Е. А. Савинов, Предельная теорема для копул преобразований независимости t-распределения Стьюдента,
Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., 2011, выпуск 8, 69–85

УДК 519.214

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КОПУЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕЗАВИСИМОСТИ t-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

© 2011 Е.А. Савинов[1]

В работе изучаются копулы, полученные в результате преобразования независимости (Independence Transformation) случайных векторов с распределением Стьюдента. Для схемы серий зависимых случайных величин, связанных такими IT-копулами, доказаны варианты центральной предельной теоремы. Для двумерной IT-копулы распределения Коши показано отсутствие ассоциированности.

Ключевые слова: копулы, преобразование независимости, предельные теоремы.

Введение

Математические работы, так или иначе связанные с понятием копулы, появились еще в 40–50-х годах прошлого века. Первое упоминание термина "копула" появилось, по-видимому, в 1959 г. в работе [1] и окончательно укрепилось в научной литературе в 70–80-х годах. С одной стороны (см., например [2]), копулы рассматриваются как функции, которые связывают многомерные функции распределения с их одномерными маргиналами (Sklar's theorem), с другой стороны, это просто функции распределения, чьи маргиналы равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

Как известно (см. [3]), изучение копул интересно по нескольким причинам: во-первых, это способ изучения меры зависимости между случайными величинами (см. [4]), во-вторых, как отправная точка для конструирования новых семейств многомерных распределений, в-третьих, в связи с относительно новым подходом к теории марковских процессов (см. [5]).

В настоящей работе изучаются копулы, порожденные так называемыми преобразованиями независимости. Фактически первой работой, посвященной таким преобразованиям, была статья [6]. Более подробно свойства этого преобразования для негауссовских случайных величин изучались в работах [7–15]. Отметим, что рассматриваемые преобразования в случае гауссовского случайного вектора совпадают с хорошо известным линейным преобразованием ортогонализации. Как будет видно далее, случайный вектор, полученный в результате преобразования

[1]Савинов Евгений Анатольевич (`henrylee@dxdy.ru`), кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

независимости, состоит, вообще говоря, из зависимых компонент, что приводит к задаче изучения характера и мер зависимости между ними с помощью копул.

В работе рассматриваются IT-копулы распределений Стьюдента, и для гауссовских случайных величин, связанных такими копулами (и в силу этого не образующих гауссовский вектор), устанавливаются различные варианты ЦПТ. В заключение на примере двумерной копулы преобразования независимости распределения Коши показано, что IT-копулы, вообще говоря, не являются ассоциированными.

Введем используемые далее обозначения.
$\mathbf{I} := [0,1]$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{I^n}$. Для $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I^n}$ будем писать $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$, когда $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Для $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$ будем обозначать через $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ n-прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbf{I^n}$. $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного гауссовского распределения.

Введем необходимые определения.
Определение 1. *Пусть $H : \mathbf{I^n} \to \mathbf{I}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I^n}$, $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – n-прямоугольник в $\mathbf{I^n}$. H-объемом n-прямоугольника B будем называть разность порядка n функции H на B*

$$V_H(B) = \Delta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}), \tag{1}$$

где разность первого порядка определяется как

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Определение 2 (Copula)**.** *Функция $C : \mathbf{I^n} \to \mathbf{I}$ называется* n-копулой*, если она обладает следующими свойствами*

1. *Для каждого $\mathbf{u} \in \mathbf{I^n}$*
$$C(\mathbf{u}) = 0, \quad \textit{если} \quad u_1 u_2 \cdots u_n = 0.$$

2. *Если все координаты $\mathbf{u}$ кроме u_k равны 1, то*
$$C(\mathbf{u}) = u_k.$$

3. *Для всех $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из $\mathbf{I^n}$ таких, что $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$*
$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geqslant 0.$$

Как известно, копула связывает многомерную функцию распределения с одномерными маргинальными распределениями (см., например [2]).
Теорема 1 (Sklar)**.** *Пусть H — совместная n-мерная функция распределения с одномерными маргиналами $F_1, \dots, F_n$. Тогда существует n-копула $C : \mathbf{I^n} \to \mathbf{I}$ такая, что $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$H(\mathbf{x}) = C\left(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\right). \tag{2}$$

Если к тому же одномерные распределения F_i непрерывны, то такая C единственна.

Обратно, если C n-копула, $F_1, \dots, F_n$ — одномерные функции распределения, то функция H, заданная формулой (2), является n-мерной функцией распределения с маргиналами $F_1, \dots, F_n$.

1. IT-копулы

Рассмотрим на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$ случайный вектор $\mathbf{X_n} = (X_1, \ldots, X_n)$ с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$. Введем семейство условных функций распределения

$$F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i|x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$$

случайной величины X_i относительно системы случайных величин

$$X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n,$$

где $\hat{}$ — знак пропуска элемента. Будем рассматривать "двойственные"случайные величины

$$X^*_{i,n} = F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(X_i|X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n).$$

Говорят, что случайная величина $X^*_{i,n}$ получена в результате *преобразования независимости* случайной величины X_i. Термин *преобразование независимости* объясняется тем, что случайная величина $X^*_{i,n}$ оказывается стохастически независимой относительно системы $\left\{X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n\right\}$.

Лемма 1. *Функция распределения случайного вектора $(X^*_{1,n}, \ldots, X^*_{n,n})$ является копулой.*

Доказательство. Определение 2 проверяется непосредственно.

□

Определение 3. IT-копулой *случайного вектора* $\mathbf{X_n} = (X_1, \ldots, X_n)$ *с абсолютно непрерывным распределением будем называть функцию*

$$C^{\mathbf{X_n}}_{IT}(\mathbf{u}) = \mathsf{P}\{X^*_{1,n} \leqslant u_1, \ldots, X^*_{n,n} \leqslant u_n\}.$$

Замечание 1. *Отметим, что* копула *случайного вектора* $\mathbf{X_n} = (X_1, \ldots, X_n)$ *с абсолютно непрерывным распределением будет, в силу теоремы 1, иметь вид*

$$C^{\mathbf{X_n}}(\mathbf{u}) = \mathsf{P}\left\{F_1(X_1) \leqslant u_1, \ldots, F_n(X_n) \leqslant u_n\right\},$$

где $F_i(t) = \mathsf{P}\{X_i \leqslant t\}$ *— функции распределения компонент вектора* $\mathbf{X_n}$.

2. Предельная теорема для IT-копул Стьюдента

В этой части мы будем рассматривать последовательности IT-копул стьюдентовских случайных векторов. Мы покажем, что для схемы серий гауссовских случайных величин, связанных такими копулами, имеет место центральная предельная теорема.

Предположим, задано измеримое пространство $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где $\mathbb{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, борелевской σ-алгеброй и скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$. Будем рассматривать на нем счетно-аддитивную меру Стьюдента с r степенями свободы μ с характеристическим функционалом

$$\Psi_\mu(y) = \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2} < By, y >\right\} g_r(t)\, dt, \quad y \in \mathbb{H}, \tag{3}$$

где B — линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор с собственными векторами $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{-\frac{r}{2t}\right\}, \quad t > 0. \tag{4}$$

Выберем $\{f_k\}$ — произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и будем рассматривать на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$ случайные величины $X_i = \langle \cdot, f_i \rangle$. Заметим, что случайные векторы $\mathbf{X_n} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ имеют распределения Стьюдента с характеристическими функциями

$$\psi_{1\ldots n}(y_1, \ldots, y_n) = \int\limits_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^{n} y_i y_j \langle B_n f_i, f_j \rangle\right\} g_r(t)\, dt, \tag{5}$$

где $B_n = \pi_n B \pi_n$, π_n — ортопроектор $\mathbb{H} \to \mathbb{H}_n = span\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{X_n} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *семейство стьюдентовских случайных векторов на* $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$, *определенное выше. Рассмотрим* $\left\{X_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — *схему серий случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве* $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathsf{P}_0\}$ *и имеющих совместные функции распределения*

$$\mathsf{P}_0\left\{X_1^{(n)} \leqslant x_1, \ldots, X_n^{(n)} \leqslant x_n\right\} = C_{IT}^{\mathbf{X_n}}\left(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)\right).$$

Тогда если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{< B_n^{-1} f_i, f_j >}{[< B_n^{-1} f_i, f_i >< B_n^{-1} f_j, f_j >]^{1/2}} = \sigma^2, \tag{6}$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Отметим, что условие (6) выполнено не всегда. В приведенном в конце статьи примере 1 рассмотрена такая мера Стьюдента с характеристическим функционалом (3), для которой условие теоремы 2 не выполняется, но выполняется

Теорема 3. *Пусть* $\left\{X_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — *схема серий случайных величин из теоремы 2. Тогда если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{< B_n^{-1} f_i, f_j >}{[< B_n^{-1} f_i, f_i >< B_n^{-1} f_j, f_j >]^{1/2}} = \sigma^2, \tag{8}$$

то

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

3. IT-копула распределения Коши

Предположим теперь, что на измеримом пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где $\mathbb{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, борелевской σ-алгеброй и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, задана эллиптически-контурированная α-устойчивая вероятностная мера μ_α с характеристическим функционалом

$$\Psi_{\mu_\alpha}(y) = \exp\left\{-\langle By, y\rangle^{\alpha/2}\right\}, \ \ y \in \mathbb{H}, \tag{9}$$

где B, как и выше, линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор, с собственными векторами $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$: $Be_i = \lambda_i^2 e_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$.

Теперь в качестве компонент вектора $\mathbf{X_n}$ будем рассматривать величины $X_i = \langle\,\cdot\,, e_i\rangle$. Таким образом векторы $\mathbf{X_n}$ относительно меры μ_α будут α-устойчивы с характеристическими функциями

$$\psi_{1\ldots n}(y_1, \ldots, y_n) = \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 y_i^2\right)^{\alpha/2}\right]. \tag{10}$$

Для схемы серий $\left\{X_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, порожденной такими устойчивыми случайными векторами, сформулированная выше теорема 2 была доказана ранее в [14], а еще ранее (см. [13]) для распределений Коши ($\alpha = 1$). Также в [14] показано, что в этом случае (когда $\mathbf{X_n}$ — векторы Коши с характеристическими функциями (10), где $\alpha = 1$) случайные величины $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ зависимы (т. е. копула $C_{IT}^{\mathbf{X_n}}(u_1, \ldots, u_n)$ не является копулой-произведением).

Кроме того, что случайные величины в предельной теореме являются зависимыми, было бы интересно выяснить, какова природа такой зависимости. Интересно, в частности, не являются ли указанные случайные величины ассоциированными, для которых достаточно хорошо известны результаты, связанные с центральной предельной теоремой (см., например [16; 17]).

Напомним определение асоциированности, используемое в работе [17].

Определение 4. *Пусть $\{X_t,\ t \in T\}$ — семейство действительных случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P})$ и параметрическом множестве T. Это семейство называется ассоциированным или положительно зависимым, если для любых конечных множеств $I, J \subset T$*

$$cov(f(X_t, t \in I), g(X_t, t \in J)) \geqslant 0$$

для всех покоординатно неубывающих функций $f : \mathbb{R}^{|I|} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \to \mathbb{R}$, для которых ковариация определена ($|I|$ обозначает число элементов конечного множества I).

Теорема 4. *Если $\mathbf{X_2} = (X_1, X_2)$ — случайный вектор Коши, заданный характеристической функцией*

$$\psi_{12}(y_1, y_2) = \exp\left[-\left(\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2\right)^{1/2}\right], \tag{11}$$

тогда копула $C_{IT}^{\mathbf{X_2}}(u, v)$ не является ассоциированной.

4. Доказательства теорем

Прежде чем доказывать теорему 2, введем необходимые дополнительные обозначения и сформулируем вспомогательные результаты.

В дополнение к уже введенному семейству ортопроекторов $\{\pi_n\}$, следуя [8], будем рассматривать на $\mathbb{H}$ еще одно семейство ортопроекторов $\{\pi_{ni}\}$: для $h = \sum_{k=1}^{\infty} < h, f_k > f_k$ определим

$$\pi_{ni} h := \sum_{k=1, k\neq i}^{n} < h, f_k > f_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Аналогично [8] введем обозначения для следующих квадратичных форм:

$$s_n^2 := s_n^2(h) = \frac{1}{n} \left\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \right\rangle,$$

$$s_{n,i}^2 := s_{n,i}^2(h) = \frac{1}{n-1} \left\langle (\pi_{n,i} B \pi_{n,i})^{-1} \pi_{n,i} h, \pi_{n,i} h \right\rangle.$$

$$s_\infty := s_\infty(h) = \lim_{n\to\infty} s_n^2(h), \quad \Gamma := \{h \in \mathbb{H} : 0 < s_\infty(h) < +\infty\}.$$

Обозначим через μ_2^B гауссовскую меру на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ с ковариационным оператором B. Также введем (не отмечая особо зависимость от r) обозначения

$$\eta := \frac{1}{s_\infty}, \tag{12}$$

$$\zeta_{i,n} := \zeta_{i,n}(h) = \frac{< (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h >}{s_\infty [< (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i >]^{1/2}}, \quad i = 1..n, \tag{13}$$

$$A^{(n)} := \sqrt{\frac{n + r - 3/2}{r\eta^2 + n s_n^2 / s_\infty^2}} - 1, \quad B_i^{(n)} := \sqrt{\frac{n + r - 1}{r\eta^2 + (n-1) s_{n,i}^2 / s_\infty^2}} - 1, \tag{14}$$

$$U_i^{(n)} := \zeta_{i,n} \left(\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} - 1 \right).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты, полученные в [8]:
1^0.
$$n s_n^2 - (n-1) s_{n,i}^2 = \zeta_{i,n}^2 s_\infty^2. \tag{15}$$

2^0. μ-п. н.
$$s_n^2 \to s_\infty^2, \quad n \to \infty. \tag{16}$$

3^0. $\forall s > 0$ $\mu_2^{s^2 B}$-п. н.
$$s_n^2 \to s^2, \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Для доказательства теоремы сформулируем следующий вспомогательный результат

Лемма 2. *Если ортонормированный базис $\{f_k\}$ обладает свойством*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{< (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j >}{[< (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i >< (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j >]^{1/2}} = \sigma^2, \tag{18}$$

то имеют место следующие результаты:

1^0
$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,n} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2). \tag{19}$$

2^0
$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,n} A^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0. \tag{20}$$

3^0
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}B_i^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0. \qquad (21)$$

4^0
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}}\left[B_i^{(n)}-A^{(n)}\right] \xrightarrow{\mu} 0. \qquad (22)$$

Доказательство. $\mathbf{1^0}$. Сначала покажем, что относительно меры μ случайный вектор $\zeta_{\cdot,n}=(\zeta_{1,n},\ldots,\zeta_{n,n})$ гауссовский, его компоненты, вообще говоря, зависимы и являются (0,1)-гауссовскими случайными величинами, а матрица ковариаций (корреляций) этого вектора состоит из элементов

$$cov(\zeta_{i,n},\zeta_{j,n})=\frac{<(\pi_nB\pi_n)^{-1}f_i,f_j>}{[<(\pi_nB\pi_n)^{-1}f_i,f_i><(\pi_nB\pi_n)^{-1}f_j,f_j>]^{1/2}}. \qquad (23)$$

Действительно, введем случайные величины

$$\tilde{\zeta}_{i,n}:=\zeta_{i,n}s_\infty=\frac{<(\pi_nB\pi_n)^{-1}f_i,h>}{[<(\pi_nB\pi_n)^{-1}f_i,f_i>]^{1/2}}, \quad i=1..n$$

и рассмотрим функцию распределения случайного вектора $\zeta_{\cdot,n}$ относительно меры μ

$$\mu\{\zeta_{1,n}\leqslant u_1,\ldots,\zeta_{n,n}\leqslant u_n\}=\int\limits_0^\infty \mu_2^{s^2B}\{\zeta_{1,n}\leqslant u_1,\ldots,\zeta_{n,n}\leqslant u_n\}\,2sg_r(s^2)\,ds.$$

Далее ввиду (17) выполняется $\mu_2^{s^2B}\{s_\infty=s\}=1$, тогда

$$\mu\{\zeta_{1,n}\leqslant u_1,\ldots,\zeta_{n,n}\leqslant u_n\}=$$
$$=\int\limits_0^\infty \mu_2^{s^2B}\left\{\tilde{\zeta}_{1,n}/s\leqslant u_1,\ldots,\tilde{\zeta}_{n,n}/s\leqslant u_n\right\}2sg_r(s^2)\,ds.$$

Заметим, что $\tilde{\zeta}_{i,n}$ — линейные непрерывные функционалы на $\mathbb{H}$ и

$$\mu_2^{s^2B}\left\{\tilde{\zeta}_{1,n}/s\leqslant u_1,\ldots,\tilde{\zeta}_{n,n}/s\leqslant u_n\right\}=\mu_2^{B}\left\{\tilde{\zeta}_{1,n}\leqslant u_1,\ldots,\tilde{\zeta}_{n,n}\leqslant u_n\right\},$$

так как равны соответствующие характеристические функции:

$$\exp\left\{-\left\langle s^2B\sum_{i=1}^n y_i\tilde{\zeta}_{i,n}/s,\sum_{j=1}^n y_i\tilde{\zeta}_{j,n}/s\right\rangle\right\}=$$
$$=\exp\left\{-\left\langle B\sum_{i=1}^n y_i\tilde{\zeta}_{i,n},\sum_{j=1}^n y_i\tilde{\zeta}_{j,n}\right\rangle\right\}.$$

Таким образом,

$$\mu\{\zeta_{1,n}\leqslant u_1,\ldots,\zeta_{n,n}\leqslant u_n\}=\mu_2^B\left\{\tilde{\zeta}_{1,n}\leqslant u_1,\ldots,\tilde{\zeta}_{n,n}\leqslant u_n\right\}.$$

Значит, распределение случайного вектора $\zeta_{\cdot,n}$ относительно меры μ совпадает с распределением вектора $\tilde{\zeta}_{\cdot,n}$ относительно меры μ_2^B. Поскольку вектор $\tilde{\zeta}_{\cdot,n}$ относительно меры μ_2^B гауссовский с нулевым вектором средних (это следует из того, что его компоненты — линейные непрерывные функционалы на $\mathbb{H}$), то таковым является и вектор $\zeta_{\cdot,n}$ относительно меры μ. Кроме того,

$$cov(\zeta_{i,n},\zeta_{j,n})=cov_2(\tilde{\zeta}_{i,n},\tilde{\zeta}_{j,n}). \qquad (24)$$

Как известно,

$$cov_2(\tilde{\zeta}_{i,n},\tilde{\zeta}_{j,n}) = \left\langle B\tilde{\zeta}_{i,n},\tilde{\zeta}_{j,n}\right\rangle =$$

$$= \frac{< B(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j >}{[< (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,f_i >< (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j,f_j >]^{1/2}}. \tag{25}$$

Рассмотрим числитель и установим тождество

$$< B(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j > = < (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,f_j > . \tag{26}$$

Для этого обозначим

$$h := (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i \in \mathbb{H}_n, \quad g := (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j \in \mathbb{H}_n$$

и проведем следующие вычисления:

$$B\pi_n g = Bg = \sum_{\tilde{j}=1}^{\infty}\lambda_{\tilde{j}}^2 < g,e_{\tilde{j}} > e_{\tilde{j}} = \sum_{\tilde{j}=1}^{\infty}\lambda_{\tilde{j}}^2\left[\sum_{\tilde{i}=1}^{n} < g,f_{\tilde{i}} >< f_{\tilde{i}},e_{\tilde{j}} >\right]e_{\tilde{j}},$$

$$\pi_n B\pi_n g = \sum_{\tilde{k}=1}^{n}\sum_{\tilde{i}=1}^{n} < g,f_{\tilde{i}} > \left[\sum_{\tilde{j}=1}^{\infty}\lambda_{\tilde{j}}^2 < f_{\tilde{i}},e_{\tilde{j}} >< e_{\tilde{j}},f_{\tilde{k}} >\right]f_{\tilde{k}}.$$

Поскольку $\pi_n B\pi_n g = f_j$, то

$$\sum_{\tilde{i}=1}^{n} < g,f_{\tilde{i}} > a_{\tilde{i},\tilde{k}} = \delta_{\tilde{k},j},$$

где

$$a_{\tilde{i},\tilde{k}} = \sum_{\tilde{j}=1}^{\infty}\lambda_{\tilde{j}}^2 < f_{\tilde{i}},e_{\tilde{j}} >< e_{\tilde{j}},f_{\tilde{k}} > .$$

Теперь вычислим

$$< Bh,g > = \left\langle \sum_{\tilde{j}=1}^{\infty}\lambda_{\tilde{j}}^2\left[\sum_{\tilde{i}=1}^{n} < h,f_{\tilde{i}} >< f_{\tilde{i}},e_{\tilde{j}} >\right]e_{\tilde{j}}, \sum_{m=1}^{n} < g,f_m > f_m\right\rangle =$$

$$= \sum_{\tilde{i}=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} < h,f_{\tilde{i}} >< g,f_m > a_{\tilde{i},m} = \sum_{\tilde{i}=1}^{n} < h,f_{\tilde{i}} > \left[\sum_{m=1}^{n} < g,f_m > a_{\tilde{i},m}\right] =$$

$$= \sum_{\tilde{i}=1}^{n} < h,f_{\tilde{i}} > \delta_{\tilde{i},j} = < h,f_j >,$$

что и является тождеством (26). Из (24)–(26) следует (23).

Очевидно, каждая сумма

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}$$

также гауссовская с нулевым средним. Вычислим дисперсию S_n.

$$DS_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{< (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,f_j >}{[< (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,f_i >< (\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j,f_j >]^{1/2}}.$$

Тогда из (18) следует, что последовательность характеристических функций случайных величин S_n сходится к х.ф. распределения $N(0,\sigma^2)$, что и влечет сходимость (19).

2⁰. В силу (16) μ-п. н. $A^{(n)} \to 0 \Rightarrow A^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0$. Выберем произвольные $\varepsilon > 0,\ C > 0$. Тогда

$$\mu\left\{\left|S_n A^{(n)}\right| > \varepsilon\right\} = \mu\left\{\left|S_n A^{(n)}\right| > \varepsilon,\ \ |S_n| > C\right\} +$$
$$+\mu\left\{\left|S_n A^{(n)}\right| > \varepsilon,\ \ |S_n| \leqslant C\right\} \leqslant \mu\left\{|S_n| > C\right\} + \mu\left\{\left|A^{(n)}\right| > \varepsilon/C\right\}.$$

Тогда с учетом сходимости (19) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{\left|S_n A^{(n)}\right| > \varepsilon\right\} \leqslant 2\Phi\left(-C\right),$$

Переходя к пределу по $C \to +\infty$, получаем сходимость (20).
3⁰. Используя (15), получим

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}B_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2+(n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}}-1\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2+ns_n^2/s_\infty^2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\left(\sqrt{1+\frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2+(n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}}-1\right) + \tag{27}$$
$$+\left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2+ns_n^2/s_\infty^2}}-1\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}.$$

В силу (16), μ-п. н.

$$\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2+ns_n^2/s_\infty^2}} \to 1, \quad n\to\infty. \tag{28}$$

Тогда аналогично сходимости (20) доказывается сходимость

$$\left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2+ns_n^2/s_\infty^2}}-1\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n} \xrightarrow{\mu} 0. \tag{29}$$

Рассмотрим случайную последовательность

$$\bar{S}_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\left(\sqrt{1+\frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2+(n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}}-1\right).$$

Следующее обозначение нам понадобится при доказательстве п.4^0:

$$\bar{S}_{n+} := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}|\zeta_{i,n}|\left(\sqrt{1+\frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2+(n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}}-1\right).$$

Используя неравенство Бернулли $1+\alpha \geqslant \sqrt{1+2\alpha}$, получим

$$\left|\bar{S}_n\right| \leqslant \bar{S}_{n+} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\zeta_{i,n}|^3}{r\eta^2+(n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\zeta_{i,n}|^3}{s_{n,i}^2/s_\infty^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} s_{n,i}^2/s_\infty^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)}\sum_{i=1}^{n}|\zeta_{i,n}|^3. \tag{30}$$

Рассмотрим первый множитель. Ввиду (15)

$$\frac{n-1}{n}\min_{1\leqslant i\leqslant n} s_{n,i}^2/s_\infty^2 = s_n^2/s_\infty^2 - \frac{1}{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\zeta_{i,n}^2. \tag{31}$$

Поскольку

$$\mu\left\{\zeta_{i,n}^2 \leqslant u\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^u \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-t/2} dt,$$

то

$$\mu\left\{\frac{1}{n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \zeta_{i,n}^2 > \varepsilon\right\} \leqslant \sum_{i=1}^n \mu\left\{\zeta_{i,n}^2 > \varepsilon n\right\} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\varepsilon n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-t/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{\sqrt{2\pi\varepsilon n}} \int\limits_{\varepsilon n}^{\infty} e^{-t/2} dt = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\varepsilon n/2} \to 0, \quad n\to\infty. \tag{32}$$

В силу (16) из (31) и (32) следует, что

$$\frac{n-1}{n} \min_{1\leqslant i\leqslant n} s_{n,i}^2/s_\infty^2 \xrightarrow{\mu} 1, \quad n\to\infty,$$

тогда

$$\frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} s_{n,i}^2/s_\infty^2} \xrightarrow{\mu} 1, \quad n\to\infty. \tag{33}$$

Наконец

$$\mu\left\{\frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)} \sum_{i=1}^n |\zeta_{i,n}|^3 > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{nE\,|\zeta_{1,n}|^3}{2\varepsilon\sqrt{n}(n-1)} = \frac{n\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi n}(n-1)} \to 0 \tag{34}$$

при $n\to\infty$. Таким образом, из (30), (33) и (34) следует, что

$$\left|\bar{S}_n\right| \xrightarrow{\mu} 0, \quad n\to\infty. \tag{35}$$

Теперь из (27)–(35) вытекает (21).
4^0.

$$R_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}} \left[B_i^{(n)} - A^{(n)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}} \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - \sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2(n+r-1)}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}}\right].$$

$$|R_n| \leqslant \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \times$$

$$\times \left[\bar{S}_{n+} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2(n+r-1)}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}}\right]. \tag{36}$$

Заметим, что из доказательства п.3^0 следует

$$\bar{S}_{n+} \xrightarrow{\mu} 0, \quad n\to\infty. \tag{37}$$

Далее, в силу неравенства Чебышева, $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu\left\{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{2(n+r-1)}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}} > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}(n+r-1)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{2(n+r-1)}}\right)} \to 0, \quad n\to\infty. \tag{38}$$

Наконец, из (28), (36), (37) и (38) следует (22). $\square$

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно считать, что вероятностное пространство $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathsf{P}_0\}$ есть $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$, и

$$X_i^{(n)} = \Phi^{-1}\left(X_{i,n}^*\right). \tag{39}$$

Разобьем сумму в формуле (7) на два слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\left[\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}-1\right] + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}.$$

Учитывая п. 1^0 леммы 2, для доказательства справедливости утверждения теоремы достаточно (см. [18, с. 111]) показать сходимость по вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\left[\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}-1\right] \xrightarrow{\mu} 0, \quad n\to\infty. \tag{40}$$

По аналогии с работой [19] можно показать, что в случае рассматриваемой меры Стьюдента, условные функция распределения, порожденные проекциями этой меры на подпространства $span\{f_1,\ldots,f_n\}$, имеют вид

$$F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(X_i|X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_n) =$$

$$= \begin{cases} 1-\frac{1}{2}B\left(\frac{(n-1)s_{n,i}^2+r}{ns_n^2+r};\frac{n+r-1}{2},\frac{1}{2}\right), & \left\langle(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,h\right\rangle \geqslant 0,\\ \frac{1}{2}B\left(\frac{(n-1)s_{n,i}^2+r}{ns_n^2+r};\frac{n+r-1}{2},\frac{1}{2}\right), & \langle(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i,h\rangle < 0,\end{cases} \tag{41}$$

где $B(\cdot\,;\alpha,\beta)$ — бета-распределение.

Воспользуемся известной оценкой (см. [19]) для бета-распределений

$$1-\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{u}}\right) \leqslant \frac{1}{2}B\left(\frac{nu}{1+nu};\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) \leqslant 1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n-\frac{1}{2}}{1+nu}}\right). \tag{42}$$

Из формул (39), (41) и (42) с учетом обозначений (12) и (13) получим

$$\sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2+ns_n^2/s_\infty^2}} \leqslant \frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} \leqslant \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2+(n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}}. \tag{43}$$

Используя обозначения (14), и оценки (43) для любого $i=1,2,\ldots$ нетрудно получить неравенства

$$A^{(n)}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}} \leqslant U_i^{(n)}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}} \leqslant B_i^{(n)}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}}$$

$$B_i^{(n)}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}<0\}} \leqslant U_i^{(n)}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}<0\}} \leqslant A^{(n)}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}<0\}},$$

Складывая эти неравенства и суммируя по i, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}B_i^{(n)}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}}\left[A^{(n)}-B_i^{(n)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}U_i^{(n)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}A^{(n)}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n}\geqslant 0\}}\left[B_i^{(n)}-A^{(n)}\right].$$

Переходя к пределу в этом неравенстве в силу п. $2^0, 3^0, 4^0$ леммы 2, получаем (40).

□

Следствие 1 (из теоремы 2)**.** *Пусть a_n — последовательность положительных чисел такая, что $a_n\to+\infty$. Если для некоторого распределения V*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\xrightarrow{d}V,\tag{44}$$

то

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{(n)}\xrightarrow{d}V.\tag{45}$$

Доказательство. Очевидно, п. 2^0, 3^0 и 4^0 леммы 2 для сумм, нормированных числами a_n, выполняются, и, следовательно, повторяя доказательсто теоремы, можно показать выполнение сходимости

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\left[\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}-1\right]\xrightarrow{\mu}0,\quad n\to\infty.$$

□

Доказательство теоремы 3. В обозначениях леммы 2 соотношение (8) означает, что

$$D(S_n/\sqrt{n})\to\sigma^2,$$

то есть

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,n}\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2),$$

что вместе со следствием 1 и доказывает теорему. □

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 4, введем нужные обозначения и сделаем несколько замечаний.

Без ограничения общности можно считать, что вектор $\mathbf{X_2}=(X_1,X_2)$ задан на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H},\mathcal{B}(\mathbb{H}),\mu_1\}$, где μ_1 — мера Коши, заданная функционалом (9), $X_i=\langle\,\cdot\,,e_i\rangle$, $i=1,2$.

Следуя работе [19], введем функционал $s_\infty^2(x)$ и множество сходимости Γ :

$$s_\infty^2(x):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle x,e_i\rangle^2}{\lambda_i^2},$$

$$\Gamma:=\{x\in\mathbb{H}:0<s_\infty^2(x)<\infty\}.$$

В работе [19] установлено, что $\mu_1\{\Gamma\} = 1$. Будем предполагать, что все вводимые далее случайные величины заданными на множестве Γ и для краткости опускать аргумент x.

Обозначим
$$\xi_i := \frac{\langle x, e_i\rangle}{\lambda_i s_\infty(x)}, \quad \eta := \frac{1}{s_\infty(x)}, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{46}$$

Как показано в работах [9; 19], введенные случайные величины обладают следующими свойствами:

1) относительно меры μ_1 система случайных величин
$$\eta^2, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots, \tag{47}$$
независима;

2) случайные величины ξ_i имеют стандартное гауссовское распределение
$$\mu_1\{\xi_i \leqslant u\} = \Phi(u), \qquad \forall i \in \mathbb{N}; \tag{48}$$

3) плотность распределения случайной величины $s_\infty(x)$ имеет вид
$$g(u) := \frac{d}{du}\mu_1\{s_\infty(x) \leqslant u\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u^{-2} e^{-1/2u^2}.$$

Заметим также, что из последнего соотношения следует, что случайная величина $\eta^2 = s_\infty^{-2}(x)$ является квадратом (0,1)-гауссовской случайной величины с плотностью распределения
$$p_{\eta^2}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\, e^{-u/2}, \quad u > 0. \tag{49}$$

Доказательство теоремы 4. Воспользуемся известным представлением условных функций распределения n-мерного распределения Коши (см. [19]) с помощью бета-распределения $B(\cdot;\cdot,\cdot)$ (см. [20, с. 47]). Именно условные функции распределения каждой компоненты вектора $\mathbf{X_2}$ относительно другой имеют вид

$$F_{1|2}(x_1|x_2) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_2^2/\lambda_2^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_i \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_2^2/\lambda_2^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_i < 0. \end{cases} \tag{50}$$

$$F_{2|1}(x_2|x_1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_1^2/\lambda_1^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_i \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_1^2/\lambda_1^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_i < 0. \end{cases} \tag{51}$$

Из определения функции B-распределения (см. [20, с. 47]) легко видеть, что
$$B\left(x; 1, \frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{1-x}. \tag{52}$$

Из (50) и (51), с учетом (52) и обозначений (46), получим
$$F_{i|3-i}(X_i|X_{3-i}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\frac{1}{s_\infty^2} + \xi_1^2 + \xi_2^2}}\right), \quad i = 1, 2.$$

В силу (47), (48) и (49) существует случайная величина ξ_3 такая, что $\xi_3^2 = 1/s_\infty^2(x)$, и (ξ_1, ξ_2, ξ_3) гауссовский вектор с независимыми (0,1) компонентами. Таким образом
$$X_{i,2}^* = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}\right], \quad i = 1, 2.$$

Теперь покажем, что случайные величины $X^*_{i,2}$, $i = 1, 2$ не являются ассоциированными. Рассмотрим неубывающие функции

$$f(x) = g(x) = (2x-1)\,\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(2x-1),$$
$$\tilde{g}(x) = (2x-1)\,\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(2x-1).$$

Нетрудно видеть, что

$$cov\left(f\left(X^{(1)}_{1,2}\right), g\left(X^{(1)}_{2,2}\right)\right) = \frac{1}{6\pi} - \frac{1}{64} > 0,$$
$$cov\left(f\left(X^{(1)}_{1,2}\right), \tilde{g}\left(X^{(1)}_{2,2}\right)\right) = \frac{1}{64} - \frac{1}{6\pi} < 0.$$

□

Пример 1. *Рассмотрим пример, приведенный в работе* [8].

В пространстве $\mathbb{H}$ *с о.н.б.* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *введем бесконечное семейство конечномерных подпространств:*

$$\mathbb{H}_{(2^k-1,2^{k+1}-2)} = span\{f_{2^k-1}, \ldots, f_{2^{k+1}-2}\}, k = 1, 2, \ldots.$$

В каждом из этих подпространств рассмотрим конечномерные операторы

$$B_0^{(k)} : \mathbb{H}_{(2^k-1,2^{k+1}-2)} \to \mathbb{H}_{(2^k-1,2^{k+1}-2)},$$

задаваемые в базисе $\{f_n\}$ $(n = 2^k - 1, \ldots, 2^{k+1} - 2)$ *трехдиагональными симметрическими* $(2^k \times 2^k)$*-матрицами:*

$$B_0^{(k)} = \frac{1}{2^{2k}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Зададим оператор $B_0 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *в базисе* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с помощью блочно-диагональной бесконечной симметрической матрицы*

$$B_0 = diag[B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \ldots, B_0^{(k)}, \ldots].$$

Оператор B_0 *ограничен, положительно определен и является ядерным. Далее будем считать, что* $n = 2^{k+1} - 2$*, тогда*

$$\pi_n B_0 \pi_n = diag[B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \ldots, B_0^{(k)}];$$
$$(\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} = diag[(B_0^{(1)})^{-1}, (B_0^{(2)})^{-1}, \ldots, (B_0^{(k)})^{-1}];$$
$$(B_0^{(l)})^{-1} = 2^{2l}\left[\min(r,s) - \frac{rs}{2^l+1}\right], \quad r, s = 1, \ldots, 2^l, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{< (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_j >}{[< (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_i >< (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_j, f_j >]^{1/2}} = \lim_{k\to\infty} \widehat{D}_k, \tag{53}$$

где

$$\widehat{D}_k := \frac{1}{4(2^k-1)^2} \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{2^l}\sum_{s=1}^{2^l} \left[\min\left\{\frac{r}{2^l+1}, \frac{s}{2^l+1}\right\} - \frac{r}{2^l+1}\cdot\frac{s}{2^l+1}\right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{r}{2^l+1} \left(1 - \frac{r}{2^l+1}\right) \frac{s}{2^l+1} \left(1 - \frac{s}{2^l+1}\right) \right]^{-1/2} \Bigg).$$

Обозначим двойную сумму в круглых скобках через c_l. Рассматривая, аналогично [8], двойной интеграл от квадрата корреляционной функции броуновского моста как предел интегральных сумм, получим при $l \to \infty$

$$\frac{c_l}{(2^l+1)^2} \to I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\min\{x,y\} - xy}{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}}\, dxdy = \frac{1}{4}(\pi^2 - 3).$$

Тогда для $l > L_\varepsilon$

$$\left(2^l+1\right)^2 I(1-\varepsilon) < c_l < \left(2^l+1\right)^2 I(1+\varepsilon),$$

откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{D}_k = \lim_{k\to\infty} \frac{I}{4(2^k-1)^2} \sum_{l=1}^{k} (2^l+1)^2.$$

Вычислим

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{D}_k = \lim_{k\to\infty} \frac{I}{4(2^k-1)^2} \left[\frac{4}{3}\left(2^{2k}-1\right) + 4\left(2^k-1\right) + k \right] = I/3 = \frac{1}{12}(\pi^2 - 3).$$

Таким образом в силу теоремы 3 в случае, когда мера Стьюдента задана оператором B_0, выполняется

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

где $\sigma^2 = (\pi^2 - 3)/12$.

Литература

[1] Sklar A. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges // Publ. Inst. Statist. Univ. Paris. 1959. V. 8. P. 229–231.

[2] Nelsen R. An Introduction to Copulas. Second Edition. New York: Springer, 2006.

[3] Fisher N.I. Copulas / S. Kotz, C.B. Read, D.L. Banks (eds) // Encyclopedia of Statistical Sciences, Update. V. 1. Wiley; New York, 1997. P. 159–163.

[4] Schweizer B., Wolff E.F. On nonparametric measures of dependence fo random variables // Ann. Statist. 1981. № 9. P. 879–885.

[5] Darsow W.F., Nguyen B., Olsen E.T. Copulas and Markov processes // Illinois J. Math. 1992. № 36. P. 600–642.

[6] Rosenblatt M. Remarks on multivariate transformation // Ann. Math. Stat. 1952. V. 23. P. 470–472.

[7] Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости // Теория вероятн. и ее примен. 1992. Т. 37. Вып. 4. С. 815–816.

[8] Шатских С.Я. Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер // Теория вероятн. и ее примен. 2005. Т. 50. Вып. 2. С. 291–312.

[9] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений // Изв.РАЕН. Серия МММИУ. 1999. Т. 3. № 3. С. 43–81.

[10] Горячкин О.В. Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. М.: Радио и связь, 2003. 229 с.

[11] Горячкин О.В., Шатских С.Я. Метод анализа независимых компонент на основе преобразования независимости // Доклады РАН. 2004. Т. 398. № 4.

[12] Кнутова Е.М., Шатских С.Я. Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений // Теория вероятн. и ее примен. 2006. Т. 51. Вып. 2. С. 374–382.

[13] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями σ-аддитивной меры Коши // Вестник СамГУ. 2005. № 6(40). С. 51–59.

[14] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями проекций устойчивой меры на гильбертовом пространстве // Вестник СамГУ. 2007. № 9/1. С. 121–127.

[15] Савинов Е.А. Асимптотические свойства конечномерных условных распределений сферически-симметричных мер на локально выпуклом пространстве // Известия вузов. Сер. Математика. 2005. № 3. С. 71–78.

[16] Dedecker J., Doukhan P. et al. Weak Dependence: With Examples and Applications// Lecture Notes in Statistics. 2007. № 190. 318 p.

[17] Булинский А.В., Вронский М.А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 4. С. 999–1018.

[18] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1986. 328 с.

[19] Shatskih S.Ya. Asymptotic properties of conditional quantiles of the Cauchy distribution on Hilbert space // Journal of Math. Sciences. 1999. V. 93. № 4. P. 574–581.

[20] Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. 910 с.

Поступила в редакцию $22/X/2011$;
в окончательном варианте — $22/X/2011$.

LIMIT THEOREM FOR INDEPENDENCE TRANSFORMATIONS COPULAS OF STUDENT'S t-DISTRIBUTION

 E.A. Savinov[2]

In the paper we study copulas obtained as a result of independence transformation of random vectors with Student's t-distribution. For the triangular scheme of dependent r.v. connected by such IT-copulas central limit theorem is proved. In addition, it is shown that two-dimensional IT-copula of Cauchy distribution is not associated.

Key words: copulas, independence transformations, limit theorems.

Paper received $22/X/2011$.
Paper accepted $22/X/2011$.

[2]Savinov Evgeniy Anatolievich (`henrylee@dxdy.ru`), the Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.