - A_n)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho - \rho_n\\ \sigma - \sigma_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\Gamma + Q - \tilde{\Gamma}_n - \tilde{Q}_n)\xi + (R - \tilde{R}_n)\eta\\ (\mathcal{D} - \tilde{\mathcal{D}}_n)\xi + (\Gamma + S - \tilde{\Gamma}_n - \tilde{S}_n)\eta\end{pmatrix},$$

то достаточно доказать, что поточечно в l_2 к нулю сходятся операторы, порожденные матрицами $\Gamma - \tilde{\Gamma}_n$,$Q - \tilde{Q}_n$, $R - \tilde{R}_n$, $\mathcal{D} - \tilde{\mathcal{D}}_n$, $S - \tilde{S}_n$ (в дальнейшем произвольный оператор, действующий из l_2 в l_2, порожденный матрицей T, называем оператором T). Докажем такую сходимость лишь для операторов $\Gamma - \tilde{\Gamma}_n$ (в остальных случаях доказательство проводится аналогично). Имеем для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)^T \in l_2$:

$$\|(\Gamma - \tilde{\Gamma}_n)\xi\|_1^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i\Big|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i\Big|^2. \tag{62}$$

Поскольку в силу пункта 4) из теоремы Бари [3, с. 374] оператор Γ ограничен в l_2, то при n достаточно большом второе слагаемое в (62) меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Рассмотрим первое слагаемое из (62). Обозначим $\tilde{\xi}^{(n+1)} = (\tilde{\xi}_1^{(n+1)}, \tilde{\xi}_2^{(n+1)}, \ldots)^T$, где $\tilde{\xi}_i^{(n+1)} = \begin{cases}0, & 1 \le i \le n,\\ \xi_i, & i \ge n+1.\end{cases}$ Опять, используя ограниченность Γ, при n достаточно большом и произвольном $\varepsilon > 0$ получим

$$\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i\Big|^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i, \varphi_j)\tilde{\xi}_i^{(n+1)}\Big|^2 \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i, \varphi_j)\tilde{\xi}_i^{(n+1)}\Big|^2 \le C\|\tilde{\xi}^{(n+1)}\|_1^2 = C\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2 < C\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Операторы* $Q, S, \mathcal{D}, R$ *являются вполне непрерывными в* l_2.

Доказательство. Докажем вполне непрерывность оператора R. Обозначим $[R]_n$ матрицу, полученную из матрицы R обнулением всех её элементов, расположенных в строках, начиная с $(n+1)$-й строки. Имеем для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)^T \in l_2$

$$\|(R - [R]_n)\xi\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}|\mu_j|^2\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(\varphi_k, \varphi_j)\Big|^2, \tag{63}$$

где $\eta_k = e^{\lambda_k T}\xi_k$. Из базисности Рисса системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует оценка $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(\varphi_k, \varphi_j)|^2 \le C\|\varphi_j\|^2 \le C_1$, где постоянная C_1 не зависит от j. Применяя неравенство Гельдера ко внутренней сумме в (63), используя только что полученную оценку и (4), получим для любого $\|\xi\|_1 \le 1$: $\|(R-[R]_n)\xi\|_1^2 \le$ $\le C_1\|\eta\|_1^2 \sum\limits_{j=n+1}^{\infty}|\mu_j|^2 \le C_2\|\xi\|_1^2 \sum\limits_{j=n+1}^{\infty}|\mu_j|^2 < \varepsilon$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T$, $\varepsilon > 0$ и произвольно мало. Поэтому конечномерные операторы $[R]_n$ сходятся к оператору R равномерно. Отсюда следует, что R вполне непрерывен. Так как оператор $\mathcal{D}$ является сопряженным к оператору R, то и он вполне непрерывен. Вполне непрерывность операторов Q и S доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 6. *Операторы* $(\Gamma + Q)^{-1}$, $(\Gamma + S)^{-1}$ *существуют, ограничены и определены всюду в* l_2.

Доказательство. Введем две вспомогательных задачи: одна из них получается из задачи $(1')$–$(3')$ при фиксированном $f = 0$, управлением в которой является лишь $\varphi \in H$, а вторая — из задачи $(1')$–$(3')$ при фиксированном φ и управлением в ней является лишь $f \in H$. Обозначим первую задачу (A), а вторую (B). Используя теоремы 1–3 и проводя рассуждения, аналогичные проведенным в лемме 1 и теоремах 3–6 для каждой из этих задач, получим следующие утверждения.

1. Решение задачи (A) существует и единственно. Пусть $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots)^T \in l_2$. Для того, чтобы $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \varphi_k$ являлся решением задачи (A), необходимо и достаточно, чтобы α^0 являлся решением уравнения

$$(\Gamma + Q)\alpha = p. \tag{64}$$

2. Решение задачи (B) существует и единственно. Пусть $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots)^T \in l_2$. Для того, чтобы ряд $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^0 \varphi_k$ являлся решением задачи (B), необходимо и достаточно, чтобы β^0 являлось решением уравнения $(\Gamma + S)\beta = q$.

Покажем, что существует, ограничен и определен во всем l_2 оператор $(E + \Gamma^{-1}Q)^{-1}$ (здесь E — единичный оператор в l_2). Для этого рассмотрим уравнение

$$(E + \Gamma^{-1}Q)\alpha = 0, \tag{65}$$

где $0 = (0, 0, \dots)^T$, которое получается из (64) при $u_0 = 0$. В силу единственного решения задачи (A) вектор $\alpha = 0$ является единственным решением уравнения (65). Из леммы 5 следует, что $\Gamma^{-1}Q$ является вполне непрерывным оператором. Тогда по теореме 3 [6, с. 275] неоднородное уравнение $(E + \Gamma^{-1}Q)\alpha = \xi$ разрешимо при любом $\xi \in l_2$ и оператор $(E + \Gamma^{-1}Q)^{-1}$ ограничен в l_2, и, следовательно, ограничен и оператор $(\Gamma + Q)^{-1}$. Аналогично доказываются подобные утверждения для оператора $(\Gamma + S)^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Множество значений оператора* $A : L_2^2 \to l_2^2$ *совпадает со всем пространством* l_2^2.

Доказательство. Для произвольных $\xi, \eta \in l_2$ рассмотрим систему уравнений

$$(\Gamma + Q)\alpha + \mathcal{D}\beta = \xi, \qquad R\alpha + (\Gamma + S)\beta = \eta. \tag{66}$$

Используя существование по лемме 6 операторов $(\Gamma + Q)^{-1}$ и $\Gamma + S)^{-1}$, запишем эту систему в виде

$$\alpha + (\Gamma + Q)^{-1}R\beta = (\Gamma + Q)^{-1}\xi, \qquad (\Gamma + S)^{-1}\mathcal{D}\alpha + \beta = (\Gamma + S)^{-1}\eta \tag{67}$$

и, вводя обозначения $V = (\Gamma + Q)^{-1}R$, $W = (\Gamma + S)^{-1}\mathcal{D}$ — в блочном виде,

$$(E + P)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \tag{68}$$

где E — единичный оператор в l_2^2, $P = \begin{pmatrix}0 & V\\ W & 0\end{pmatrix}$, а ξ и η имеют новый смысл. Поскольку из леммы 5 следует, что операторы V и W вполне непрерывны в l_2, то оператор P вполне непрерывен в l_2^2. По теореме 3 [6, с. 275], чтобы уравнение (68) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$(E + P)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{69}$$

имело лишь тривиальное решение. Так как уравнение (69) эквивалентно системе (66) при $\xi = \eta = 0$, то в силу единственности решения задачи $(1')$–$(3')$ при $u_0 = 0$ и по теореме 6 решением уравнения (69) является лишь $\alpha = \beta = 0$. Лемма доказана.

Используя введенные в лемме 2 векторы $\tilde{\alpha}^{(n)}$, $\tilde{\beta}^{(n)}$; аналогично определяя по векторам $p^{(n)}, q^{(n)}$ векторы $\tilde{p}^{(n)}, \tilde{q}^{(n)}$ и используя операторы A и A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, запишем системы (45)–(46) и (55)–(56) соответственно в виде

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$A_n \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}^{(n)} \\ \tilde{q}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Теорема 8. *Пусть* $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *— решение уравнения* (70) *и* $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *— уравнения* (71), *построенное по решению* $\begin{pmatrix} \alpha^{(n)} \\ \beta^{(n)} \end{pmatrix}$ *системы* (55)–(56). *Тогда* $\tilde{\alpha_i}^{(n)} \to \alpha_i$, $\tilde{\beta_i}^{(n)} \to \beta_i$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots$, *вообще говоря, неравномерно.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу замечаний к теоремам 6 и 7 указанные решения уравнений (70) и (71) существуют. Далее, так как по лемме 3 операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — самосопряженные, то для любого $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in l_2^2$ из (71) следует, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} \tilde{p}^{(n)} \\ \tilde{q}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A_n \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{72}$$

Так как $\tilde{p}^{(n)} \to p$, $\tilde{q}^{(n)} \to q$ при $n \to \infty$, то из (72), (70) и леммы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{73}$$

Используя леммы 2 и 4, находим

$$\left| \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, (A_n - A) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \right| \leq$$
$$\leq \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| (A - A_n) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|_2 < C\varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$ при n достаточно большом. Поэтому из (73) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Отсюда в силу лемм 2 и 7 по теореме 8 [6, с. 219] следует, что последовательность $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится в l_2^2. То есть для произвольного $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in l_2^2$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} - \alpha \\ \tilde{\beta}^{(n)} - \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \tag{74}$$

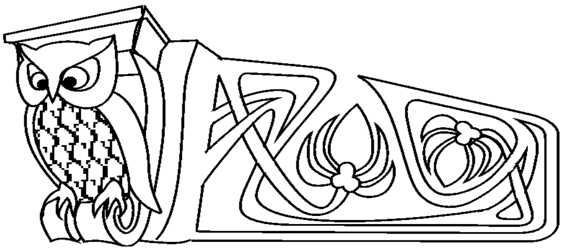
Из (74) следует, что в пространстве l_2 последовательность $\tilde{\alpha}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к α, а $\tilde{\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к β. Отсюда и из теоремы 9 [6, с. 219] следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1)

Библиографический список

1. *Аллахвердиев, Дж.Э.* Об одной задаче оптимального управления в гильбертовом пространстве / Дж.Э. Аллахвердиев, Н.К. Аллахвердиева // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. XIII, № 12. – С. 2124–2134.
2. *Аллахвердиева, Н.К.* Необходимое и достаточное условие оптимальности для некоторой задачи управления системой, описываемой дифференциально-операторным уравнением / Н.К. Аллахвердиева // Вопросы математической кибернетики и прикладной математики. – Баку: ЭЛМ, 1980. – Вып. 4. – С. 44–54.
3. *Гохберг, И.Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
4. *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
5. *Васильев, Ф.П.* Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 399 с.
6. *Люстерник, Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

УДК 514.133+514.17



КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 3(4)-КОНТУРЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л.Н. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: romakinaln@mail.ru

Введены в рассмотрение конечные замкнутые n-контуры расширенной гиперболической плоскости H^2. Подробно исследованы топологические и метрические свойства конечных замкнутых 3(4)-контуров. Получены аналоги предложения Паша. Доказано: существование двух типов 4-контуров; выпуклость простого 4-контура.

Ключевые слова: конечный замкнутый n-контур, простой 4-контур, внутренность конечного замкнутого контура, выпуклый замкнутый конечный контур.

Finite Closed 3(4)-Loops of Extended Hyperbolic Plane

L.N. Romakina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: romakinaln@mail.ru

This article considers finite closed n-loops of the extended hyperbolic plane H^2. The paper deals with topological and metric properties of the finite closed 3(4)-loops. Pasha statement analogues have been also obtained. We proved the existence of two types 4-loops and convexity of the plain 4-loop.

Key words: finite closed n-loop, plain 4-loop, interior of a finite closed isotropic loop, convex finite closed loop.

ВВЕДЕНИЕ

1. *Расширенной гиперболической плоскостью* H^2 называют проективную плоскость с фиксированной на ней овальной линией γ [1], линию γ в этом случае называют *абсолютом плоскости* H^2. Все точки линии γ называют бесконечно удаленными, или несобственными. Внутренняя область относительно овальной линии γ является полной плоскостью Лобачевского, а на множестве всех внешних относительно абсолюта точек, образующих так называемую идеальную область плоскости Лобачевского, можно построить различные геометрии. Каждую прямую плоскости H^2 по наличию общих с абсолютом точек можно отнести к одному из трех типов. Прямые, пересекающие абсолют в двух действительных точках, называют *гиперболическими*, в двух мнимо сопряженных точках — *эллиптическими*, а касательные к абсолюту называют *параболическими*, или *изотропными прямыми*. В работе [2] на прямых указанных типов с помощью точек абсолюта введены понятия: направление, луч, отрезок, квазиотрезок, середина отрезка и квазиотрезка, квазисередина отрезка. Ослабляя строгость определений, приведем те из них, которые будут использованы в данной работе.